

УДК 621.867.42

**Ів. Гевко, канд. техн. наук**

*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНИХ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ШНЕКА**

***Резюме.** Проведено аналіз динамічного процесу експлуатації шнека із урахуванням його обертального руху. Розглянуто автономний та неавтономний випадки його коливань. Для останнього розглянуто найважливіший із теоретичного боку випадок резонансних коливань. На базі аналізу отриманих теоретичних результатів запропоновано різні режими експлуатації шнека – робочий та режим «розвантаження». Перший застосовується безпосередньо для виконання основного призначення шнекової машини – технологічного процесу переміщення, змішування, сепарації, адгезії сипких та в'язких матеріалів; другий (допоміжний) – для звільнення робочого органу шнека від налипання на нього матеріалів.*

***Ключові слова:** шнек, коливання, частота, амплітуда, сила, динамічний процес.*

**Iv. Gevko**

## **MATHEMATICAL MODEL OF THE SCREW NONLINEAR BEND VIBRATIONS**

***Summary.** The dynamic process of a screw taking into account the rotary motion around immovable axis is analyzed. The autonomous and non-autonomous cases of its vibrations are considered. For non-autonomous cases the resonance vibrations are considered to be the most important ones from the theoretical point of view. On the basis of the obtained theoretical results, different screw operating modes are proposed – operating mode and standby one. The former is used just for fulfilling the basic task of the screw machine – the technological process of transporting and mixing the granular and viscous materials; the latter (auxiliary) – for releasing the screw working organ from the materials being stuck on it.*

*To achieve the objectives being set in this subsection:*

- 1) The nonlinear differential equation of bend vibrations of the screw rotating with a constant angular speed is developed (mathematical model of dynamic process). The latter is the quasi-linear equation with the partial derivatives and the relevant boundary conditions;*
- 2) The technique of analytical solution of mathematical model of screw dynamic process is developed. It is based on the principle of realization of vibrations of one frequency in the nonlinear mechanical systems and asymptotic methods of nonlinear mechanics;*
- 3) On the basis of the developed technique the universal differential equations determining the principles of changing the basic characteristics of screw dynamic process are obtained in a parameterized form. They are suitable for engineering calculations on the stage of improving the available screw machines as well as of planning the new ones;*
- 4) Analyzing the former ones, the conditions of screw resonance vibrations are obtained in particular; the main peculiarities of the dynamic process in transition the systems through resonance are revealed;*
- 5) The practical recommendations concerning the operation activity of screw transport and technological mechanisms are given.*

***Key words:** screw, vibration, frequency, amplitude, force, dynamic process.*

**Умовні позначення:**

*S* – поздовжня стискаюча сила у перерізі з координатою *x*, Н;

$S + \frac{\partial S}{\partial x} dx$  – поздовжня стискаюча сила у перерізі з координатою  $x + dx$ , Н;

$M$  – згинаючий момент у перерізі з координатою  $x$ , Нм;

$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$  – згинаючий момент у перерізі з координатою  $x + dx$ , Нм;

$Q$  – перерізує зусилля у перерізі з координатою  $x$ , Н;

$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$  – перерізує зусилля у перерізі з координатою  $x + dx$ , Н;

$\theta_1$  – кут нахилу, який з віссю OX утворює дотичну до середньої лінії нормальних перерізів з координатою  $x$ , град.;

$\theta_2$  – кут нахилу, який з віссю OX утворює дотичну до середньої лінії нормальних перерізів з координатою  $x + dx$ , град.;

$q$  – рівнодійна зовнішніх сил у площині OXZ, Н;

$dq$  – складова рівнодійної зовнішніх сил у площині OXZ, які діють на умовно виділений елемент шнека, Н;

$u$  – величина згинної деформації шнека, м;

$m(x)dx$  – маса умовно виділеного елемента шнека ( $m(x)$  – закон розподілу погонної маси вздовж довжини шнека), кг;

$\Omega$  – кутова швидкість обертання шнека,  $c^{-1}$ ;

$E$  – модуль пружності першого роду,  $H/m^2$ ;

$\epsilon$  – величина логарифмічної деформації матеріалу шнека;

$a_z = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  – проекція відносного пришвидшення центру виділеного елемента на вісь OZ, м;

$\Omega^2 u$  – пришвидшення переносного руху центру умовно виділеного елемента,  $m/c^2$ ;

$F(x)$  – закон зміни площі поперечного перерізу шнека вздовж його довжини,  $m^2$ ;

$EI(x)$  – жорсткість шнека на згин,  $H \cdot m^2$ ;

$I_0$  – початкове значення моменту інерції шнека,  $m^4$ ;

$S_0$  – початкове значення поздовжньої стискаючої сили, Н;

$k_1, k_2$  – відомі коефіцієнти, причому  $|\mu k_1|, |\mu k_2| \ll 1$ ;

$l$  – відстань між підшипниками, м;

$C_1, C_2$  – сталі, м;

$v$  – хвильове число, рад/м;

$\omega$  – частота хвильового процесу,  $c^{-1}$ ;

$\varphi, \psi$  – початкові фази хвиль, рад;

$b$  – амплітуда згинних коливань шнека, м;

$\bar{\Omega}$  – критична швидкість обертання шнека,  $c^{-1}$ ;

$h$  – амплітуда зовнішнього періодичного збурення, м;

$\Xi$  – частота зовнішнього періодичного збурення,  $c^{-1}$ ;

$\gamma, \gamma_0$  – відповідно фаза та початкова фаза вимушених коливань, рад;

$p$  – коефіцієнт пропорційності;

$U_1(b, x, \mathcal{G}, \gamma)$  –  $2\pi$  періодична по  $\mathcal{G}$  та  $\gamma$  функція, що не містить перших гармонік  $\mathcal{G}$ ;

$\Delta$  – різниця фаз власних та вимушених коливань, тобто  $\Delta = q(\omega t + \varphi) - p\gamma$ , рад.

**Постановка проблеми.** Гвинтові транспортно-технологічні системи використання у різних галузях промисловості й на підприємствах вони часто відіграють провідну роль у забезпеченні комплексної механізації праці. Від правильного вибору раціональних типів механізмів і параметрів роботи залежить їх високопродуктивна робота, а також продуктивність дільниць, цехів і підприємств загалом. Тому для

забезпечення високої продуктивності та якості виконання технологічних процесів гвинтовими транспортно-технологічними механізмами машин необхідно досліджувати і на практиці використовувати режими експлуатації з амплітудами коливань у нерезонансній та резонансній зонах.

**Аналіз відомих досліджень і публікацій.** Основи проектування та дослідження гвинтових конвеєрів заклали такі вчені, як Х. Герман, А. Віденбаум, Р. Мор, М. Данквертс, Д. Лейсі, Ю.І. Марков, А.М. Ластовцев, Г. Шенкель, А.М. Григор'єв, В. Штербачек, Г.Г. Кошелєв, Р.В. Торнер, М.В. Тебін, Д. Мак-Кельві, Б.М. Гевко, Р.М. Рогатинський та інші. Розвитку теорії коливань присвячені праці І.М. Бабакова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольського, Г. Каудерера, Н.С. Кошлякова, Е.Б. Глінера, М.М. Смірнова, Д. Коул, Г.С. Писаренко, Д. Уизем [1–8]. Проте питанням дослідження режимів експлуатації гвинтових робочих органів з амплітудами коливань у нерезонансній та резонансній зонах, з метою отримання високої продуктивності та якості виконання транспортно-технологічного процесу і надійності гвинтових транспортно-технологічних систем, на сьогодні недостатньо приділено уваги, що зумовлює потребу в подальших дослідженнях.

**Метою роботи** є дослідження роботи гвинтового робочого органу (шнека) з амплітудами коливань у нерезонансній та резонансній зонах, з метою отримання ефективних режимів експлуатації для забезпечення надійності шнекових механізмів і високої продуктивності.

**Результати досліджень.** Базою для отримання диференціального рівняння, яке описує згинні коливання шнека, є його фізична модель. За останню приймемо пружне тіло, яке обертається навколо осі зі сталою кутовою швидкістю  $\Omega$ . Вважатимемо, що площа поперечного перерізу, погонна маса, момент інерції є змінними величинами вздовж осі шнека.

Для побудови математичної моделі, яка відповідає технологічному процесу використання шнека, виберемо рухому декартову систему координат  $OXYZ$  так, щоб вісь  $OX$  проходила через центр мас перерізу шнека у недеформованому його положенні. Позначимо  $u(x,t)$  – відхилення у площині  $OXZ$  перерізу шнека з координатою  $x$  у довільний момент часу  $t$ . Площина  $OXZ$  вважається незмінно зв'язаною із площиною максимального його прогину. Умовно виріжемо у довільному положенні елемент шнека довжиною  $dx$  (рис. 1) та покажемо сили, які діють на нього.

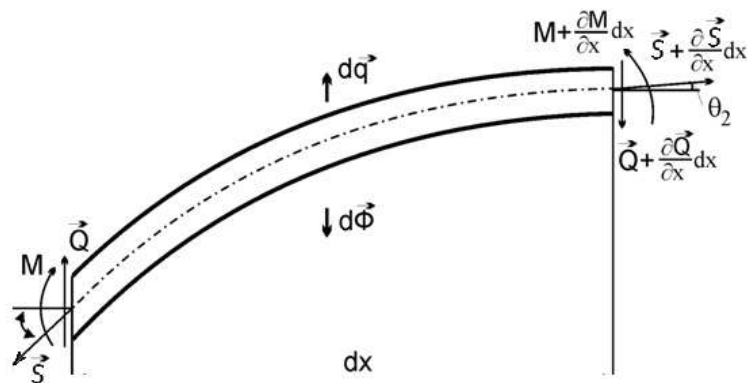


Рисунок 1. Схема сил, які діють на елемент шнека при його згинних коливаннях

Figure 1. Chart of forces influencing the screw element under its bending vibrations

Вважаючи вказаний елемент як завгодно малим та нехтуючи інерцією його обертання, диференціальне рівняння його відносного руху набуде вигляду

$$-S \sin \theta_1 - \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \left( S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \sin \theta_2 + \Omega^2 um(x)dx + q(u, x, t)dx = m(x)a_z dx \quad (1)$$

Враховуючи, що для малих коливань розглядуваного елемента шнека  $\frac{\partial u}{\partial x}$  і  $\theta_2$  будуть також малими величинами, то має місце співвідношення [1]  $\sin \theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\sin \theta_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ . Крім цього, беручи до уваги зв'язок між перерізуючою силою та згинальним моментом для стисненої балки  $Q = \left( \frac{dM}{dx} - S \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ , рівняння (1) набуває вигляду

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( M - S(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m(x) \Omega^2 u = q(u, x, t). \quad (2)$$

Нехай пружні властивості матеріалу задовольняють нелінійному технічному закону пружності [3]  $\sigma = E(\varepsilon + \mu \varepsilon^3)$ , де параметр  $\mu$  характеризує їх відхилення від лінійного закону. Тут і нижче будемо вважати його малим у порівнянні із  $E$ . Тоді рівняння (3.2) матиме вигляд

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(x) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 \right) - \frac{S(x) \partial^2 u}{F(x) \partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m(x) \Omega^2 u = q(u, x, t), \quad (3)$$

При розгляді коливань у випадку встановленого динамічного процесу  $\Omega$  слід вважати сталою величиною. У випадку перехідних процесів дотична складова відносного пришвидшення (як і поворотне пришвидшення) напрямлена перпендикулярно до осі OZ, а отже їх слід враховувати у диференціальному рівнянні обертального руху шнека.

Для більшості транспортно-технологічних процесів, що виконуються за допомогою шнекових механізмів з сипкими чи в'язкими матеріалами, можна вважати, що момент інерції шнека та поздовжня сила стиску, яка діє на нього, повільно змінюються вздовж його осі. Не зменшуючи загальності, вважатимемо площу його поперечного перерізу сталою, а закони зміни моменту інерції шнека та поздовжньої сили стиску лінійними, тобто

$$I(x) = I_0(1 + \mu k_1 x), \quad S(x) = S_0(1 + \mu k_2 x), \quad (4)$$

Відповідно до цього закону прийматимемо розподіл погонної маси шнека

$$m(x) = m_0(1 + \mu k_3 x), \quad |\mu k_3| \ll 1. \quad (5)$$

Наведене вище дозволяє диференціальне рівняння (3) записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{I_0}{m_0} \left( E - \frac{S_0}{F} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{S_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Omega^2 u = \mu f(x, t, u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}), \quad (6)$$

$$\text{де } \mu f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) = (1 - k_3 x) \frac{1}{m_0} \left[ q(u, x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( Ekx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_0 k_2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - EI_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 - \frac{\partial}{\partial x} \left( S_0 k_2 x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right].$$

Для рівняння (6) добуємо крайові умови, які узгоджуються із способом закріплення шнека на кінцях. Шнек обертається у підшипниках, тому крайові умови набувають вигляду

$$u(x, t)|_{x=j} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=j} = 0, j = 0, l. \quad (7)$$

Враховуючи, що права частина рівняння, яке описує коливання шнека, пропорційна малому параметру  $\mu$ , то для побудови його розв'язку використаємо загальну ідею асимптотичних методів нелінійної механіки [2, 5 – 7]. Відповідно до неї розглянемо спочатку незбурене ( $\mu = 0$ ) рівняння, яке відповідає (6), тобто лінійне рівняння

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{I_0}{m_0} \left( E_0 - \frac{S_0}{F} \right) \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \frac{S_0}{m_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \Omega^2 u_0 = 0 \quad (8)$$

за однорідних крайових умов, які випливають із (7), а саме:

$$u_0(x, t)|_{x=j} = 0, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}|_{x=j} = 0. \quad (9)$$

Покажемо, що динамічний процес у цьому випадку можна трактувати як накладання двох хвиль (прямої та відбитої) однакових довжин і частот, тобто

$$u_0(x, t) = C_1 \cos(\nu x + \omega t + \varphi) + C_2 \cos(\nu x - \omega t + \psi). \quad (10)$$

Представлення розв'язку у вигляді (10) не суперечить загальній ідеї Д'Аламбера [4] побудови розв'язків рівнянь гіперболічного типу і воно [8, 9] в останні роки набуло широкого застосування для дослідження динамічних процесів систем із розподіленими параметрами. Такий опис динамічного процесу в довгомірних системах із розподіленими параметрами (на відміну від методу Ейлера) має обґрунтовану фізичну інтерпретацію.

Якщо представлення (8) правомірне, то:

по-перше, воно повинно задовольняти вказаному рівнянню, а це еквівалентно тому, що хвильове число  $\nu$  та частота хвильового процесу  $\omega$  зв'язані дисперсійним співвідношенням

$$\omega^2 - (I_0 / m_0) (E_0 - S_0 / F) \nu^4 + (S_0 / m_0) \nu^2 + \Omega^2 = 0; \quad (11)$$

по-друге, мають справджуватись крайові умови (9).

Крайові умови для  $x = 0$  будуть справджуватись, якщо тригонометрична залежність

$$C_1 \cos(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(-\omega t + \psi) = 0 \quad (12)$$

перетворюється у тотожність, тобто виконується для довільного моменту часу  $t$ . Це дозволяє знайти зв'язок між початковими фазами хвиль  $\varphi + \psi = k\pi$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) та їх амплітудами  $C_1 = -C_2 = b$ .

Аналогічно справджуючи крайові умови на другому кінці шнека  $x = l$ , маємо

$$\cos(\nu l + \omega t + \varphi) - \cos(\nu l - \omega t - \varphi) = 0. \quad (13)$$

Як і (12) має справджуватись для довільного моменту часу, а це означає, що хвильове число  $\nu$  у (10) чи (13) дорівнює  $\nu = \frac{k\pi}{l}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Отримане одночасно дає змогу визначити частоту динамічного процесу як функцію фізико-механічних, кінематичних та геометричних параметрів шнека

$$\omega = \sqrt{\frac{I_0}{m_0} \left( E_0 - \frac{S_0}{F} \right) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 - \frac{S_0}{m_0} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 - \Omega^2}. \quad (14)$$

Отримані результати одночасно показують на перевагу описання динамічного процесу на базі хвильової теорії руху, ніж за допомогою методу Ейлера.

На рис. 2 представлені залежності частоти власних згинних коливань шнека від: рис. 2а – кутової швидкості його обертання; рис. 2б – відстані між опорними підшипниками; рис. 2в – поздовжньої сили стиску за таких його фізико-механічних характеристик:  $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $I_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $F = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ ,  $m_0 = 4 \cdot 10 \text{ кг/м}$ ,  $S_0 = 7 \cdot 10^2 \text{ Н}$ .

Разом із тим залежність (14) визначає критичні значення сили стиску та кутової швидкості обертання, тобто такий зв'язок між фізико-механічними характеристиками, кінематичними параметрами руху та геометричними розмірами, за яких проходить зрив коливань:

$$\bar{S}_0 = \frac{EI_0 - m_0 \Omega^2 \left( \frac{l}{k\pi} \right)^2}{\left[ 1 + \frac{I_0}{F} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \right]}, \quad (15)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{k\pi}{l\sqrt{m_0}} \sqrt{I_0 \left( E - \frac{S_0}{F} \right) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 - S_0}. \quad (16)$$

На рис. 3 представлені залежності критичної швидкості обертання  $\bar{\Omega}$  шнека від відстані між опорними підшипниками за його наступних фізико-механічних характеристиках:  $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $I_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $F = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ ,  $m_0 = 4 \cdot 10 \text{ кг/м}$ ,  $S_0 = 7 \cdot 10^2 \text{ Н}$ .

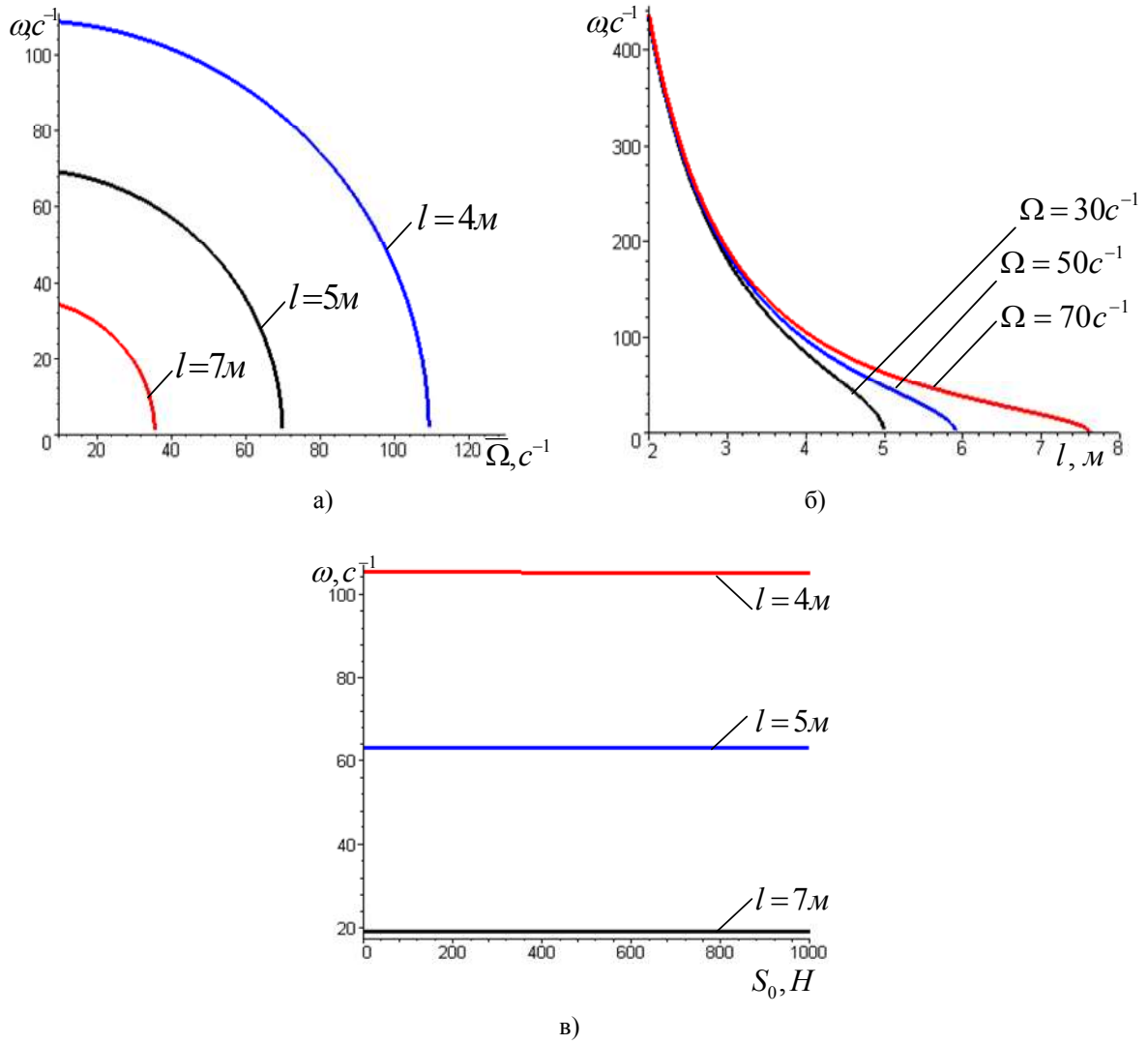


Рисунок 2. Залежності частоти власних коливань шнека від основних його характеристик

Figure 2. Dependences of the screw natural vibration frequency on its basic characteristics

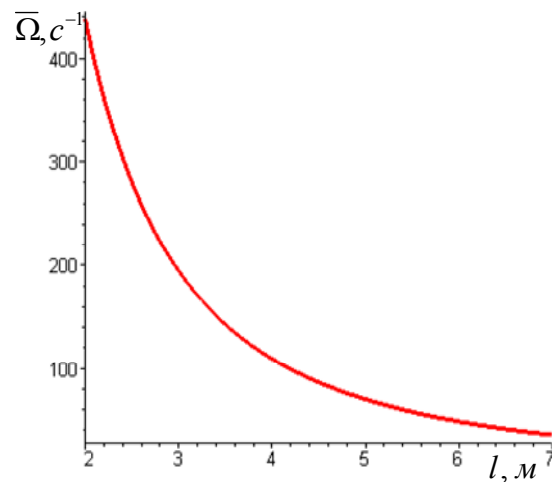


Рисунок 3. Залежність критичної швидкості обертання шнека від відстані між опорними підшипниками

Figure 3. Dependence of the screw critical rotating speed on the distance between supporting bearings

Представлені залежності показують, що вплив реально існуючої в технологічних процесах осьової складової сили тиску середовища, яке переміщає шнек, на його згинні коливання проявляється у меншій мірі, ніж його кутова швидкість обертання чи відстань між утримуючими підшипниками.

Самі ж отримані результати є також базою для дослідження впливу малих нелінійних та періодичних сил на динаміку процесу. Спочатку розглянемо простіший автономний випадок, який передбачає відсутність зовнішнього періодичного збурення,

$$\left(\mu f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\right) = \mu f_1\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right). \quad \text{Для цього,}$$

розвиваючи ідею асимптотичного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь [6], перше наближення його асимптотичного розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = b(\cos(\nu l + \omega t + \varphi) - \cos(\nu l - \omega t - \varphi)) + \mu U_1(a, x, \vartheta), \quad (17)$$

де  $U_1(a, x, \vartheta) - 2\pi$  – періодична по  $\vartheta = \omega t + \varphi$  функція і задовольняє однорідні крайові умови

$$U_1(a, x, \vartheta)|_{x=j} = \frac{\partial^2 U_1(a, x, \vartheta)|_1}{\partial x^2}|_{x=j} = 0. \quad (18)$$

Крім цього, нелінійні сили автономного типу є причиною того, що для розглядуваного випадку амплітуда та фаза коливань шнека є вже змінними в часі величинами. Таким чином, параметри  $b$  та  $\vartheta$  (точніше кажучи  $b$  та  $\varphi$ ) у асимптотичному представленні (17) будуть вже змінними величинами незалежної змінної  $t$ . Задача полягає у знаходженні співвідношень, які б були базовими для визначення закону зміни вказаних параметрів. Нижче, як і у [2, 6], ці функції визначаються звичайними диференціальними рівняннями

$$\frac{db}{dt} = \mu B_1(b) + \dots, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \mu C_1(b) + \dots \quad (19)$$

У правих частинах цих диференціальних рівнянь невідомі функції  $B_1(b)$  та  $C_1(b)$  визначаються так, щоб з точністю до величин порядку  $\mu^2$  асимптотичне представлення розв'язку задовольняло вихідному рівнянню (6). Вказане представлення закону зміни основних параметрів, які описують динамічний процес, фізично обґрунтовано: малі за величиною сили автономного типу в області стійкого динамічного процесу незначною мірою його змінюють.

Шляхом диференціювання (17) за незалежними змінними  $x$  і  $t$ , враховуючи при цьому (19), отримуємо

$$u_{tt}(x, t) = \omega^2 \left( -\cos(\nu x + \omega t + \varphi) + \cos(\nu x - \omega t - \varphi) \right) + \mu \left[ -2\omega B_1(a) \left( \sin(\nu x + \omega t + \varphi) - \sin(\nu x - \omega t - \varphi) \right) - \right. \\ \left. - 2b\omega C_1(b) \left( \cos(\nu x + \omega t + \varphi) + \cos(\nu x - \omega t - \varphi) \right) + \omega^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} \right] + \mu^2 \dots,$$



$$u_{xx}(x,t) = -bv^2(\cos(vx + \omega t + \varphi) - \cos(vx - \omega t - \varphi)) + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu^2 \dots, \quad (20)$$

$$u_{xxxx}(x,t) = bv^4(\cos(vx + \omega t + \varphi) - \cos(vx - \omega t - \varphi)) + \mu \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \mu^2.$$

Підставляючи наведені вище значення функції  $u(x,t)$  та її похідних у рівняння (6), знаходимо залежність, яка зв'язує невідомі функції  $U_1(a, x, \vartheta)$ ,  $B_1(b)$  та  $C_1(b)$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} \omega^2 + \frac{I_0}{m_0} \left( E_0 - \frac{S_0}{F} \right) \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \frac{S_0}{m_0} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \Omega^2 U_1 = \bar{f}_1(a, x, \vartheta) + \quad (21)$$

$$+ 2\omega B_1(b)(\sin(vx + \omega t + \varphi) - \sin(vx - \omega t - \varphi)) + 2\omega b C_1(b)(\cos(vx + \omega t + \varphi) - \cos(vx - \omega t - \varphi)),$$

де  $\bar{f}_1(a, x, \vartheta)$  відповідає значенню функції  $f_1\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)$  за умови, що  $u(x,t)$  та її похідні набувають головне значення у представленні (17).

Отримані вище співвідношення є базовими для знаходження невідомих функцій, які описують закони зміни основних параметрів згинних коливань шнека, тобто  $B_1(b)$  та  $C_1(b)$ . Для знаходження зв'язку між ними накладемо на періодичну по  $\vartheta$  функцію  $U_1(b, x, \vartheta)$  додаткову умову, а саме: її розклад по  $\vartheta$  не містить першої гармоніки  $\vartheta$ . Вказане буде мати місце, якщо виконується співвідношення

$$\int_0^{2\pi} U_1(b, x, \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} U_1(b, x, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0. \quad (22)$$

Із фізичних міркувань вказані умови еквівалентні наступному: амплітуда згинних коливань середовища є у два рази більшою за головну частину амплітуди прямої чи відбитої хвилі. Одночасно умови (22) дозволяють знайти із рівняння (20) невідомі функції  $B_1(b)$  та  $C_1(b)$ .

$$B_1(b) = \frac{1}{4\pi\omega l} \int_0^{2\pi l} \int_0^{2\pi} \hat{f}_1(b, x, \vartheta) \sin vx \cos \vartheta dx d\vartheta,$$

$$C_1(b) = \frac{1}{4\pi\omega lb} \int_0^{2\pi l} \int_0^{2\pi} \hat{f}_1(b, x, \vartheta) \sin vx \sin \vartheta dx d\vartheta, \quad (23)$$

$$\varpi(b) = \omega + \frac{1}{4\pi\omega lb} \int_0^{2\pi l} \int_0^{2\pi} \hat{f}_1(b, x, \vartheta) \sin vx \sin \vartheta dx d\vartheta.$$

Нижче наведені деякі результати (рис. 4 і рис. 5), які стосуються згинних коливань шнека для випадку нелінійного технічного закону пружності його матеріалу, змінної вздовж його довжини значення сили стиску та сили в'язкого тертя, що пропорційна кубові відносної швидкості. Права частина диференціального рівняння (6) набуває у даному випадку вигляду

$$\begin{aligned} \mu f_1 \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} \right) = \\ = \frac{\mu}{m_0} \left\{ -k_4 \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^3 + \frac{I_0 S k_2}{F} \left( 2 \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} \right) - EI_0 \left[ 3 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right)^2 + 6 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right) + S k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

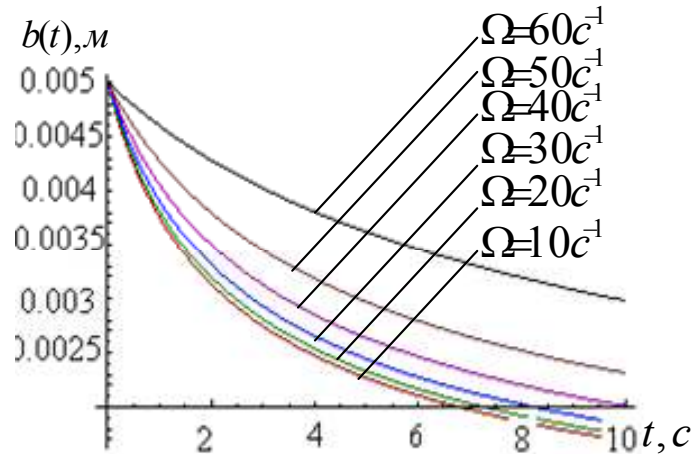


Рисунок 4. Закон зміни в часі амплітуди згинних коливань шнека за різних значень кутової швидкості його обертання та початкового значення амплітуди

Figure 4. Changing in time amplitude principle of the screw bending vibrations under different angular rotating speed values and initial amplitude value

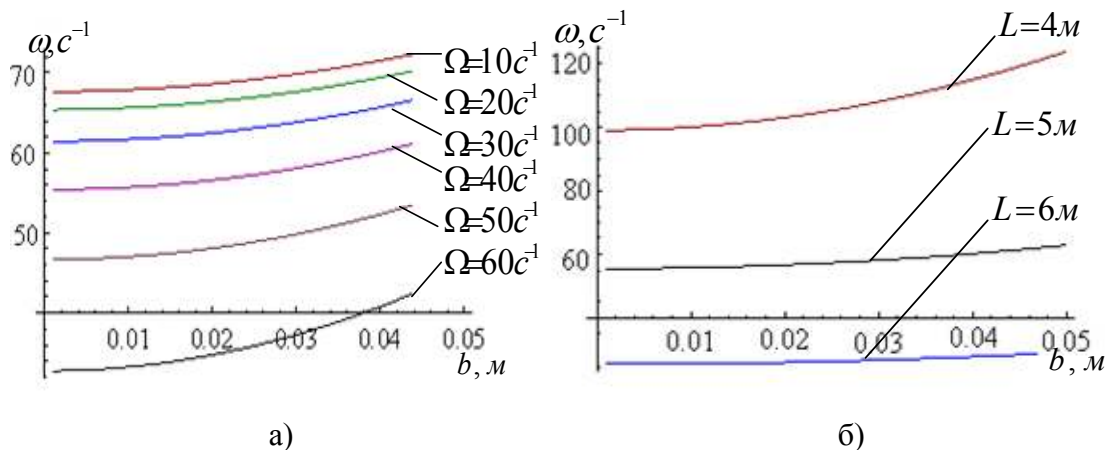


Рисунок 5. Залежність частоти нелінійних коливань шнека від амплітуди: а) за різних значень кутової швидкості обертання; б) довжини шнека

Figure 5. Dependence of the screw nonlinear vibrations frequency on the amplitude: a) under different angular rotating speed; b) screw lengths

Набагато складнішим у дослідженні й одночасно важливим для практичної експлуатації шнеків є неавтономний випадок дії зовнішніх періодичних сил. Для першого наближення у так званому нерезонансному випадку дія останніх проявляється у незначній зміні форми коливань. Водночас у резонансному випадку дія періодичних сил супроводжується значним зростанням амплітуди коливань, а отже, збільшенням динамічних напружень у шнеці чи навантажень на опорні підшипники. Отже, вказане

явище негативним чином впливає на експлуатацію багатьох елементів машин, зменшуючи ресурс їх експлуатації. Проте вказане явище, на наш погляд, має і практичний бік використання при транспортуванні в'язких матеріалів за допомогою шнекових транспортерів. Відомо, що при транспортуванні останніх має місце таке небажане явище, як налипання (прилипання) матеріалу на шнек, утворюючи мертві зони. Внаслідок цього продуктивність роботи машини різко знижується. Позбутися налипання матеріалу на шнек можна за допомогою короткочасної експлуатації його у резонансній зоні. Справді, короткочасні інтенсивні коливання шнека із відносно великою амплітудою звільняють останній від матеріалу налипання. Подальший вихід із резонансної зони експлуатації машини (вихід на робочу частоту) значною мірою підвищить продуктивність її. Тому нижче зупинимось на дослідженнях саме таких коливань шнека та проведемо порівняльне оцінювання амплітуд резонансних та нерезонансних коливань за незмінних усіх інших параметрів системи.

Для цього вважатимемо, що частота зовнішнього періодичного збурення близька до частоти власних згинних коливань шнека. Права частина диференціального рівняння, яке описує його вимушені коливання, набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mu f \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = \\ = \mu f_1 \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + h \cos \gamma, \gamma = \Xi t + \gamma_0, \end{aligned} \quad (25)$$

Як було наголошено вище, розглядаються резонансні коливання шнека. Тому вважатимемо, що частота останніх є близькою до частоти власних коливань системи, тобто

$$p\Xi \approx q\omega, \sqrt{\frac{I_0}{m_0} \left( E_0 - \frac{S_0}{F} \right) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 - \frac{S_0}{m_0} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2} - \Omega^2 = \omega. \quad (26)$$

Крім того, у резонансному випадку коливальний процес суттєво залежить не тільки від співвідношення між частотами власних та вимушених коливань, але й від різниці їх фаз. Таким чином, у резонансному випадку опис коливального процесу шнека будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = b(\cos(\nu l + \omega t + \varphi) - \cos(\nu l - \omega t - \varphi)) + \mu U_1(b, x, \mathcal{G}, \gamma) \quad (27)$$

Параметри  $b$  та  $\Delta$  зв'язані диференціальними рівняннями

$$\frac{db}{dt} = \mu B_1(b, \Delta) + \dots, \quad \frac{d\Delta}{dt} = p\omega - q\Xi + \mu C_1(b, \Delta) + \dots \quad (28)$$

Поступаючи подібним чином, як і для автономного випадку, отримуємо

$$\begin{aligned} u_u(x, t) = \omega^2(-\cos(\nu x + \omega t + \varphi) + \cos(\nu x - \omega t - \varphi)) + \\ + \mu[-2\omega B_1(a)(\sin(\nu x + \omega t + \varphi) - \sin(\nu x - \omega t - \varphi)) - \\ - 2b\omega C_1(b)(\cos(\nu x + \omega t + \varphi) + \cos(\nu x - \omega t - \varphi)) + \\ + \omega^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \mathcal{G}^2} + \Xi^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \gamma^2} + 2\Xi\omega \frac{\partial^2 U_1}{\partial \gamma \partial \mathcal{G}}] + \mu^2 \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Диференціальне рівняння, яке зв'яже невідомі функції, що описують резонансні коливання шнека, набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} \omega^2 + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \gamma^2} \Xi^2 + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \gamma \partial \vartheta} \Xi \omega + \frac{I_0}{m_0} \left( E_0 - \frac{S_0}{F} \right) \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \frac{S_0}{m_0} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \Omega^2 U_1 = \quad (30)$$

$$= \bar{f}_1(a, x, \vartheta) + h \cos \gamma + 2\omega B_1(b) (\sin(\nu x + \omega t + \varphi) - \sin(\nu x - \omega t - \varphi)) +$$

$$+ 2\omega C_1(b) (\cos(\nu x + \omega t + \varphi) - \cos(\nu x - \omega t - \varphi)).$$

Із умов, накладених на функцію  $U_1(b, x, \vartheta, \gamma)$ , знаходимо

$$\frac{db}{dt} = \frac{\mu}{4\pi l \omega} \left\{ \int_0^l \int_0^{2\pi} \bar{F}(b, x, \vartheta) \sin \nu x = \cos \vartheta dx d\vartheta + h_1 \cos \Delta \right\} =$$

$$= -\mu \frac{9}{16} k_4 b^3 \omega^2 + \frac{\mu h_1}{4\pi l \omega} \cos \Delta,$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = \left\{ \frac{\mu}{4\pi b \omega} \int_0^l \int_0^{2\pi} \bar{F}(b, x, \vartheta) \sin \nu x \sin \vartheta dx d\vartheta + h_1 \sin \Delta \right\} =$$

$$= q\omega - p\Xi - 3,75\mu \left( \frac{k\pi}{l} \right)^8 \frac{b^2}{\omega} - \frac{\mu h_1}{4\pi b \omega} \sin \Delta. \quad (31)$$

Нижче на рис. 6 та 7 представлені за різних кутових швидкостей обертання шнека закони зміни амплітуди при швидкому переході через головний та резонансні криві (залежність резонансної амплітуди від розбалансування головних частот  $\bar{\Delta} = \varpi(a) - \Xi$ ) за таких значень параметрів:  $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ H/m}^2$ ,  $I_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $F = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ ,  $m_0 = 4 \cdot 10 \text{ кг/м}$ ,  $S_0 = 7 \cdot 10^2 \text{ Н}$ ,  $k_1 = k_3 = 0$ ,  $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\Delta_0 = 10^{-1}$ .

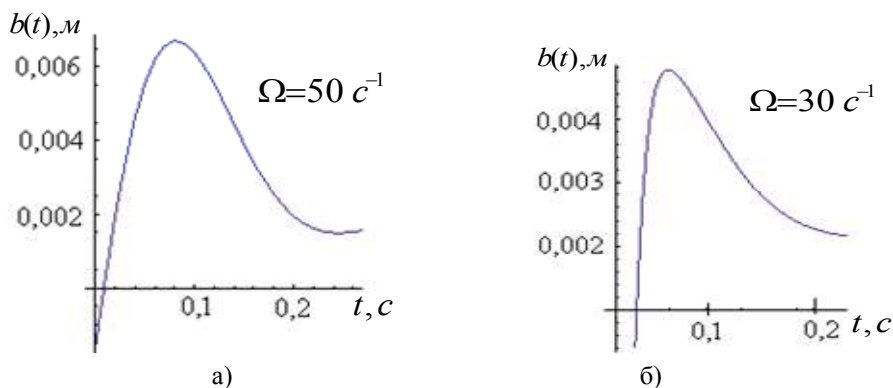


Рисунок 6. Закони зміни резонансної амплітуди при швидкому переході резонансної зони за різних кутових швидкостей обертання шнека

Figure 6. Principle of changing the resonance amplitude in rapid transition of resonance area with different screw rotating angular speed

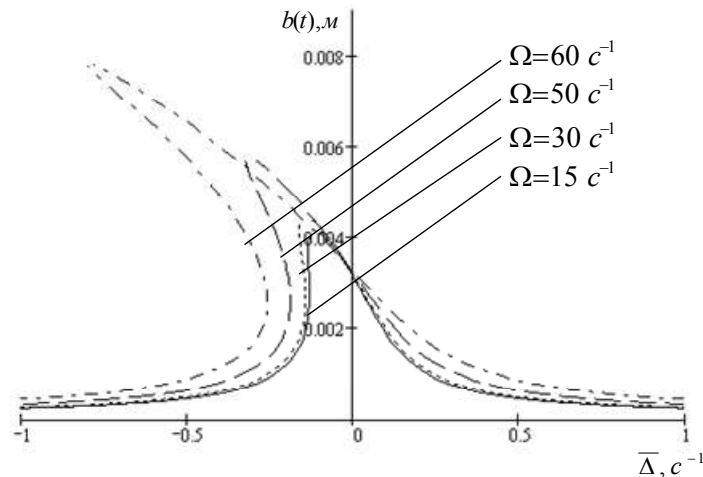


Рисунок 7. Резонансні криві за різних значень обертання шнека

Figure 7. Resonance curves under different screw rotation values

**Висновки.** Домінуючу роль у визначенні частоти власних коливань шнека відіграють згинна жорсткість, кутова швидкість обертання та відстань між опорними підшипниками.

Вплив амплітуди на частоту згинних коливань шнека більшою мірою проявляється для випадку меншої відстані між опорними підшипниками та більшою кутовою швидкістю обертання.

У випадку «м'якої» нелінійності матеріалу шнека ( $\mu < 0$ ) для більших значень амплітуди власних коливань частота є більшою, причому швидкість зростання частоти більшою мірою проявляється для шнеків з більшою кутовою швидкістю обертання або меншою відстанню між опорними підшипниками, а у випадку «жорсткої» нелінійності – процес протилежний.

Швидкість зникання амплітуди коливань (за наявності сили опору) є більшою для менших значень кутової швидкості обертання шнека.

Що стосується переходу через резонанс, то:

- а) початкові значення амплітуди коливань та періодичного збурення впливають незначною мірою на резонансну амплітуду;
- б) швидкість переходу через резонанс не впливає на величину резонансної амплітуди;
- в) резонансні значення амплітуди на основній та кратних частотах є різними;
- г) величина резонансної амплітуди коливань шнека значно перевищує резонансну амплітуду в дорезонансній чи зарезонансній зонах;
- д) резонансна амплітуда зі зростанням кутової швидкості обертання шнека зростає.

**Conclusions.** The flexural rigidity, angular rotating speed and distance between supporting bearings is dominant to determine the frequencies of screw vibrations.

The influence of the amplitude on screw bend vibrations frequency is mainly revealed in the case of less distance between the supporting bearings and greater angular rotating speed.

In the case of «soft» non-linearity of screw material the frequency is greater for the greater values of the natural vibrations amplitude, besides that the speed of frequency growth

is mainly available for the screws with greater angular rotating speed or less distance between the supporting bearings; and in the case of «hard» nonlinearity - the process is opposite;

The speed of closing the amplitude of vibrations (if the resistance is available) is greater for the less values of the screw angular rotating speed.

The transition through resonance:

- a) initial values of the vibrations amplitude and periodic indignation slightly influence the resonance amplitude;
- b) transition speed through resonance does not influence the size of resonance amplitude;
- c) resonance values of the amplitude on the basic and multiple frequencies are different;
- d) the value of screw vibrations resonance amplitude considerably exceeds the resonance amplitude in pre- resonance or after- resonance areas;
- e) the resonance amplitude increases with the increase of the screw angular rotating speed.

### **Список використаної літератури**

1. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
2. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Николай Николаевич Боголюбов, Юрий Алексеевич Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
3. Каудерер, Г. Нелинейная механика [Текст] / Г. Каудерер; пер. с нем. Я.Г. Пановко. – М.: ИЛ, 1961. – 777 с.
4. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
5. Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике [Текст] / Джулиан Коул; пер. с англ. А.И. Державиной и В.Н. Диесперова; под ред. с предисл. О.С. Рыжова. – М.: Мир, 1972. – 276 с.
6. Митропольский, Ю.А. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения [Текст] / Ю.А. Митропольский. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – 231 с.
7. Писаренко, Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале [Текст] / Г.С. Писаренко. – Киев: Изд-во АН УССР, 1970. – 379 с.
8. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны; пер. с англ. В. В. Жаринова [Текст] / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 662 с.
9. Chen, L.Q. Nonlinear parametric vibration of axially moving beams: asymptotic analysis and differential quadrature verification/ Li-Qun Chen, Bo Wang, Hu Ding// Journal of Physics: Conference Series 181 (2009). – P. 1 – 8.

*Отримано 09.11.2012*