Ленюк М., Шелестовська М. Обчислення невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є- Ейлера - (Конторовича - Лєбєдєва) на декартовій осі // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 2. — С. 129-135. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.44

М.Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М.Шелестовська[2], канд. техн. Наук

[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут”
[2]Тернопільський національний економічний університет

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є–ЕЙЛЕРА–(КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) НА ДЕКАРТОВІЙ ОСІ

Обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів порівнянням розв'язків, побудованих на полярній осі з двома точками спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра, Бесселя та Ейлера методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення.

Ключові слова: *невласні інтеграли, системи диференціальних рівнянь Лежандра, Бесселя, Ейлера, гібридне інтегральне перетворення.*

M. Lenyuk, M. Shelestovska

THE CALCULATION OF INFINITE INTEGRALS BY OWN ELEMENTS OF THE HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR OF LEZHANDRA–BESSEL–EILER ON THE POLAR AXIS $r \ge R_0 > 0$

By the method of comparison of decisions, built on the arctic landmark of r ≥ of $R_0 > 0$ with the two point of interface for the separate system of differential equations of Lezhandra, Bessel and Eiler by the method of functions Caushier and by the method of the proper hybrid integral transformation, polyparametric family non-personal integrals is calculated.

Key words: *non-personal integrals, system of differential equations of Lezhandra, Bessel and Eiler, hybrid integral transformation.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді поліпараметричного невласного інтегралу, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена дана робота.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_2=\{r: r\in(-\infty, R_1)\cup(R_1, R_2)\cup(R_2,\infty); 0<R_1<R_2\}$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку Фур'є, Ейлера та (Конторовича - Лєбєдєва) для модифікованих функцій

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r), r\in(-\infty, R_1),$$

$$(B^*_{\alpha_1} - q_2^2)u_2(r) = -g_2(r),\ r\in(R_1, R_2),$$

$$(B_{\alpha_2}-q_3^2)u_3(r)=-g_3(r),\ r\in(R_2,\infty). \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk},\ j,k=1,2. \tag{2}$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Фур‘є [1] d^2/dr^2, Ейлера [1] $B_{\alpha_1}^*=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_1^2$ та (Конторовича - Лєбєдєва) [2] $B_{\alpha_2}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_2^2-\lambda^2r^2,\ 2\alpha_j+1>0,\lambda\in(0,\infty)$.

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j>0$, $\alpha_{jm}^k\ge0,\beta_{jm}^k\ge0$; $c_{1k}c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$.

Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Фур‘є $(d^2/dr^2-q_1^2)v=0$ утворюють функції $v_1=exp(-q_1r)$ та $v_2=exp(q_1r)$ [1]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha_1}^*-q_2^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_1-q_2}$ та $v_2=r^{-\alpha_1+q_2}$ [1]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\alpha_2}-q_3^2\right)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ та другого роду $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв’язків дозволяє будувати розв’язок крайової задачі (1), (2) методом функцій Коші:

$$u_1(r)=A_1e^{q_1(r-R_1)}+\int_{-\infty}^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)d\rho,$$

$$u_2(r)=A_2r^{-\alpha_1-q_2}+B_2r^{-\alpha_1+q_2}+\int_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho)g_2^*(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$

$$u_3(r)=B_3K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+\int_{R_2}^{\infty}E_3(r,\rho)g_3^*(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho,\ g_m^*(r)=r^{-2}g_m(r),m=2,3. \tag{3}$$

У рівностях (3) беруть участь функції Коші $E_j(r,\rho)$ [1,3]:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0}-E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0}=0,$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho+0}-\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \tag{4}$$

$\varphi_1(r)=1$, $\varphi_2(r)=r^{2\alpha_1+1}$, $\varphi_3(r)=r^{2\alpha_2+1}$.

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_1(r,\rho)=\frac{1}{q_1(\alpha_{11}^1q_1+\beta_{11}^1)}\begin{cases}e^{q_1(r-R_1)}\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho),-\infty<r<\rho<R_1,\\ e^{q_1(\rho-R_1)}\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r),-\infty<\rho<r<R_1,\end{cases} \tag{5}$$

У формули (5) бере участь функція

$\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho)=\alpha_{j1}^1q_1chq_1(r-R_1)-\beta_{j1}^1q_1shq_1(r-R_1),\ j=1,2.$

Введемо до розгляду функції:

$Z_{\alpha_1;jk}^{m1}(q_2,R_m)=[\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^m(\alpha_1+q_2)R_m^{-1}]R_m^{-\alpha_1-q_2},m=1,2,$

$Z_{\alpha_1;jk}^{m2}(q_2,R_m)=[\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^m(\alpha_1-q_2)R_m^{-1}]R_m^{-\alpha_1+q_2},\ j,k=1,2,$

$\Delta_{\alpha_1,jk}(q_2,R_1,R_2)=Z_{\alpha_1;j2}^{11}(q_2,R_1)Z_{\alpha_1;k1}^{22}(q_2,R_2)-Z_{\alpha_1;j2}^{12}(q_2,R_1)Z_{\alpha_1;k1}^{21}(q_2,R_2)$

$\psi_{\alpha_1;jk}^{m*}(q_2,r)=Z_{\alpha_1;jk}^{m2}(q_2,R_m)r^{-\alpha_1-q_2}-Z_{\alpha_1;jk}^{m1}(q_2,R_m)r^{-\alpha_1+q_2}.$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}\begin{cases}\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}(q_2,r)\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}(q_2,\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Psi^{1*}_{\alpha_1;12}(q_2,\rho)\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}(q_2,r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{6}$$

Визначимо функції:

$$U^{21}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)=(\alpha^2_{j2}\frac{q_3-\alpha_2}{R_2}+\beta^2_{j2})I_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_2)+\alpha^2_{j2}\lambda^2R_2I_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_2),$$

$$U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)=(\alpha^2_{j2}\frac{q_3-\alpha_2}{R_2}+\beta^2_{j2})K_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_2)-\alpha^2_{j2}\lambda^2R_2K_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_2),$$

$$\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2,\lambda r)=U^{21}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r).$$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_3(r,\rho)=-\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r), & R_2<r<\rho<\infty,\\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho), & R_2<\rho<r<\infty.\end{cases} \tag{7}$$

Повернмося до формул (3). Умови спряження (2) для визначення величин A_1,A_2,B_2,B_3 дають алгбраїчну систему із чотирьох рівнянь:

$$(\alpha^1_{j1}q_1+\beta^1_{j1})A_1-Z^{11}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)A_2-Z^{12}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)B_2=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\ j=1,2,$$

$$Z^{21}_{\alpha_1;j1}(q_2,R_2)A_2+Z^{22}_{\alpha_1;j1}(q_2,R_2)B_2-U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda,R_2)B_2=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23}. \tag{8}$$

В алгебраїчній системі (8) беруть участь функції

$$G_{12}=c_{11}\int_{-\infty}^{R_1}\frac{e^{q_1(\rho-R_1)}}{\alpha^1_{j1}q_1+\beta^1_{j1}}g_1(\rho)d\rho+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,$$

$$G_{23}=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{\infty}\frac{K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}[4]:\delta_{12}=0,\delta_{22}=1.$

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1;j}=(\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11})\Delta_{\alpha_1;2j}(q_2,R_1,R_2)-(\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21})\Delta_{\alpha_1;1j}(q_2,R_1,R_2)$$

$$B_{(\alpha);j}(q)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Delta_{\alpha_1;j1}(q_2,R_1,R_2)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Delta_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1,R_2),$$

$$\theta_{\alpha_1;1}(r,q)=(\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11})\Psi^{1*}_{\alpha_1;22}(q_2,r)-(\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21})\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}(q_2,r),$$

$$\theta_{(\alpha);2}(r,q)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Psi^{2*}_{\alpha_1;21}(q_2,r)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}(q_2,r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1),(2): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1,q_2,q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (8)

$$\begin{aligned}\Delta_{(\alpha)}(q)&\equiv(\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11})B_{(\alpha);2}(q)-(\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21})B_{(\alpha);1}(q)=\\&=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)A_{\alpha_1;1}-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)A_{\alpha_1;2}\neq0,\\&(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),q=(q_1,q_2,q_3).\end{aligned} \tag{9}$$

Визначимо головні розв‘язки крайової задачі (1),(2):

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{B_{(\alpha);2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)};\ \mathcal{R}^1_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{B_{(\alpha);1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)};$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)},\ \mathcal{R}^1_{(\alpha);22}(r,q)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)},$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);11}(r,q)=-\frac{\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}Q_{(\alpha);2}(r,q);\ \mathcal{R}^2_{(\alpha);21}(r,q)=\frac{\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}Q_{(\alpha);2}(r,q); \tag{10}$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);12}(r,q) = -\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)} Q_{\alpha_1;1}(r,q),\ \mathcal{R}^2_{(\alpha);22}(r,q) = \frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)} Q_{\alpha_1;1}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);11}(r,q) = -\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}} \frac{\alpha^1_{21}q_1 + \beta^1_{21}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),\ \mathcal{R}^3_{(\alpha);21}(r,q) = \frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}} \frac{\alpha^1_{11}q_1 + \beta^1_{11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);12}(r,q) = \frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),\ \mathcal{R}^3_{(\alpha);22}(r,q) = -\frac{A_{\alpha_1;1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

2) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\alpha);11}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_1\Delta_{(\alpha)}(q)} \begin{cases} e^{q_1(r-R_1)}[B_{(\alpha);2}\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1\rho) - B_{(\alpha);1}\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1\rho), -\infty < r < \rho < R_1, \\ e^{q_1(\rho-R_1)}[B_{(\alpha);2}\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1\rho) - B_{(\alpha);1}\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1\rho), -\infty < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)} e^{q_1(r-R_1)} Q_{(\alpha);2}(\rho,q),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);13}(r,\rho,q) = \frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)} e^{q_1(r-R_1)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} e^{q_1(\rho-R_1)} Q_{(\alpha);2}(r,q), \tag{11}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_2\Delta_{(\alpha)}(q)} \begin{cases} Q_{\alpha_1;1}(r,q)Q_{(\alpha);2}(\rho,q),\ R_1 < r < \rho < R_2 \\ Q_{\alpha_1;1}(\rho,q)Q_{(\alpha);2}(r,q),\ R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases},$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);23}(r,\rho,q) = \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)} \theta_{\alpha_1;1}(\rho,q) K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);31}(r,\rho,q) = \frac{2q_2c_{12}c_{11}}{R_2^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)} e^{q_1(\rho-R_1)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);32}(r,\rho,q) = \frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)} \theta_{\alpha_1;1}(\rho,q) K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);33}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} \begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)[A_{\alpha_1;2}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3r) - A_{\alpha_1;1}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3r), R_2 < r < \rho < R_1 \\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)[A_{\alpha_1;2}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3\rho) - A_{\alpha_1;1}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3\rho), R_2 < \rho < r < R_1 \end{cases}.$$

У результаті однозначної розв‘язності алгебраїчної системи (8) за правилами Крамера [4] й підстановки обчислених значень величин A_1, A_2, B_2, B_3 у формули (3) маємо єдиний розв‘язок крайової задачі (1),(2):

$$u_j(r) = \sum_{k,m=1}^{2} \mathcal{R}^j_{(\alpha);km}(r,q)\omega_{km} + \int_{-\infty}^{R_1} H_{(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)d\rho +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} H_{(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \int_{R_2}^{\infty} H_{(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j = \overline{1,3}. \tag{12}$$

Побудуємо тепер розв’язок крайової задачі (1),(2) методом гібридного інтегрального перетворення (ГІП), породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{(\alpha)} = \theta(R_1 - r)\, d^2\!\big/ dr^2 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B^*_{\alpha_1} + \theta(r - R_2)B_{\alpha_2}, \tag{13}$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

Оскільки ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ самоспряжений і має на множині I_2 одну особливу точку $r = -\infty$, то його спектр дійсний й неперервний [5]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0.\infty)$. Йому відповідає спектральна вектор – функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta)$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідні диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned}
&(d^2/dr^2+b_1^2)V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ r\in(-\infty,R_1),\\
&(B^*_{\alpha_1}+b_2^2)V_{(\alpha);2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2),\\
&(B_{\alpha_2}+b_3^2)V_{(\alpha);3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty),
\end{aligned}\tag{14}$$

та однорідні умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)V_{(\alpha);k}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0,\ j,k=1,2,\tag{15}$$

$b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2},\ k_j^2\geq 0,\ j=\overline{1,3}.$

Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Фур‘є $(d^2/dr^2+b_1^2)v=0$ утворюють функції $\cos b_1r$ та $\sin b_1r$ [1]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1}+b_2^2)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r)$ [2]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння (Конторовича - Лєбєдєва) $(B_{\alpha_2}+b_3)u=0$ утворюють функції Бесселя $C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [2].

Якщо покласти

$$\begin{aligned}
&V_{(\alpha);1}(r,\beta)=A_1\cos b_1r+B_1\sin b_1r,\\
&V_{(\alpha);2}(r,\beta)=A_2r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r),\\
&V_{(\alpha);3}(r,\beta)=B_3D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3).
\end{aligned}\tag{16}$$

то умови спряження (15) дають алгебраїчну систему:

$$\begin{aligned}
&v_{j1}^{11}(b_1R_1)A_1+v_{j1}^{12}(b_1R_1)B_1-Y_{\alpha_1;j2}^{11}(b_2,R_1)A_2-Y_{\alpha_1;j2}^{12}(b_2,R_1)B_2=0,\\
&Y_{\alpha_1;j1}^{21}(b_2,R_2)A_2+Y_{\alpha_1;j1}^{22}(b_2,R_2)B_2-X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2,b_3)B_3=0,\ j=1,2.
\end{aligned}\tag{17}$$

У системі (17) беруть участь функції:

$$v_{j1}^{11}(b_1R_1)=\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)\cos b_1r\Big|_{r=R_1},\ v_{j1}^{12}(b_1R_1)=\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)\sin b_1r\Big|_{r=R_1},$$

$$Y_{\alpha_1;jk}^{m1}(b_2,R_m)=\left(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m\right)r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)\Big|_{r=R_m};$$

$$Y_{\alpha_1;jk}^{m2}(b_2,R_m)=\left(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m\right)r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r)\Big|_{r=R_m};$$

$$X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2,b_3)=[(\alpha_{j2}^2\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^2)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)]\Big|_{r=R_2}.$$

У результаті стандартного розв‘язання алгебраїчної системи (17)[5] й підстановки одержаних значень A_j та $B_k(j=1,2;k=\overline{1,3})$ у рівності (16) одержуємо функції:

$$\begin{aligned}
&V_{(\alpha);1}(r,\beta)=\omega_{(\alpha);2}(\beta)\cos b_1r-\omega_{(\alpha);1}(\beta)\sin b_1r,\\
&V_{(\alpha);2}(r,\beta)=c_{11}b_1[X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2,b_3)\Psi_{\alpha_1;21}^2(b_2,r)-X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2,b_3)\Psi_{\alpha_1;11}^2(b_2,r)],\\
&V_{(\alpha);3}(r,\beta)=c_{11}b_1\frac{c_{12}b_2}{R_2^{2\alpha_1+1}}D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3).
\end{aligned}\tag{18}$$

У рівностях(18) прийняті позначення:

$$\Psi^2_{\alpha_1;i1}(b_2,r)=Y^{22}_{\alpha_1;i2}(b_2,R_2)r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)-Y^{21}_{\alpha_1;i1}(b_2,R_2)r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r),$$
$$b_{(\alpha);j}(\beta)=X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\delta_{\alpha_1;j2}(\beta)-X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\delta_{\alpha_1;j1}(\beta),$$
$$\delta_{\alpha_1;jk}(\beta)=Y^{11}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_1;k1}(b_2,R_2)-Y^{12}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_1;k1}(b_2,R_2),$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta)=b_{(\alpha);1}(\beta)v^{1j}_{21}(b_1R_1)-b_{(\alpha);2}(\beta)v^{1j}_{11}(b_1R_1);\ j,k=1,2.$$

Визначимо спектральну щільність
$$\Omega_{(\alpha)}(\beta)=\beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2+[\omega_{(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$$
та вагову функцію
$$\sigma(r)=\sigma_1\theta(R_1-r)+\sigma_2 r^{2\alpha_1-1}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}\theta(r-R_2),$$
$$\sigma_1=1,\sigma_2=\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{1}{R_1^{2\alpha_1+1}},\sigma_3=\frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_2^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}}.$$

Наявність спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ функції, спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ та вагової функції $\sigma(r)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{(\alpha)}$ ГІП, породжене на множині I_2 ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ [6]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde g(\beta), \tag{19}$$

$$H^{-1}_{(\alpha)}[\tilde g(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde g(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r). \tag{20}$$

Тут $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$-функція з області G визначення ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$.

Єдиний розв'язок крайової задачі (1),(2), побудований за відомою логічною схемою [7] методом ГІП, запровадженого формулами (19),(20), має структуру:

$$\begin{aligned}u_j(r)=&\int_{-\infty}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q^2}\right)g_1(\rho)\sigma_1d\rho+\\&+\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q^2}\right)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}\sigma_2d\rho+\\&+\int_{R_2}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q^2}\right)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}\sigma_3d\rho+\\&+\sum_{k=1}^{2}h_k[(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{(\alpha);j}(r,\beta)Z^k_{(\alpha);12}(\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta)\omega_{2k}-(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{(\alpha);j}(r,\beta)Z^k_{(\alpha);22}(\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta)\omega_{1k}],\end{aligned} \tag{21}$$

Тут беруть участь величини та функції
$q^2=\max\{q_1^2;\ q_2^2;q_3^2\},\ h_1=\sigma_1c_{11}^{-1},h_2=\sigma_2R_2^{2\alpha_1+1}c_{12}^{-1},$
$Z^k_{(\alpha);j2}(\beta)=(\alpha^k_{j2}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^k_{j2})V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k},\ j,k=1,2.$

Порівнюючи розв'язки (12) та (21) в силу єдиності, маємо низку формул обчислення невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta=\frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}_{(\alpha);jk}(r,\rho,q),\ j,k=\overline{1,3}, \tag{22}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}Z^k_{(\alpha);12}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta=\frac{1}{h_k}\mathcal{R}^j_{(\alpha);2k}(r,q),k=1,2,j=\overline{1,3} \tag{23}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}Z^k_{(\alpha);22}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta=-\frac{1}{h_k}\mathcal{R}^j_{(\alpha);1k}(r,q),k=1,2,j=\overline{1,3}, \tag{24}$$

Функції впливу $\mathcal{H}_{(\alpha);\,jk}(r, \rho, q)$ визначені формулами (11), а функції Гріна $\mathcal{R}^{j}_{(\alpha);km}(r,q)$ – формулами (10).

Якщо $q^2 = q_1^2$, то $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = q_1^2 - q_2^2$, $k_3^2 = q_1^2 - q_3^2$. У цьому випадку $b_1 = \beta$, $b_2 = (\beta^2 + q_1^2 - q_2^2)^{1/2}$, $b_3 = (\beta^2 + q_1^2 - q_3^2)^{1/2}$.

Якщо $q^2 = q_2^2$, то $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = 0$, $k_3^2 = q_2^2 - q_3^2 \ge 0$. У цьому випадку $b_1 = (\beta^2 + q_2^2 - q_1^2)^{1/2}$, $b_2 = \beta$, $b_3 = (\beta^2 + q_2^2 - q_3^2)^{1/2}$.

Якщо $q^2 = q_3^2$, то $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = 0$. У цьому випадку $b_1 = (\beta^2 + q_3^2 - q_1^2)^{1/2}$, $b_2 = (\beta^2 + q_3^2 - q_2^2)^{1/2}$, $b_3 = \beta$.

Зауваження. Оскільки праві частини в рівностях (22)-(24) не залежать від нерівностей $(q_j^2 - q_m^2) \ge 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = q_0^2 > 0$, звужуючи при цьому сім‘ю невласних інтегралів.

Підсумком викладеного вище є твердження.

Теорема. Нехай вектор-функція $f(r)=\{ g_1^{//}(r); B^*_{\alpha_1}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови обмеження

$$\lim_{r\to-\infty}\left(\frac{dg_1}{dr}V_{(\alpha);1} - g_1(r)\frac{d}{dr}V_{(\alpha);1}\right) = 0;\quad r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3} - g_3(r)\frac{d}{dr}V_{(\alpha);3}\right) = 0$$

та умови спряження (2).Якщо при цьому виконується умова (9) однозначної розв’язності крайової задачі (1), (2), то справджуються формули (22) – (24) обчислення поліпараметричної сім‘ї невласних інтегралів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (13).

Висновок. Формули (22)-(24) визначають достатньо багату сім‘ю невласних інтегралів, поповнюючи довідкову математичну літературу.

Література

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
2. Ленюк М.П., Міхалевська Г. І. Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1971.-432с.
5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур’є, Бесселя, Лежандра). Частина 1.–Тернопіль: Економічна думка, 2004.– 368 с.
6. Ленюк М.П.,Янчишин М. Л. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур’є, Конторовича-Лєбєдєва)- Лежандра.- Чернівці: Прут, 2002. – 76 с.
7. Ленюк М.П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур’є, Бесселя, Лежандра). Том V. – Чернівці: Прут, 2005. – 368с.

Одержано 25.03.2009 р.