Пастернак Р. Фактори, що впливають на швидкість повертання перицентра планет / Пастернак Р., Пастернак М. // Вісник ТНТУ. — 2012. — Том 67. — № 3. — С.75-81. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 531.011

Р. Пастернак, канд. фіз.-мат. наук; М. Пастернак, канд. техн. наук

Луцький національний технічний університет

ФАКТОРИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ШВИДКІСТЬ ПОВЕРТАННЯ ПЕРИЦЕНТРА ПЛАНЕТ

***Резюме**. Беручи до уваги відмінності релятивістського формулювання закону тяжіння від класичного в роботі показано, що швидкість повертання перигелію планет можна з достатньою точністю моделювати і в рамках релятивістської механіки.*

***Ключові слова**: зміщення перигелію, закон тяжіння, релятивістська механіка.*

R. Pasternak, M. Pasternak

FACTORS AFFECTING THE ROTATION RATE OF PLANETS PERYCENTER

***Summary**. One of the most precise tools for studying gravitational properties of matter is the effect of rotation of planets' pericenter. Particularly, most of the spatial displacement of the perihelion of Mercury, which is caused by mutual influence of the planets, was calculated by Le Verrier based on the Newton's law of inverse squares, and the discrepancy was later explained within the framework of general relativity. As a specific result is desirable to be obtained by the similar methods, there were attempts to apply the apparatus of relativistic mechanics for solving this problem; nevertheless, the calculated century bias of perihelion was three times less than observed one. However, in the relativistic problem of the bias rate of Mercury's perihelion one should account for not only the equations of motion, but also other factors such as oblateness of the Sun, the orbital-rotational interaction of the planets, the redistribution of energy in the relativistic problem of two bodies, factors associated with modification of Newton's law of gravity etc.*

On the other hand, there is increasing interest to the drawbacks of the general theory of relativity. Particularly, the latter cannot solve the problem of singularity with it internal contradictions with the field theory, the problem of torsion field is waiting for its solution. It is therefore important to consider some gravitational effects on related models, in particular within the framework of relativistic mechanics.

This paper shows that additional contribution to Mercury's perihelion bias rate is caused by three main factors: periodic relativistic change in mass of the planet, the difference between relativistic gravitational field and Newtonian one, and the relativistic moment of force. The last two factors in the literature have not yet been considered. The consequence of relativistic moment of force is to reverse the Lense–Thirring effect in special relativity, i.e. it leads to rotation of the Sun.

This paper proves that within the framework of relativistic mechanics it is possible to calculate the rate of Mercury's perihelion rotation with sufficient accuracy. The analysis held has shown that with the consistent observance of conservation laws there are no significant limitations in using the apparatus of relativistic mechanics for the analysis of planetary motion.

***Key words**: perihelion bias, gravity law, relativistic mechanics.*

Вступ. Одним із найбільш прецизійних інструментів дослідження гравітаційних властивостей речовини виявився ефект повертання перицентрів планет. Більшу частину просторового зміщення перигелію Меркурія (531",5±0",5 за століття [1]), що зумовлена взаємними впливами планет, розрахував Левер'є на основі закону обернених квадратів Ньютона. Нев'язку в 42",6±0",9 згодом було пояснено в рамках загальної теорії відносності (ЗТВ) [2]. Оскільки конкретний результат бажано отримувати однотипними методами, робилися спроби застосувати до цієї задачі апарат релятивістської механіки, проте розраховане вікове зміщення перигелію було втричі меншим за спостережуване [1]. Однак у релятивістській задачі про швидкість зміщення перигелію Меркурія, крім рівнянь руху, необхідно враховувати й інші фактори. Наприклад, проведені Р.Г. Дікке точні виміри видимої сплюснутості поверхні Сонця показали [1], що збурення, зумовлені асиметрією розподілу його маси, можуть дати додаткове зміщення перигелію Меркурія в 3",4 за століття. Існують також впливи, пов'язані з орбітально-обертальною взаємодією планети [3], перерозподілом енергії у релятивістській задачі двох тіл [3], факторами, пов'язаними з модифікацією закону тяжіння [1] тощо.

З іншого боку, все частіше звертають увагу на проблеми самої ЗТВ. Досі не вдалося розв'язати проблему сингулярності з її внутрішнім протиріччям із польовими теоріями [5], чекає свого вирішення проблема торсіонності [6], з'явилися проблеми з ефектом Лензе-Тіррінга [7] тощо. Саме тому важливо розглянути окремі гравітаційні ефекти на супутніх моделях, зокрема у рамках релятивістської механіки.

Мета роботи. Показати, що в релятивістській задачі про швидкість зміщення перицентра планети врахування впливу релятивістського моменту сили та відхилення від закону тяжіння Ньютона, пов'язаного з дефектом мас зв'язаної системи, дозволяють отримати результати, адекватні спостережуваним.

1. Релятивістський момент сили. У релятивістській механіці рівняння руху матеріальної точки має вигляд [1]

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{f}-\frac{1}{c^2}\left(\vec{f}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{v}\,. \tag{1}$$

Тут $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ – релятивістська маса, $\vec{v}$ – лінійна швидкість, $\vec{f}$ – сила, що діє на тіло, c – фундаментальна швидкість. Оскільки сила тяжіння $\vec{f}=m\vec{g}$, де $\vec{g}$ – напруженість гравітаційного поля, використання принципу еквівалентності інерційної та гравітаційної мас дозволяє взагалі вилучити масу m планети з розгляду.

Домножуючи (1) векторно (зліва) на радіус-вектор $\vec{r}$ планети в центрально-симетричному полі сил, бачимо, що в системі Сонце–планета існує ненульовий момент сили $\vec{M}_R$

$$m\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times\vec{f}-\frac{1}{c^2}\left(\vec{f}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{r}\times\vec{v}=\vec{M}_R\,. \tag{2}$$

Це – чисто релятивістський ефект, відсутній у класичній механіці. Оскільки його поява в замкненій системі тіл суперечить закону збереження моменту імпульсу, необхідно знайти доповнювальний рух, що компенсував би ці зміни. Справді, якщо зміни орбітального моменту імпульсу через орбітально-обертальну взаємодію [3] компенсуються змінами власного моменту імпульсу планети, то з боку гравітаційного поля момент сили обов'язково призведе до нерадіальності його силових ліній – воно стає вихровим. У результаті за принципом доповнювальності для віддаленого спостерігача це еквівалентно тому, що на орбіту планети діє подвійний момент сили $\vec{M}_R$.

Враховуючи симетрію задачі, запишемо векторне рівняння (1) системою скалярних у полярних координатах

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\omega^2 r = g\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]; \tag{3}$$

$$mr\left(2\omega\frac{dr}{dt}+r\frac{d\omega}{dt}\right)=-\frac{g}{c^2}\frac{dr}{dt}mr^2\omega = M_R\,. \tag{4}$$

Тут ω – частота орбітального руху. Доповнивши рівняння (4) додатково релятивістським моментом сили M_R, отримаємо систему рівнянь, що описують релятивістський рух планети з урахуванням закону збереження моменту імпульсу в замкненій системі,

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\omega^2 r - g\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]=0; \tag{5}$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}+\frac{2}{r}\left[1+\frac{gr}{c^2}\right]\frac{dr}{dt}=0\,. \tag{6}$$

При розв'язуванні системи рівнянь (5), (6) їх необхідно доповнити явною формулою для напруженості $\vec{g}$ гравітаційного поля. Для зручності порівняння результатів розрахунків гравітаційну масу Сонця подамо через його гравітаційний радіус r_0. Тоді напруженість $\vec{g}$ у законі тяжіння Ньютона матиме вигляд

$$\vec{g}=-\frac{r_0c^2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}\,. \tag{7}$$

Перш ніж розв'язувати систему рівнянь (5), (6), попередньо проведемо її якісне порівняння з системою (3), (4). У фізичних задачах такий аналіз не менш важливий від кількісного.

a. За відсутності релятивістського обертального моменту сили умовою незмінності орбітального моменту імпульсу точкової планети та просторової фіксації осі апсид орбіти є постійність терму

$$r^2\omega = Z_0 = const_0\,. \tag{8}$$

b. Врахування моменту сили $\vec{M}_R$ призводить до рівняння (4), інтегрування якого дає зв'язок

$$r^2\omega\exp\left(\frac{r_0}{r}\right)=Z_1=const_1\,. \tag{9}$$

За умови, коли $r >> r_0$, вираз $\exp\left(\frac{r_0}{r}\right)\approx 1+\frac{r_0}{r}$, а середня частота повертання перицентра орбіти дорівнює $\langle\omega_1'\rangle \approx \frac{r_0}{q}\frac{2\pi}{T}$, де q – її параметр, а T – період обертання планети.

c. Інтегрування рівняння (6) дає зв'язок

$$r^2\omega\exp\left(2\frac{r_0}{r}\right)=Z_2=const_2\,. \tag{10}$$

Отже, можна очікувати, що і швидкість повертання перицентра орбіти буде вдвічі більшою, ніж $\langle\omega_1'\rangle$.

Для розв'язування (6) скористаємося стандартним підходом [1]. Для цього спочатку перейдемо у (6) від параметра t до полярного кута φ

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}-r-\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{r_0}{r^2}\frac{c^2}{\omega^2}=0\,. \tag{11}$$

Тепер за схемою Біне [1] перейдемо від r до гармонічної змінної

$$x=-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}\,, \tag{12}$$

в результаті чого отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}+x-\frac{1}{q}+\frac{r_0c^2}{\left(\omega r^2\right)^2}=0\,. \tag{13}$$

З урахуванням зв'язку (10) зведемо рівняння (13) до вигляду

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}+x-\frac{1}{q}+\frac{r_0c^2}{Z_2^2}e^{4\frac{r_0}{q}}e^{-4r_0x}=0\,. \tag{14}$$

Лінеаризувавши в (14) експоненту зі змінною x та вибравши постійну інтегрування Z_2 такою, щоб виконувалася умова

$$\frac{1}{q}=\frac{r_0c^2}{Z_2^2}e^{4\frac{r_0}{q}}\,, \tag{15}$$

отримуємо рівняння гармонічного осцилятора

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}+\left(1-4\frac{r_0}{q}\right)x=0\,, \tag{16}$$

відносна частота $\sqrt{1-4\frac{r_0}{q}}\approx 1-2\frac{r_0}{q}$ коливань якого не дорівнює одиниці. Це означає, що коніка орбіти, як і очікувалося, зміщується у прямому напрямі з частотою

$$\omega_2'\approx 2\frac{r_0}{q}\omega\,. \tag{17}$$

2. Релятивістське формулювання закону тяжіння. У системах тіл, що взаємодіють, частина енергії може переходити в енергію $E_{зв}$ зв'язку. Тіло масою m, що перебуває в стаціонарному полі сил тяжіння, змінюватиме свою енергію відповідно до формули Ж. Понселе [4], і ці зміни будуть еквівалентними релятивістським змінам маси тіла. Допускаючи в першому наближенні, що сила тяжіння змінюється за законом Ньютона, отримаємо

$$dE_{зв}=\vec{f}\cdot d\vec{r}=-\frac{r_0}{r^2}c^2mdr=c^2dm\,. \tag{18}$$

Інтегруючи (18), отримаємо явну залежність гравітаційного дефекту маси від відстані r планети до силового центра

$$\Delta m=m_0\left(r\right)-m_\infty=m_\infty\left(e^{\frac{r_0}{r}}-1\right). \tag{19}$$

Тут m_∞ – значення маси спокою m_0 при нескінченній відстані r між тілами. Знаки в (19) змінено відповідно до умови, що швидкість тіла залишається незмінною.

(Наголосимо, що дефект маси є чисто релятивістським ефектом, пов'язаним із законом збереження енергії).

Гравітаційні зміни маси тіла можна приписати еквівалентним змінам напруженості гравітаційного поля

$$\vec{g}_R = -\frac{r_0 c^2}{|r|^3} e^{\frac{r_0}{r}} \vec{r} \,. \tag{20}$$

На відміну від сконструйованих спеціально під задачу про зміщення перигелію Меркурія формул Б. Рімана, В. Вебера, П. Гербера [1], формула (20) отримана, виходячи із закону збереження енергії. Зроблені вище дослідження не слід розглядати як строге виведення, а лише як одну зі спроб вказати на суттєві відмінності між класичним та релятивістським законами тяжіння, адже як формула Ньютона, так і (20) є евристичними і потребують експериментального підтвердження.

3. Швидкість повертання перицентра планети в релятивістському полі тяжіння. Підставивши у (5) та (6) явний вираз (20) для напруженості $\vec{g}_R$ гравітаційного поля, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r + \frac{r_0}{r^2} e^{\frac{r_0}{r}} \left[c^2 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = 0\,; \tag{21}$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{2}{r}\left[1 - \frac{r_0}{r} e^{\frac{r_0}{r}}\right]\frac{dr}{dt} = 0\,. \tag{22}$$

Інтегрування (22) дає зв'язок

$$\omega r^2 \exp\left(-2\exp\left(\frac{r_0}{r} \right) \right) = Z_3 = const_3\,, \tag{23}$$

який у першому наближенні при $r >> r_0$ переходить у вираз

$$\omega r^2 \exp\left(2\frac{r_0}{r} \right) = Z_4 = const_4\,, \tag{24}$$

що за формою нічим не відрізняється від (10). Це й зрозуміло, адже момент сили, що повертає осі апсид орбіти не змінився. Однак змінився характер поля сил тяжіння – його напруженість перестала змінюватися за законом r^{-2}, що неухильно призводить до незамкненості орбіти, отже, і до просторового зміщення її перицентра.

Перетворивши (21) за схемою (11), (12), (13), отримаємо рівняння

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} + x - \frac{1}{q} + \frac{r_0 c^2}{\left(\omega r^2\right)^2} e^{\frac{r_0}{r}} - r_0 e^{\frac{r_0}{r}} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 = 0\,. \tag{25}$$

Підставивши у (25) явний вираз для ωr^2, отриманий із (24), отримаємо

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} + x - \frac{1}{q} + \frac{r_0 c^2}{Z_4^2} e^{5\frac{r_0}{q}} e^{-5 r_0 x} - r_0 e^{\frac{r_0}{r}} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 = 0\,. \tag{26}$$

Лінеаризувавши в (26) експоненту зі змінною x та вибравши постійну інтегрування Z_4 такою, щоб виконувалася умова

$$\frac{1}{q} = \frac{r_0 c^2}{Z_4^2} e^{5\frac{r_0}{q}}\,, \tag{27}$$

отримуємо нелінійне рівняння

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}+\left(1-5\frac{r_0}{q}\right)x-r_0e^{\frac{r_0}{r}}\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2=0\,. \tag{28}$$

З одного боку, зміна формули для напруженості поля тяжіння з (7) на (20) призводить до додаткового моменту сили, в результаті чого швидкість повертання осі апсид орбіти, як це випливає з (28), збільшується на $0{,}5\frac{r_0}{q}\omega$. З іншого боку, траєкторія орбіти стає незамкненою, що відповідає додатковій швидкості зміщення перицентра орбіти. Наближений частинний розв'язок неоднорідного рівняння дає додаткову швидкість зміщення перицентра приблизно $0{,}5\frac{r_0}{q}\omega$. У результаті отримуємо, що

$$\omega_3' \approx 3\frac{r_0}{q}\omega \tag{29}$$

Зважаючи на зв'язок (24), знайдемо середню за період T швидкість $\langle\omega_3'\rangle$ повертання перицентра орбіти

$$\langle\omega_3'\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\omega_3'dt=\frac{3r_0}{q}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\frac{2\pi}{T}\,. \tag{30}$$

Відповідно до (30) для ізольованої системи Сонце–Меркурій перигелій останнього за 100 років мав би зміститися на 44″,75. Додаючи сюди кут повороту 0″,4 за століття [3], викликаний неточковістю планети, та враховуючи вплив сплюснутості Сонця в -3″,4 за століття [1], отримаємо повертання в 41″,75 за століття, що добре узгоджується з астрономічними спостереженнями.

Висновки. Беручи до уваги відмінності релятивістського формулювання закону тяжіння від класичного в роботі доведено, що в рамках релятивістської механіки можна з достатньою точністю розраховувати швидкість повертання перигелію Меркурія. Аналіз показав, що при послідовному дотриманні законів збереження не існує жодних обмежень у використанні апарату релятивістської механіки для аналізу руху планет.

Conclusions. Taking into account the differences between the relativistic formulations of the law of gravity and the classical ones it is proved that within the framework of relativistic mechanics it is possible to calculate the speed of Mercury's perihelion rotation with sufficient accuracy. The analysis held has shown that with the consistent observance of conservation laws there are no significant limitations in using the apparatus of relativistic mechanics for the analysis of planetary motion.

Список використаної літератури

1. Роузвер, Н.Т. Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна [Текст] / Н.Т. Роузвер. – М.: Мир, 1985. –504 с.
2. Фок, В.А. Теория пространства, времени и тяготения [Текст] / В.А. Фок. – М.: Физматгиз, 1955. – 504 с.
3. Горбачовська, М.С. Перерозподіл енергії в релятивістській задачі двох тіл [Текст] / М.С. Горбачевська // Науковий вісник ВДУ. – Луцьк, 2001. – №7. – С. 131–139.
4. Маркеев, А.П. Теоретическая механика. Регулярная и хаотическая динамика [Текст] / А.П. Маркеев. – Ижевск, 1999. – 569 с.

5. Федосин, С.Г. Физические теории и бесконечная вложенность материи / С.Г. Федосин. – Пермь, 2009. – 844 с.
6. Anderson, J.D. The energy transfer process in planetary flybys / J.D. Anderson, J.K. Campbell, M.M. Nieto // New Astronomy. – 2007. – Vol. 12. – P. 383–397.
7. Pfister, H. On the history of the so-called Lense-Thirring effect / H. Pfister // Preprint. PhilSci Archive, 25 March 2006.

Отримано 02.07.2012