Бугрій Н., Асимптотика перетворення Лапласа функції відновлення // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том14. — № 2. — С. 149-153. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 519.21

Н. Бугрій, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет „Львівська політехніка”

АСИМПТОТИКА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ФУНКЦІЇ ВІДНОВЛЕННЯ

Розглянуто процес відновлення, де розподіл часу очікування має правильно змінний хвіст з показником -1. Знайдено асимптотику перетворення Лапласа функції відновлення при умові, що середній час очікування є нескінченним.

Ключові слова: *перетворення Лапласа, асимптотика, функція відновлення, хвіст розподілу.*

N. Buhrii

AN ASYMPTOTIC OF THE LAPLACE TRANSFORM OF A RENEWAL FUNCTION

A renewal process whose waiting time distribution has a regularly varying tail with exponent -1 is considered. An asymptotic of the Laplace transform of a renewal function is found on condition that the mean waiting time is infinite.

Key words: *Laplace transform, asymptotic, function recovery, the tail distribution.*

Вступ. Дослідженням розподілів, хвости яких є правильно змінними функціями на нескінченності з показником $-\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$, займалися Еріксон К. [1], Андерсон К. та Атрея К. [2]. В залежності від того, яке значення приймає α, Еріксон К. встановив різні асимптотичні властивості функції відновлення на нескінченності. Ми будемо досліджувати розподіл, хвіст якого є правильно змінною функцією на нескінченності з показником –1 і відповідну йому функцію відновлення.

Основний результат цієї праці базується на багатовимірній тауберовій теоремі Якиміва А.Л. [3, С. 560], яку ми використовуємо для функцій однієї змінної. Припускаючи, що середнє вищезгаданого розподілу є нескінченним, ми отримуємо асимптотику перетворення Лапласа функції відновлення.

Основна частина. Нехай $\{X_k, \quad k \ge 1\}$ – послідовність невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу F, яка задовольняє умову $F(0)=0$. Послідовність сум $\{S_{n,}\ n \ge 0\}$, тобто $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \ge 1$, утворює процес відновлення. Величину X_n можна трактувати як час очікування.

Тоді суми $S_{n,}\ n \ge 0$ є моментами відновлення. Для будь-якого скінченного інтервалу $I=[a,b]$ розглянемо подію $\{S_n \in I\}$. Якщо подію $\{S_n \in I\}$ називати успіхом, то загальна кількість успіхів в нескінченній послідовності випробувань має математичне сподівання, рівне

$$U\{I\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mathrm{S_n} \in I\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}\{I\},$$

де

$$F^{0*} = 1, \quad F^{1*} = F, \quad F^{(n+1)*} = F^{n*} * F,$$

$$F^{(n+1)*}\{I\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n*}\{I-y\} \cdot F\{dy\},$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad I - y = [a-y, b-y].$$

Тоді

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x), \qquad x \geq 0,$$

– математичне сподівання кількості моментів відновлення на інтервалі $[0, x]$ (нуль вважається моментом відновлення). Визначену таким чином функцію U називатимемо функцією відновлення. Для $\lambda > 0$ перетворення Лапласа функції відновлення U матиме вигляд

$$\widetilde{U}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} U(x)\, dx .$$

Наведемо означення найбільш вживаних у статті понять.

Означення 1. Визначена на $[0, +\infty)$ додатна функція L називається повільно змінною на нескінченості тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x > 0$ виконується умова

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1 \cdot$$

Означення 2. Визначена на $[0, +\infty)$ додатна функція R називається правильно змінною на нескінченності з показником ρ $(-\infty < \rho < +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x > 0$ виконується умова

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R(tx)}{R(t)} = x^{\rho} .$$

Зауваження 1. Функція $R(t)$ називається правильно змінною в нулі, якщо $R\left(\frac{1}{t}\right)$ правильно змінюється на нескінченності.

Нехай F є неарифметичним ймовірнісним розподілом на півпрямій $[0, +\infty)$, який має правильно змінний хвіст на нескінченності з показником $-\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, тобто

$$1 - F(t) \approx \frac{L(t)}{t^{\alpha}} \text{ при } t \to +\infty, \tag{1}$$

де L – повільно змінна функція на нескінченності. Визначимо функцію

$$m(t) = \int_0^t [1 - F(x)]\, dx = t[1 - F(t)] + \int_0^t xF\{dx\},\ t \geq 0 .$$

Нагадаємо доведену в [1, C. 265] теорему, яка встановлює поведінку функції відновлення на нескінченності.

Теорема 1. Нехай виконується умова (1). Тоді наступні твердження еквівалентні:

1) m є правильно змінною функцією на нескінченності з показником $1-\alpha$;

2) U є правильно змінною функцією на нескінченності з показником α.

З пунктів 1) та 2) випливає асимптотичне відношення

$$U(t) \approx \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)m(t)} \text{ при } t \to +\infty,$$

де Гамма-функція Γ визначається так

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\beta-1} e^{-x}\, dx, \qquad \beta > 0 .$$

Ми досліджуватимемо поведінку перетворення Лапласа міри відновлення на нескінченності за умови, що хвіст розподілу F є правильно змінною функцією на нескінченності з показником $-\alpha$ $(\alpha = 1)$. Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. Нехай виконується умова

$$1 - F(t) \approx \frac{L(t)}{t} \text{ при } t \to +\infty \tag{2}$$

і, крім того,

$$m(t) \to +\infty \text{ при } t \to +\infty. \tag{3}$$

Тоді для довільного $\lambda > 0$

$$\widetilde{U}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \approx \frac{t^2}{\lambda^2 m(t)} \text{ при } t \to +\infty, \tag{4}$$

тобто перетворення Лапласа функції відновлення є правильно змінною функцією на нескінченності з показником -2.

Доведення. Оскільки (2) рівносильна умові (1) з $\alpha = 1$, то за теоремою 1 m є повільно змінною функцією на нескінченності, U є правильно змінною функцією на нескінченності з показником 1 і виконується умова

$$U(t) \approx \frac{t}{m(t)} \text{ при } t \to +\infty. \tag{5}$$

Застосуємо теорему 2 [3, с. 560] для одновимірного випадку. Тоді

$$\Gamma = \{t : t \geq 0\}, \quad \Gamma^* = \Gamma, \quad S = \{t : t > 0\}, \quad G = C = S.$$

Для довільного $x > 0$, використавши представлення (5), одержимо рівність

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)tx}{m(tx)t} = x. \tag{6}$$

Аналогічно для $x_t > 0$, $x_t \to x$ при $t \to +\infty$ матимемо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx_t)}{U(t)} = x.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx_t) - U(tx)}{U(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx_t)}{U(t)} - \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = 0,$$

тобто $U(tx_t) - U(tx) = o(U(t))$. Оскільки $U = U(t)$ – додатна визначена при $t \geq 0$ функція, то за означенням 1 [3, с. 559] вона є U – повільно мінливою на нескінченності в Γ.

Зауважимо, що за (3) для довільного великого числа $N > 0$ існує таке досить велике число $A > 0$, що для довільних $t > A$ виконується нерівність $m(t) > N$. Для довільного $\lambda > 0$ розглянемо перетворення Лапласа функції U, а саме $\int_0^\infty e^{-\lambda x} U(x)\,dx$.

Обчислимо за правилом Лопіталя

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\lambda t} m(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda t} m(t) + e^{\lambda t}(1 - F(t))} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda m(t) + 1 - F(t)} = 0.$$

Звідси, враховуючи (5), отримаємо

$$e^{-\lambda t} U(t) \approx \frac{e^{-\lambda t} t}{m(t)} \text{ при } t \to +\infty,$$

а

$$\frac{e^{-\lambda t} t}{m(t)} < \frac{e^{-\lambda t}}{N} \text{ при } t > A.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}=0,$$

то, зінтегрувавши частинами, отримаємо, що

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x\,dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}x\Big|_0^\infty+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx=-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda^2}<+\infty.$$

Тому за ознакою порівняння збіжності невласних інтегралів одержимо, що

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda x}x}{m(x)}\,dx<+\infty,$$

а, отже,

$$\widetilde{U}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}U(x)\,dx<+\infty.$$

Зауважимо, що умова (6) еквівалентна умові (5) теореми 2 [3, с. 560] при $\varphi(x)=x$. Для довільного $\lambda>0$ існує перетворення Лапласа функції φ:

$$\widetilde{\varphi}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\varphi(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-\lambda x}x\,dx=\frac{1}{\lambda^2}\equiv\psi(\lambda).$$

Згідно з пунктом 2) теореми 2 [3, С. 560] одержимо, що для довільного числа $\lambda>0$ при $t\to+\infty$ виконується

$$\frac{\widetilde{U}\left(\frac{\lambda}{t}\right)}{tU(t)}\to\frac{1}{\lambda^2}.$$

Звідси випливає

$$\widetilde{U}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\approx\frac{tU(t)}{\lambda^2}\text{ при }t\to+\infty.$$

(7)

Враховуючи (5), з формули (7) отримаємо, що

$$\widetilde{U}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\approx\frac{t^2}{\lambda^2 m(t)}\text{ при }t\to+\infty.$$

Зробимо заміну $\frac{\lambda}{t}=y$, $\lambda,t>0$. Зауважимо, що якщо $t\to+\infty$, то $y\to0$. Тоді матимемо

$$\widetilde{U}(y)\approx\frac{1}{y^2 m\left(\frac{\lambda}{y}\right)}\text{ при }y\to0. \tag{8}$$

Оскільки $m=m\left(\frac{1}{y}\right)$ – повільно змінна функція на нескінченності, то $m\left(\frac{\lambda}{y}\right)\approx m\left(\frac{1}{y}\right)$ при $y\to0$. Зауважимо, що $\frac{1}{m\left(\frac{1}{y}\right)}$ теж є повільно змінною функцією на нескінченності. Отже, з формули (8) випливає, що функція $\widetilde{U}=\widetilde{U}(y)$, $y>0$, є правильно змінною в нулі з показником -2. Звідси $\widetilde{U}=\widetilde{U}\left(\frac{\lambda}{t}\right)$, $\lambda,t>0$, є правильно змінною функцією в нулі з показником -2. Теорему доведено.

Зауваження 2. Якщо виконується умова (5), то за абелевою теоремою [4, с. 511] для перетворення Лапласа міри відновлення маємо, що

$$\hat{U}(\tau) \approx \frac{1}{\tau m\left(\frac{1}{\tau}\right)} \text{ при } \tau \to 0,$$

де

$$\hat{U}(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau x} U\{dx\}.$$

Висновки

В цій праці розглянуто розподіл, хвіст якого є правильно змінною функцією на нескінченності з показником -1. За умови нескінченності середнього цього розподілу встановлено, що перетворення Лапласа функції відновлення є правильно змінною функцією з показником -2.

Література

1. Erickson K.B. Strong renewal theorems with infinite mean // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – Vol. 151. – P. 263-291.
2. Anderson K.K., Athreya K.B. A renewal theorem in the infinite mean case // The Annals of Probability. – 1987.- Vol. 15, №1. – P. 388-393.
3. Якымив А.Л. Многомерные тауберовы теоремы типа Карамата, Келдыша и Литтлвуда // ДАН СССР. – 1983. – Т. 240, №3. – С. 558-561.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – 752 с.

Одержано 05.05.2009 р.