

УДК 539.2

Б. Окрепкий, канд. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська, канд. техн. наук

Тернопільський національний економічний університет

ТИСК ЦИЛІНДРИЧНОГО КРУГОВОГО ШТАМПА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ШАР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Резюме. Побудовано розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск циліндричного кругового трансверсально-ізотропного штамп на пружний трансверсально-ізотропний шар з урахуванням неідеального теплового контакту між штампом і шаром. Отримано формули для визначення температурного поля і нормального напруження. Досліджено вплив контактної провідності й коефіцієнтів анізотропії матеріалів на розподіл температурних полів і нормального напруження у зоні контакту двох тіл.

Ключові слова: штамп, шар, анізотропія матеріалів, неідеальний тепловий контакт, трансверсально-ізотропний, термопружність, контактні напруження.

B. Okrepkiy, M. Shelestovska

PRESSURE OF THE CILINDER PUNCH ON THE TRANSVERSAL-ISOTROPIC LAYER UNDER NON-IDEAL HEAT CONTACT

Summary. Determination of the contact stresses taking into account the temperature fields are of importance for the investigation of the machine parts and construction elements strength in the area of their interrelation and while calculating elastic base constructions in order to use properly the construction material and the supporting power of the base.

Solution of the axis symmetric contact task of thermo – elasticity of the cylinder circular transversal – isotropic punch stress on the elastic transversal- isotropic layer, which is free of friction, on the rigid base taking into account non-ideal thermal contact between the punch and the layer was built. The layer surface outside the contact area is free of the outside forces. Stress tangents on the contact area equal zero. In the lower part of the layer surface the vertical displacements and tangent stresses equal zero. In the free side of the cylinder the constant temperature is kept and the side surface of the cylinder is heat-insulated. The heat contact between the punch and the layer is expected to be non-ideal. Heat exchange with the outside medium occurs on the free surfaces of the layer according to the Newton's law.

Under given assumptions the method of determination the temperature fields in the cylinder and in the layer as well as the normal contact stresses has been developed. Equation of heat conductivity and thermo-elasticity for the layer was solved taking advantage of the Hankel integral transformation method. The temperature field in the cylinder was found by the Fourier method.

Thus, displacement and stress in the transversal –isotropic layer is presented as the Hankel integrals, including some unknown functions, which are found from the boundary conditions of the task. The temperature field in the cylinder is expressed by means of the unlimited system of coefficients.

Providing the boundary conditions of the task results in the system of the integral equations, which connect these unknown functions with the coefficients, which characterize the temperature field, and as a result, the Fredholm integral equation of the second kind relatively the function is obtained, due to which normal contact stresses under the punch are expressed.

The Fredholm integral equation of the second kind was solved by the numerical method using the system of the linear algebraic equations. The numerical example for the transversal isotropic magnesium was

analysed. The effect of the contact conductivity and isotropic coefficients of materials on the distribution of the temperature and the temperature component of the normal stress in the area of contact of the body system cylinder layer has been analysed.

Key words: *punch, layer, anisotropy materials, non-ideal contact, transversal-isotropic, thermo-elasticity contact stress.*

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних факторів і анізотропії матеріалів є важливим завданням для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкції на пружній основі для раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень. У працях [1–3] досліджено вплив температурних факторів на характер взаємодії тіл. Зокрема, в статтях [2, 3] розв’язано осесиметричні контактні задачі термопружності про тиск гарячого циліндричного кругового штампа з плоскою основою на пружний ізотропний і трансверсально-ізотропний півпростір з урахуванням неідеального теплового контакту між штампом і півпростором.

Проте недостатньо вивчено вплив умов неідеального теплового контакту для системи тіл циліндр–шар у випадку анізотропних матеріалів.

Мета роботи. Побудувати розв’язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск циліндричного кругового трансверсально-ізотропного штампа з плоскою основою на пружний трансверсально-ізотропний шар при неідеальному тепловому контакті й знайти формули для визначення температури і нормальних напружень. Дослідити вплив контактної провідності й коефіцієнтів анізотропії на розподіл температурних полів і нормальних напружень у зоні контакту двох тіл.

Постановка задачі. Нехай жорсткий циліндричний круговий штамп довжиною L і радіусом R з плоскою основою втискується силою P в пружний шар скінченної товщини H . Матеріали тіл припускаються трансверсально-ізотропними. Поверхня шару зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$.

На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0 . Бічна поверхня циліндра теплоізолювана. Тепловий контакт між тілами припускається неідеальним. На вільних поверхнях шару відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. При заданих припущеннях необхідно визначити температурні поля і контактні нормальні напруження.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z , центр якої лежить на поверхні шару, а вісь Oz спрямована вздовж циліндра. Всі величини, які позначені індексом “1”, відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури, напружень і переміщень матимуть такий вигляд:

$$T = T_0 \quad (0 \leq r < R; z = L). \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (r = R; 0 < z < L). \quad (2)$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T - T^1) \quad (0 \leq r < R, z = 0). \quad (3)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0 \quad (R < r < \infty, z = 0). \quad (4)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0 \quad (0 \leq r < \infty, z = -H). \quad (5)$$

$$u_z^1 = -\varepsilon, \quad (0 \leq r < R, z = 0); \quad \sigma_z^1 = 0 \quad (R < r < \infty, z = 0). \quad (6)$$

$$\tau_{rz}^1 = 0 \quad (0 \leq r < \infty, z = 0); \quad u_z^1 = 0, \quad \tau_{rz}^1 = 0 \quad (0 \leq r < \infty, z = -H). \quad (7)$$

Тут $H_i^1 (i=1,2)$, λ_z , λ_z^1 – коефіцієнти теплообміну і теплопровідності; h_0 – контактна провідність; ε – величина вертикального переміщення штампа.

Розв’язування крайових задач для рівнянь теплопровідності й термопружності. Відомо [4], що у випадку трансверсально-ізотропних тіл температурне поле задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

Напруження і переміщення визначаємо через термопружні потенціали φ_1^1 і φ_2^1 згідно з формулою

$$u_z^{(r)} = -a_1 \left(S_2^2 \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2^1}{\partial z} \right), \quad \tau_{rz}^{(r)} = -\frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial r \partial z},$$

$$\sigma_z^{(r)} = \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial r}. \quad (9)$$

Функції φ_1^1 і φ_2^1 задовольняють системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial r} + (\gamma_2^1)^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial z^2} = \frac{1}{(a_2^1)^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial z^2} - a_3^1 T^1 \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2^1}{\partial r} + (\gamma_1^1)^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial z^2} = a_4^1 T^1. \quad (10)$$

У співвідношеннях (8–10) λ^2 – відношення коефіцієнтів теплопровідності в напрямку осі OZ і перпендикулярному до нього; $(\gamma_i^1)^2$, S_i^2 – корені деяких характеристичних рівнянь [4, 5], які залежать від модулів пружності A_{ij}^1 [6]; $a_i^1 (i = \overline{1,4})$ – деякі величини, які залежать від коефіцієнтів деформацій a_{ij}^1 і коефіцієнтів лінійного температурного розширення α_{T^1} і β_{T^1} (у напрямку осі OZ і відповідно в площині ізотропії) [4].

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r, z)$ нульового порядку

$$\overline{T^1}(\xi, z) = \int_0^\infty r T^1(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (11)$$

за допомогою якої із рівняння (8) знаходимо $T^1(\rho, \zeta)$ через довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$:

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (12)$$

де $J_0(\eta \rho)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $\rho = r/R$; $\zeta = z/R$.

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок матиме вигляд

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (\lambda^2 r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^\infty J_0(\beta_k r) \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\beta_k z}{\lambda} + B_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k z}{\lambda} \right) + \sum_{k=1}^\infty I_0(\lambda \gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z), \quad (13)$$

де A_k, B_k, C_k, D_k – довільні постійні; $I_0(\lambda \gamma_k r)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні числа, які визначаємо із граничних умов.

За відомими температурними полями температурні потенціали φ_1^1 і φ_2^1 визначаємо із системи (10) таким способом. Підставляючи значення T^1 у друге рівняння (10), знаходимо φ_2^1 , а маючи φ_2^1 і T^1 , із першого рівня визначаємо φ_1^1 . При цьому достатньо знайти частинні розв'язки φ_1^1 і φ_2^1 рівнянь (10). Не зупиняючись на викладах, запишемо кінцевий результат відповідно для шару

$$\varphi_1^1(\eta) = h_1^1 \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2} \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$\varphi_2^1(\eta) = a_4^1 (\lambda^1)^2 \varphi_1^1(\eta) / \left\{ \left[(\gamma_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] h_1^1 \right\},$$

$$h_1^1 = \left\{ a_4^1 - a_3^1 \left[(\gamma_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \right\} \cdot \left\{ a_2^1 \left[(\gamma_2^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \left[(\gamma_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (14)$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюємо за формулами (9).

Загальний напружено-деформований стан від температурних і механічних факторів отримуємо шляхом додавання до компонент напружень і переміщень (9) компонент $u_z^1(\phi)$, $\sigma_z^1(\phi)$, $\tau_{rz}^{(1)}(\phi)$ знайдених згідно з [1] через функції напружень ϕ_1 і ϕ_2 , тобто $u_z^1 = u_z^{(T^1)}(\phi) + u_z^1(\phi)$ і т.д.

Вирази для компонент переміщення, напружень і рівняння для функцій ϕ_i мають вигляд

$$u_z^1(\phi) = \frac{\partial}{\partial z} (K_1^1 \phi_1 + K_2^1 \phi_2).$$

$$\sigma_z^1(\phi) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \left[K_1^1 A_{33}^1 - (\gamma_1^1)^2 A_{13}^1 \right] \phi_1 + \left[K_2^1 A_{33}^1 - (\gamma_2^1)^2 A_{13}^1 \right] \phi_2 \right\}. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^1(\phi) &= A_{44}^1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[(1 + K_1^1) \phi_1 + (1 + K_2^1) \phi_2 \right]. \\ \left[\nabla_1^2 + (\gamma_i^1)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi_i &= 0, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (i=1,2), \end{aligned} \quad (16)$$

де $K_i^1, (\gamma_i^1)^2 (i=1,2)$ – корені характеристичного рівняння [5].

Таким чином, для визначення переміщення і напружень у трансверсально-ізоотропному шарі маємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} u_z^1 &= -a_1^1 \lambda^1 h_2^1 R \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta z}{\lambda_1^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\lambda_1^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{K_1^1}{\gamma_1^1} \left[-F_1^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\gamma_1^1}} + F_2^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{\gamma_1^1}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_2^1}{\gamma_2^1} \left[-F_3^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\gamma_2^1}} + F_4^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{\gamma_2^1}} \right] \right\} J_0(\eta \rho) d\eta, \\ \sigma_z^1 &= -(\lambda^1)^2 h_1^1 \int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta z}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\lambda^1}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{1}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{d_1^1}{(\gamma_1^1)^2} \left[F_1^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\gamma_1^1}} + F_2^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{\gamma_1^1}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2^1}{(\gamma_2^1)^2} \left[F_3^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\gamma_2^1}} + F_4^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{\gamma_2^1}} \right] \right\} J_0(\eta \rho) d\eta, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^1 &= \lambda^1 h_1^1 \int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) e^{\frac{\eta z}{\lambda^1}} + \varphi_2(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\lambda^1}} \right] J_1(\eta \rho) d\eta - A_{44}^1 \int_0^\infty \left\{ \frac{1 + K_1^1}{\gamma_1^1} \left[-F_1^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\gamma_1^1}} + F_2^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{\gamma_1^1}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + K_2^1}{\gamma_2^1} \left[-F_3^*(\eta) e^{-\frac{\eta z}{\gamma_2^1}} + F_4^*(\eta) e^{\frac{\eta z}{\gamma_2^1}} \right] \right\} J_1(\eta \rho) d\eta, \end{aligned}$$

де $\varphi_i(\eta) (i=1,2), F_i^*(\eta) (i=\overline{1,4})$ – невідомі функції $d_i^1 = K_i^1 A_{33}^1 - (\gamma_i^1)^2 A_{13}^1$,

$h_2^1 = S_2^2 h_1^1 - a_4^1 / \left[(\gamma_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right]$; S_2^2 – корені рівняння [4, 5].

$$A_{44}^1 S^4 - (A_{11}^1 - A_{12}^1) S^2 + (A_{11}^1 - A_{12}^1)^2 (A_{13}^1 + A_{44}^1) / \left[A_{11}^1 A_{33}^1 - (A_{13}^1)^2 \right] = 0.$$

$$a_1^1 = a_{11}^1 - a_{12}^1, \quad a_2^1 = \frac{a_{11}^1 a_{33}^1 - (a_{13}^1)^2}{a_1^1 a_{11}^1}, \quad a_3^1 = \frac{\beta_{T^1} a_{11}^1 - \alpha_{T^1} a_{13}^1}{a_1^1 a_{11}^1}, \quad a_4^1 = a_3^1 (\gamma_1^1)^2 - \alpha_{T^1} / a_{11}^1.$$

Гранична умова (2) буде задовольнятися, якщо покласти $D_0 = 0, D_k = 0, C_k = 0 (k = \overline{1, \infty})$; $\beta_k = \mu_k / R$, де μ_k – корені рівняння $J_1(\mu_k) = 0$.

Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, призводить до деяких співвідношень між постійними A_n і B_n , у результаті чого температурне поле в циліндрі виражається через одну нескінченну систему постійних $C_k^{(1)}$ за формулою

$$T(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ 1 + C_0^1 \lambda_z^1 \lambda_z^{-1} \lambda^{-1} (\zeta - l) + \lambda_z^{-1} \lambda^{-1} \lambda (\lambda^1)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \frac{\text{sh}[\mu_k (\zeta - l) / \lambda]}{\text{ch}(\mu_k l / \lambda)} \right\} \quad l = \frac{L}{R} (\rho < 1). \quad (18)$$

Граничні умови (3–5) призводять до системи інтегральних рівнянь, які зв'язують функції $\varphi_k(\eta)$ ($k = 1, 2$) з коефіцієнтами $C_k^{(1)}$ ($k = 0, \infty$)

$$\int_0^{\infty} \eta [\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)}, \quad (\rho < 1). \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = f_1(\rho), \quad (\rho < 1). \quad (20)$$

$$\int_0^{\infty} [(K_2 + \eta) \varphi_1(\eta) + (K_2 - \eta) \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho \geq 1). \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(\eta - K_1) e^{\frac{-\eta h}{\lambda^1}} \varphi_1(\eta) - (\eta + K_1) e^{\frac{\eta h}{\lambda^1}} \varphi_2(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad (22)$$

$$\text{де } f_1(\rho) = T_0 \left\{ 1 - C_0^1 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{1}{\lambda} \left(\ell + \frac{1}{h_0^1} \right) - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\lambda}{\lambda_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(th \mu_k \ell + \frac{\mu_k}{\lambda h_0^1} \right) J_0(\mu_k \rho) C_k^1 \right\} \quad (\rho > 1). \quad (23)$$

$$h = H / R; \quad K_1 = \lambda^1 H_1 R, \quad K_2 = \lambda^1 H_2 R, \quad h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z}.$$

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля [7] до рівняння (22), отримаємо систему рівнянь відносно функцій $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$, розв'язок яких має вигляд

$$\varphi_1(\eta) = \frac{(\eta + K_1) e^{\eta h / \lambda^1} \varphi(\eta)}{2Q(\eta)}; \quad \varphi_2(\eta) = \frac{\eta - K_1}{2Q(\eta)} e^{-\eta h / \lambda^1} \varphi(\eta), \quad (24)$$

$$\text{де } Q(\eta) = (\eta^2 + K_1 K_2) \text{sh} \frac{\eta h}{\lambda^1} + (K_1 + K_2) \eta \text{ch} \frac{\eta h}{\lambda^1}, \quad \varphi(\eta) = (K_2 + \eta) \varphi_1(\eta) + (K_2 - \eta) \varphi_2(\eta).$$

Підставивши функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$ у рівняння (21), отримаємо

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1). \quad (25)$$

Задовольнивши граничні умови (7) для напруження $\sigma_z^1(\rho, 0)$ і переміщення $u_z^1(\rho, 0)$ на поверхні шару, отримаємо такі:

$$u_z^1(\rho, 0) = \frac{R}{\alpha_0} \int_0^{\infty} [1 - G(2\eta h)] \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - R \int_0^{\infty} \frac{A_1(\eta) \varphi_1(\eta) + A_2(\eta) \varphi_2(\eta)}{\eta \cdot Q_1(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \int_0^{\infty} \eta \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (26)$$

$$\text{де } \frac{d_1^1}{(\gamma_1^1)^2} [F_1^*(\eta) + F_2^*(\eta)] + \frac{d_2^1}{(\gamma_2^1)^2} [F_3^*(\eta) + F_4^*(\eta)] - R(\lambda^1)^2 h_1^1 [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)] = \eta R \Phi(\eta),$$

$$\begin{aligned} & \left[-F_1^*(\eta)e^{\eta h/\gamma_1} + F_2^*(\eta)e^{-\eta h/\gamma_2} \right] \frac{K_1^1}{\gamma_1^1} + \left[-F_3^*(\eta)e^{\eta h/\gamma_2} + F_4^*(\eta)e^{-\eta h/\gamma_1} \right] \frac{K_2^1}{\gamma_2^1} - \\ & - a_1^1 h_2^1 \lambda^1 R \left[\varphi_1(\eta)e^{-\eta h/\lambda^1} - \varphi_2(\eta)e^{\eta h/\lambda^1} \right] = 0. \\ Q_1(\eta) &= sh(\alpha h \eta) + \frac{\alpha}{\beta} sh(\beta h \eta), \quad G(2\eta h) = 1 - \frac{ch(\alpha h \eta) - ch(\beta h \eta)}{Q_1(\eta)}, \quad \alpha = \frac{1}{\gamma_1^1} + \frac{1}{\gamma_2^1}, \\ \beta &= \frac{1}{\gamma_2^1} - \frac{1}{\gamma_1^1}, \quad \mathfrak{a}_0 = \frac{A_{11}^1(\gamma_2^1)^2 + A_{13}^1}{A_{11}^1(\gamma_1^1 + \gamma_2^1)} d_1^1, \\ A_1(\eta) &= q_1 K_1 P_6(\eta) - q_1 P_3(\eta) Q_1(\eta) - q_2 sh \frac{\eta h}{\gamma_2^1} ch \frac{\eta h}{\gamma_1^1} P_3(\eta) + q_3 sh \frac{\eta h}{\gamma_1^1} sh \frac{\eta h}{\gamma_2^1} P_4(\eta) + q_2 K_1 sh \frac{\eta h}{\gamma_2^1}, \\ A_2(\eta) &= -q_1 P_6(\eta) + q_1 K_2 Q_1(\eta) + q_2 K_2 sh \frac{\eta h}{\gamma_2^1} ch \frac{\eta h}{\gamma_1^1} + q_3 \eta sh \frac{\eta h}{\gamma_1^1} sh \frac{\eta h}{\gamma_2^1} - q_2 sh \frac{\eta h}{\gamma_2^1} P_5(\eta). \quad (27) \\ P_3(\eta) &= \eta sh \frac{\eta h}{\lambda^1} + K_1 ch \frac{\eta h}{\lambda^1}, \quad P_4(\eta) = \eta ch \frac{\eta h}{\lambda^1} + K_1 sh \frac{\eta h}{\lambda^1}, \quad P_5(\eta) = \eta sh \frac{\eta h}{\lambda^1} + K_2 ch \frac{\eta h}{\lambda^1}. \\ P_6(\eta) &= \frac{2}{\gamma_1^1 - \gamma_2^1} \left(\gamma_1^1 sh \frac{\eta h}{\gamma_2^1} - \gamma_2^1 sh \frac{\eta h}{\gamma_1^1} \right), \\ q_1 &= \lambda^1 \left[a_1^1 h_2^1 - \frac{K_1 h_1^1}{A_{44}^1(1 + K_1^1)} \right], \quad q_2 = \frac{2 \lambda^1 h_1^1 \gamma_1^1 A_{11}^1 (\gamma_1^1 + \gamma_2^1)}{\left[A_{11}^1 (\gamma_2^1)^2 + A_{13}^1 \right] (1 + K_1^1) A_{44}^1}, \\ q_3 &= \frac{2 (\gamma_1^1)^2 (\gamma_1^1 + \gamma_2^1) h_1^1 (\lambda_1^1)^2 A_{11}^1}{d_1^1 \left[A_{11}^1 (\gamma_2^1)^2 + A_{13}^1 \right]}. \end{aligned}$$

Задовольнивши граничні умови (6), доходимо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi(\eta)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{a}_0} \int_0^\infty \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta &= -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\mathfrak{a}_0} \int_0^\infty G(2\eta h) \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \\ &- \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{A_1(\eta) \varphi_1(\eta) + A_2(\eta) \varphi_2(\eta)}{Q_1(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (0 \leq \rho \leq 1). \end{aligned} \quad (28)$$

$$\int_0^\infty \eta \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1). \quad (29)$$

Якщо ввести функцію $f(t)$ співвідношенням

$$\Phi(\eta) = \mathfrak{a}_0 \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt, \quad (30)$$

то рівняння (29) задовольняється тотожно, а рівняння (28) зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^{\rho} \frac{f(t)dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(\rho), \quad (31)$$

розв'язок якого, відповідно [8] визначаємо за формулою

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho) d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \quad \text{де} \quad (32)$$

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\alpha_0} \int_0^{\infty} G(2\eta h) \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{A_1(\eta) \varphi_1(\eta) + A_2(\eta) \varphi_2(\eta)}{Q_1(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta. \quad (33)$$

Підставивши вираз (33) у формулу (32), отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $f(t)$

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^{\infty} G(2\eta h) \cos \eta t \cos \eta x d\eta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{A_1(\eta) \varphi_1(\eta) + A_2(\eta) \varphi_2(\eta)}{Q_1(\eta)} \cos \eta t d\eta, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (34)$$

Контактні напруження під штампом $\sigma_z^1(\rho, 0)$ (26), з урахуванням (30), визначаємо за формулою

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \alpha_0 \left[\frac{f(1)}{\sqrt{1 - \rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right], \quad (\rho < 1). \quad (35)$$

Використовуючи умову рівноваги штампа $P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z^1(\rho) d\rho$ і вираз (35), рівняння (34) зводиться до вигляду

$$f(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^{\infty} G(2\eta h) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = -\frac{P}{2\pi R^2 \alpha_0} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{A_1(\eta) \varphi_1(\eta) + A_2(\eta) \varphi_2(\eta)}{Q_1(\eta)} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (36)$$

Для визначення функції $\varphi(\eta)$ продовжимо рівняння (25) на весь інтервал $(0 \leq \rho \leq \infty)$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = U(1 - \rho) X(\rho), \quad (0 \leq \rho \leq \infty). \quad (37)$$

Тут $U(x)$ – функція Гевісайда; $X(\rho)$ – невідома функція, яку представимо співвідношенням

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k J_0(\mu_k \rho), \quad (38)$$

де $a_k (k = \overline{0, N})$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити; значення N підбирається із умови виконання необхідної точності розв'язку задачі.

Застосувавши до обох частин рівняння (37) формулу обергання інтегрального перетворення Ганкеля, знайдемо функцію $\varphi(\eta)$ через невідомі коефіцієнти a_k

$$\varphi(\eta) = a_0 J_1(\eta) + \eta^2 J_1(\eta) \sum_{k=1}^N \frac{a_k J_0(\mu_k)}{\eta^2 - \mu_k^2}. \quad (39)$$

Підставивши функцію $\varphi(\eta)$ (39) в інтегральні рівняння (19, 20), (36), з урахуванням (24), дійдемо до співвідношень, які зв'язують між собою функцію $f(t)$ і коефіцієнти $C_k^{(1)}$, a_k

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k^{(1)}(\rho) a_k = f_1(\rho), \quad (\rho < 1). \quad (40)$$

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k^{(2)}(\rho) a_k = C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)}, \quad (\rho < 1). \quad (41)$$

$$f(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^{\infty} G(2\eta h) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = -\frac{P}{2\pi R^2 \alpha_0} + \frac{2}{\pi} \gamma^{(r)}(t), \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (42)$$

де $\gamma^{(r)}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta) \eta} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta,$

$$Q_2(\eta) = \frac{1}{2} \left[A_1(\eta) (\eta + \gamma_1) e^{\frac{\eta h}{\lambda_1}} + (\eta - \gamma_1) e^{-\frac{\eta h}{\lambda_1}} A_2(\eta) \right].$$

Використовуючи методику обчислення невласних інтегралів [9], отримаємо такі вирази:

$$\alpha_0^{(j)}(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{P_j(\eta) J_1(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta)} d\eta = r_1^{(j)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_j^*(y_m) K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_k^{(j)}(\rho) = J_0(\mu_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 J_1(\eta) P_j(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \mu_k^2)} d\eta = \frac{P_j(\mu_k)}{Q(\mu_k)} J_0(\mu_k \rho) +$$

$$+ 2 J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^2 P_j^*(y_m) K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)}, \quad (k = \overline{1, N}) (j = 1, 2),$$

де $r_1^{(1)} = \left(\frac{K_1 h}{\lambda_1} + 1 \right) r_2^{(1)}$, $r_2^{(1)} = \left(K_1 \cdot K_2 \frac{h}{\lambda_1} + K_1 + K_2 \right)^{-1}$, $r_1^{(2)} = K_1 r_2^{(1)}$;

$y_m (m = \overline{1, \infty})$ – корені рівняння $Q(iy_m) = 0$;

$$P_1(\eta) = K_1 sh \frac{\eta h}{\lambda_1} + \eta ch \frac{\eta h}{\lambda_1}, \quad P_2(\eta) = \eta \left(\eta sh \frac{\eta h}{\lambda_1} + K_1^1 ch \frac{\eta h}{\lambda_1} \right),$$

$$P_1^*(y_m) = K_1 \sin \frac{y_m h}{\lambda_1} + y_m \cos \frac{y_m h}{\lambda_1}, \quad P_2^*(y_m) = y_m \left(K_1 \cos \frac{y_m h}{\lambda_1} - y_m \sin \frac{y_m h}{\lambda_1} \right),$$

$$Q'(iy_m) = \left[(K_1 K_2 - y_m^2) \frac{h}{\lambda_1} + K_1 + K_2 \right] \cos \frac{y_m h}{\lambda_1} - y_m \left[2 + (K_1 + K_2) \frac{h}{\lambda_1} \right] \sin \frac{y_m h}{\lambda_1},$$

$$\gamma^{(T)}(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N a_k \delta_k(t), \quad \delta_0(t) = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta) Q_2(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta,$$

$$\delta_k(t) = J_0(\mu_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 Q_2(\eta) J_1(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta) (\eta^2 - \mu_k^2)} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta.$$

Помноживши обидві частини рівностей (40, 41) на ρ та $\rho J_0(\mu_{n\rho})$ і проінтегрувавши їх по ρ у межах від 0 до 1, з урахуванням властивостей ортогональності функцій Бесселя і позначень $a_k = T_0 C_k$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів C_k ($k = \overline{0, N}$)

$$\sum_{k=0}^N \alpha_{n,k} C_k = \varepsilon_n \quad (n = \overline{0, N}), \quad (43)$$

де $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_n = 0$ ($n = \overline{1, N}$), $C_0^{(1)} = 2T_0 \sum_{k=0}^N \alpha_{0,k}^{(2)} C_k$,

$$C_k^{(1)} = \frac{2T_0}{\mu_n J_0^2(\mu_n)} \sum_{k=0}^N \alpha_{n,k}^{(2)} C_k, \quad (44)$$

$$\alpha_{0,k} = 2 \frac{\lambda_z^1}{\lambda z} \frac{1}{\lambda} \left(l + \frac{1}{h_0^1} \right) \alpha_{0,k}^{(2)} + \alpha_{0,k}^{(1)}, \quad \alpha_{n,k} = 2 \frac{\lambda_z^1}{\lambda z} \frac{\lambda}{\lambda^1} \left(th \frac{\mu_n l}{\lambda} + \frac{\mu_n}{\lambda h_0^1} \right) \alpha_{n,k}^{(2)} + \alpha_{n,k}^{(1)},$$

$$\alpha_{0,0}^{(j)} = \int_0^1 \rho \alpha_0^{(j)}(\rho) d\rho = \frac{1}{2} r_1^{(j)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{y_m Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_{n,0}^{(j)} = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \alpha_0^{(j)}(\rho) d\rho = 2J_0(\mu_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_n^2) Q'(iy_m)}, \quad \alpha_{0,n}^{(j)} = \alpha_{n,0}^{(j)};$$

$$\beta_{n,k}^{(j)} = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \alpha_k^{(j)}(\rho) d\rho = 2J_0(\mu_k) J_0(\mu_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^3 P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_n^2)(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_{n,k}^{(j)} = \begin{cases} \beta_{n,k}^{(j)}, & k \neq n \\ \beta_{n,k}^{(j)} + \frac{1}{2} \frac{P_j(\mu_n)}{Q(\mu_n)} J_0^2(\mu_n), & k = n. \end{cases}$$

Представимо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = -\frac{P}{2\pi R^2 \alpha_0} \sum_{k=0}^{N_1} P_k(1-2t^2)(2k+1)x_k + \alpha_{T_1} T_0 \sum_{k=0}^{N_1} P_k(1-2t^2)(2k+1)y_k, \quad (45)$$

де x_k, y_k ($k = \overline{0, N_1}$) – невідомі коефіцієнти; $P_k(1-2t^2)$ – функції Лежандра. Тоді рівняння (42), з урахуванням ортогональності функцій Лежандра $P_k(1-2t^2)$ на інтервалі (0, 1), зводиться до знаходження постійних x_n, y_n ($n = \overline{0, N_1}$) із системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N_1} A_{n,k} x_k = P_n, \quad (n = \overline{0, N_1}), \quad \sum_{k=0}^{N_1} A_{n,k} y_k = t_n, \quad (n = \overline{0, N_1}), \quad (46)$$

де $P_0 = 1; P_n = 0 \quad (n = \overline{1, N_1}); t_n = \sum_{k=0}^N C_k^{(1)} \quad i_{n,k} \quad (n = \overline{0, N_1})$.

$$A_{0,0} = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} G(2\eta h) \frac{\sin \eta}{\eta} \tau_0(\eta) d\eta, \quad (47)$$

$$A_{0,k} = 2(-1)^{k+1} (2k+1) \int_0^{\infty} G(2\eta h) \tau_0(\eta) J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta,$$

$$A_{n,0} = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} G(2\eta h) \frac{\sin \eta}{\eta} \tau_n(\eta) d\eta, \quad A_{n,k} = \begin{cases} A_{n,k}^{(1)}, & n \neq k \\ 1 + A_{n,k}^{(1)}, & k = n. \end{cases}$$

$$A_{n,k}^{(1)} = 2(-1)^{k+1} (2k+1) \int_0^{\infty} G(2\eta h) \tau_n(\eta) J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta.$$

$$i_{n,0} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta J_1(\eta) Q_2(\eta) \tau_n(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} d\eta,$$

$$i_{n,k} = \frac{4}{\pi} J_0(\mu_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 J_1(\eta) Q_2(\eta) \tau_n(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta) (\eta^2 - \mu_k^2)} d\eta, \quad k = \overline{0, N}; \quad n = \overline{0, N^1},$$

$$\tau_0(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\cos \eta}{\eta} - \frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} \sin \eta \right),$$

$$\tau_n(\eta) = \frac{1}{4} \eta \gamma_n \left(\frac{\eta}{2} \right) \left[\gamma_{n-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) - \gamma_{n+1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \right] - \frac{(-1)^n \sin \eta}{2\Gamma(1+n)\Gamma(1-n)}, \quad n = \overline{1, N_1}.$$

$\gamma_n(\eta)$ – сферичні функції.

Температуру в циліндрі, згідно з формулою (18) і позначеннями (44), обчислюємо за формулою

$$T(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ 1 + 2 \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \frac{\lambda}{\lambda^1} \sum_{k=0}^N C_k \left[\frac{\lambda^1}{\lambda^2} (\zeta - l) \alpha_{0,k}^{(2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \rho) \alpha_{m,k}^{(2)}}{\mu_m J_0^2(\mu_m)} \frac{sh[\mu_m (\zeta - l) / \lambda]}{ch(\mu_m l / \lambda)} \right] \right\}, \quad (\rho < 1). \quad (48)$$

Температуру в шарі, згідно з (12, 24, 39), обчислюємо за формулою

$$T^1(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ G_0(\zeta, \rho) C_0 + \sum_{k=1}^N G_k(\rho, \zeta) C_k \right\}, \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad (49)$$

$$\text{де } G_0(\rho, \zeta) = \frac{1 + K_1 \left(\frac{h}{\lambda^1} + \zeta \right)}{K_1 K_2 h / \lambda^1 + K_1 K_2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P^*(y_m, \zeta) K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{Q'(y_m i)} \quad (\rho < 1),$$

$$G_k(\rho, \zeta) = \frac{P(\mu_k, \zeta) I_0(\mu_k \rho)}{Q(\mu_k)} + 2J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^2 P^*(y_m, \zeta) I_0(y_m \rho) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)}, \quad (\rho < 1),$$

$$G_0(\rho, \zeta) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m P^*(y_m, \zeta) K_0(y_m \rho) I_1(y_m)}{Q'(iy_m)}, \quad (\rho > 1),$$

$$G_k(\rho, \zeta) = -2J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^2 P^*(y_m, \zeta) K_0(y_m \rho) I_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)}, \quad (\rho > 1),$$

$$P(\eta, \zeta) = \eta ch \frac{\zeta + h}{\lambda^1} \eta + K_1 sh \frac{h + \zeta}{\lambda^1} \eta,$$

$$P^*(y_m, \zeta) = y_m \cos\left(\frac{h + \zeta}{\lambda^1} y_m\right) + K_1 \sin\left(\frac{h + \zeta}{\lambda^1} y_m\right).$$

Для визначення нормальних напружень під штапом, з урахуванням (35, 45), отримаємо такий вираз:

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \sigma_z^{(p)}(\rho, 0) + \sigma_z^{(T^1)}(\rho, 0), \quad (50)$$

$$\text{де } \sigma_z^{(p)}(\rho, 0) = -\frac{0,5P}{\pi R^2} \left[x_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k (2k+1) T_{2k+1}(\rho) x_k \right], \quad (\rho < 1). \quad (51)$$

$$\sigma_z^{(T^1)}(\rho, 0) = \alpha_{T^1} T_0 \cdot \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[y_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k (2k+1) T_{2k+1}(\rho) y_k \right], \quad (\rho < 1). \quad (52)$$

$T_{2k+1}(\rho)$ – функція Чебишева; $\sigma_z^{(p)}(\rho, 0)$ – силова складова напружень; $\sigma_z^{(T^1)}(\rho, 0)$ – температурна складова напружень.

Щоб отримати ізотропний випадок задачі [10], достатньо у відповідних формулах перейти до границі при $\gamma_1^{(1)} \rightarrow \gamma_2^{(1)} \rightarrow 1$, $S_1^{(1)} \rightarrow S_2^{(1)} \rightarrow 1$, $K_1^{(1)} \rightarrow K_2^{(1)} \rightarrow 1$, покласти $\lambda = \lambda^1 = 1$, $\alpha_{T^1} = \beta_{T^1}$ і виразити модулі пружності $A_{ij}^{(1)}$ та коефіцієнти деформації через пружні постійні ізотропного тіла [6].

Розглянуто числовий приклад для трансверсально-ізотропного матеріалу – магнію. При цьому розв'язували системи лінійних алгебраїчних рівнянь (44) і (46) з 20-ма невідомими, що забезпечувало точність до 5%.

На рисунку 1 і 2 показано розподіл безрозмірної температури $\alpha_1(\rho) = T^1 / T_0$ і температурної складової нормального напруження $\alpha_2(\rho) = \sigma_z^{T^1}(\rho, 0) / \alpha_{T^1} T_0 \alpha_0$ уздовж безрозмірної координати ρ при $l = 2$; $h = 2$; $K_1^1 = \infty$, $K_2^1 = 0,5$, $\lambda_z / \lambda_z^1 = 0,1$ та різними значеннями контактної провідності $h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z}$.

Пунктирною лінією зображено графіки для ізотропних матеріалів.

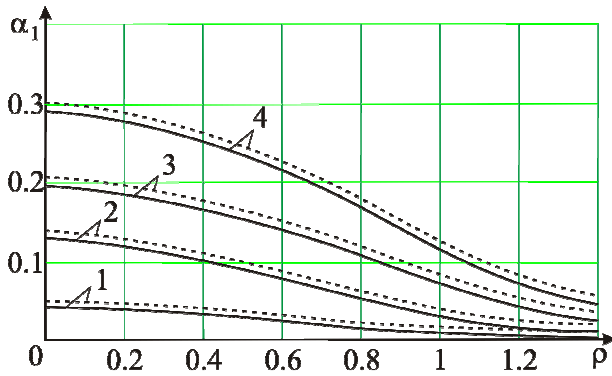


Рисунок 1. Розподіл температури $\alpha_1 = T^1(\rho)/T_0$ для різних значень контактної провідності: крива 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 5$; 4 – $h_0^1 = \infty$

Figure 1. Temperature distribution for different values of contact conductivity curve

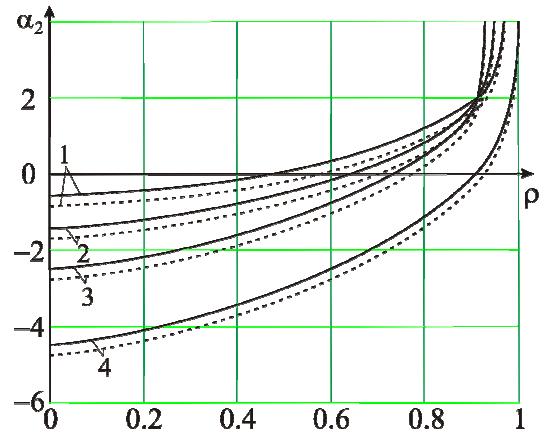


Рисунок 2. Розподіл температурної складової контактних нормальних напружень для різних значень контактної провідності: крива 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 5$; 4 – $h_0^1 = \infty$

Figure 2. Temperature component distribution of contact normal stresses for different values of contact conductivity curve

Висновки. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є, розв'язок температурної задачі зведено до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля та їхні градієнти в будь-якій точці циліндра і шару, а також нормальні напруження у зоні контакту.

Результати розрахунків для магнію показують, що у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів, порівняно з ізотропними, температура в зоні контакту зменшується, а температура складова контактних напружень збільшується у межах 6–8%.

Дослідження показують, що контактна провідність h_0^1 значно впливає на розподіл температури і температурної складової нормального напруження у зоні контакту системи тіл циліндр–шар.

Conclusion. Taking advantage of the Hankel integral transformation and the Fourier method the solution of temperature task deals with the determination of some constants from the system of the linear algebraic equations due to which the temperature fields and their gradients in any point of the cylinder and the layer are found as well as normal stresses in the contact area.

The results of calculation for magnesium testify, that in the case of transversal-isotropic materials, as compared with isotropic ones, the temperature in the contact area decreases, while the temperature component of the contact stresses increases within 6–8%.

Investigations testify that contact conductivity h_0^1 effects sufficiently the temperature distribution and the temperature component of the normal stress in the contact area of the system cylinder-layer.

Список використаної літератури

1. Грилицкий, Д.В. Осесимметричные контактные задачи упругости и термоупругости [Текст] / Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Изд.-во при Львов. ун.-те, 1981. – 135с.
2. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний півпростір з врахуванням

- неідеального теплового контакту [Текст] / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2006. – №3. – С. 26–33.
3. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на трансверсально-ізотропний простір при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2010. – №1. – С. 32–40.
 4. Axisymmetrical thermal stresses in transversely isotropic bodies [Text]: Singh A. / Arch. mech. Stosowanej, 1960, vol. 12, №3.
 5. Stress distributions within solids of revolution [Text]: Singh A. / Z. angew. Math. And Mech, 1959, Bd39, №12.
 6. Лехницький С.Г. Теорія еластичності анізотропного тіла [Текст] / С.Г. Лехницький. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
 7. Снеддон, І.П. Преобразование Фурье [Текст] / І.П. Снеддон. – М., 1955. – 668с.
 8. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа [Текст] / Э.Т. Уиттекер, Г.М. Ватсон. – М.: Физматгиз, 1963. – 343 с.
 9. Мигович, Ф.М. Обчислення групи невластних інтегралів, які містять функції Бесселя І-го роду [Текст] / Федір Мигович, Богдан Окрепкий // Збірник наукових праць академії наук України. – К., 1995. – №8 – С. 133–137.
 10. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний шар з урахуванням неідеального теплового контакту [Текст] / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2011. – Т.16. – №2. – С. 42–52.

Отримано 10.09.2012