УДК 539.3

Віктор Опанасович, Ігор Яцик
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ МЕЖЕЮ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ ТА ДВОМА ТРІЩИНАМИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ ДО НЕЇ, ЗА ЗГИНУ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Viktor Opanasovych, Ihor Yatsyk

ABOUT ONE APPROACH TO STRESS-STRAIN STATE RESEARCH OF PLATE WITH MATERIALS SEPARATION RECTILINEAR BARRIER AND TWO CRACKS PERPENDICULAR TO IT UNDER BENDING IN VIEW OF THEIR FACES CONTACT ZONE WIDTH

У праці досліджена задача про згин кусково-однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів L рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності M_y^∞ й $M_{x_j}^\infty$, $j=1,2$, коли в кожній із півплощин наявна прямолінійна тріщина завдовжки $2l_j$, причому вони перпендикулярні до L і лежать на одній прямій (рис. 1). Вважаємо, що до деформування пластини береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності вони зазнають гладкого контакту поблизу верхньої основи пластини по всій довжині тріщини, причому ширина області контакту стала та дорівнює h_1.

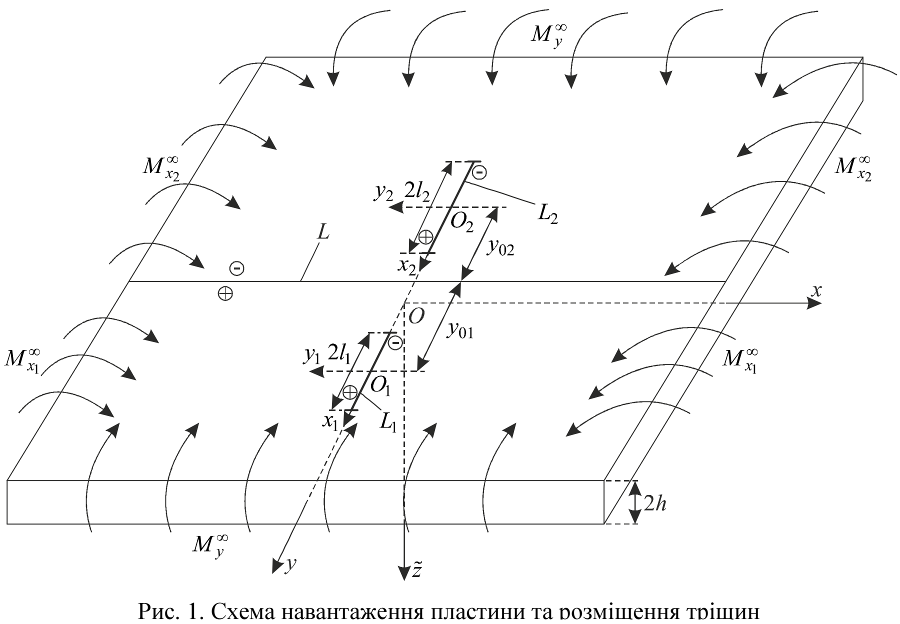

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Виберемо глобальну декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини, спрямувавши вісь Ox уздовж L, а вісь Oy – уздовж тріщин. З кожною тріщиною зв'яжемо локальну систему координат $O_jx_jy_j$ з початком координат O_j у центрі тріщини, направивши вісь O_jx_j уздовж тріщини. Відрізок дійсної осі O_jx_j, для якого $|x_j| \le l_j$, позначимо через L_j, а через y_{0j} – відстань від центру j-ї тріщини до межі поділу матеріалів. Граничним значенням відповідних величин при $y_j \to \pm 0$ або $y \to \pm 0$ будемо приписувати символи «$\pm$».

Надалі використовуємо такі позначення: $\partial_x = \partial/\partial x$; N_j – контактне зусилля між берегами j-ї тріщини; σ_{yy} і σ_{xy} та u і v – відповідно компоненти тензора напружень та проекції вектора переміщення точки на осі Ox і Oy у плоскій задачі, $P = Q_y + \partial_x H_{xy}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила, M_y – згинальний момент; w – прогин пластини; $\alpha = \left\{1 + (1-\gamma)^2\right\}/2$; $\beta = 1 - \gamma/3$; $\gamma = h_1/h$.

За рахунок контакту берегів тріщини задачу розбиваємо на дві задачі: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини, причому користуємося класичною теорією згину пластини.

Згідно формулювання задачі на берегах тріщини маємо такі крайові умови

$$\sigma^{\pm}_{y_j y_j} = -N_j/(2h),\ \sigma^{\pm}_{x_j y_j} = 0,\ P^{\pm}_j = 0,\ M^{\pm}_{y_j} = \beta h N_j,\ \left[\partial_{x_j} v_j\right] + \alpha h\left[\partial^2_{x_j y_j} w\right] = 0,\ x_j \in L_j,$$

де квадратні дужки означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

На межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma^{(1)}_y - i\sigma^{(1)}_{xy} = \sigma^{(2)}_y - i\sigma^{(2)}_{xy}, \qquad u^{(1)} + iv^{(1)} = u^{(2)} + iv^{(2)}, \qquad \left(\partial_x w + i\partial_y w\right)^+ = \left(\partial_x w + i\partial_y w\right)^-,$$
$$\left(M_y + iP\right)^+ = \left(M_y + iP\right)^-,\ x \in L.$$

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

Використовуючи комплексні потенціали плоскої задачі теорії пружності і класичної теорії згину пластин та методи теорії функцій комплексної змінної, розв’язок задачі зведений до системи лінійних алгебричних рівнянь відносно $X_{j,k}$ – коефіцієнтів розвинення стрибка кутів повороту на берегах тріщин у ряд за поліномами Чебишева першого роду

$$D_{1j} X_{jn} + \sum_{k=1}^{M}\left(X_{j,k} S_{jkn} + X_{3-j,k} B_{jkn}\right) = -\delta_{1n},\ n = \overline{1,M}.$$

Тут $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j; \end{cases}$ $S_{jkn} = 2/(N+1)\sum_{m=1}^{N}\sin^2\left\{\pi m/(N+1)\right\} \mathrm{f}_{jk}(t_m)\mathrm{U}_{n-1}(t_m)$; $B_{jkn} = 2/(N+1)\sum_{m=1}^{N}\sin^2\left\{\pi m/(N+1)\right\} \mathrm{g}_{jk}(t_m)\mathrm{U}_{n-1}(t_m)$; $N = 2M$; $t_m = \cos\left\{\pi m/(N+1)\right\}$, $m = \overline{1,N}$; $\mathrm{U}_{n-1}(x) = \sin(n\arccos x)/\sqrt{1-x^2}$; $\mathrm{f}_{jk}(x)$ і $\mathrm{g}_{jk}(x)$, $k = \overline{1,M}$, та D_{1j} – відомі дійсні функції та сталі.

Зведені коефіцієнти інтенсивності моментів $K^{*\pm}_{1çj}$ обчислюємо за формулою

$$K^{*\pm}_{1çj} = \pm 2\left(3 + \nu_j\right)/\left\{3\left(1 - \nu_j^2\right)\right\}\sum_{k=1}^{M}(\pm 1)^k X_{j,k},$$

де ν_j – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини, в якому знаходиться j-а тріщина; символи «$\pm$» відповідають вістрю тріщини $x_j = \pm l_j$.

Числова реалізація запропонованого підходу до розв’язку задачі показала стійкість числової схеми при досить близькому наближенні тріщин до межі поділу матеріалів. Проаналізовано значення контактного зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності моментів і критичного навантаження, при якому відбувається руйнування пластини, причому при деякому значенні параметрів задачі можливе відставання берегів тріщин.