Євтух П. Оцінювання точності обчислювальної процедури розрахунку параметрів теплового поля при обмеженій точності вхідних даних / Євтух П., Ткачук Р., Липницький В. // Вісник ТНТУ. — 2012. — Том 66. — № 2. — С.164-173. — (приладобудування та інформаційно-вимірювальні технології).

УДК 519.6

П. Євтух, докт. техн. наук; Р. Ткачук, докт. техн. наук; В. Липницький

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ПРОЦЕДУРИ РОЗРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ПРИ ОБМЕЖЕНІЙ ТОЧНОСТІ ВХІДНИХ ДАНИХ

Резюме. *Розрахунок теплових полів з допомогою сучасних обчислювальних засобів часто зводиться до розв'язку систем лінійних рівнянь, вхідні дані яких є сигналами первинних датчиків і відомі з обмеженою точністю. Викладений підхід дає об'єктивні кількісні межі, в яких від обчислювальної процедури можна домогтися необхідної точності, і вказує шлях, яким потрібно до цього наближатися. Розрахунок із застосуванням комп'ютерних методів у цьому випадку може бути неоднозначним. Тому з безлічі обчислювальних процедур необхідно вибрати таку, яка забезпечує необхідну точність розрахунку. Для підвищення точності результатів розрахунку теплових полів необхідною умовою є вибір оптимального порядку матриці, коли ще не порушена просторова деталізація поля, забезпечена необхідна роздільна здатність і досягнута висока інформативність вимірювальної системи. Щоб підтвердити необхідну точність і забезпечити єдину методику використання вибраної обчислювальної процедури, необхідно розробити процедуру її оцінювання.*

Ключові слова: *характеристики точності, теплові поля, обчислювальні функції, обчислювальні процедури, оцінювання точності, обмежена точність вхідних даних, методи обчислень.*

P. Evtukh, R. Tkachuk, V. Lypnytskyy

EVALUATION OF THE ACCURACY OF COMPUTATIONAL PROCEDURE FOR CALCULATION OF PARAMETERS OF THERMAL FIELD WITHIN THE LIMITED ACCURACY OF DATA INPUT

The summary. *The calculation of thermal fields with the help of modern computing facilities often deal only with the solving systems of linear equations, input signals of which are the primary sensors meters and are known for their limited accuracy. The approach enables to mark objective quantitative limits within which computational procedures can achieve the required accuracy. The application of analytical expressions for the evaluation of thermal field, calculation by the computer methods of parameters in this case can be different. Since the transformation was carried out by real environments and are not isometric, that is for real environments the necessary conditions are not fulfilled. Violation of these conditions is caused by different loss of information during its passage through the environment – this is dispersion selection, incomplete aperture of the data collection, uncontrolled changes in the operator environment, obstacles in transforming of data, distortion of information, etc. Output error values of measuring of converters can be significantly increase directly by the information-measuring system. To evaluate the efficiency of the system operation it is necessary to calculate this impact on its accuracy and informative character especially when sufficient input data are not available. The paper presents the method of approach to data processing and evaluation of the measurement experiment while calculating the network losses of heat in a limited number and accuracy of input data. If the computational procedure does not provide the required accuracy, the right part in the system of equations must be changed which, practically, means to correct the measurement experiment, which requires additional resources (change of sensors and their spatial location, improvement of the measurement accuracy, etc.). This* *approach allows to provide optimization of the selected computational procedure and to minimize the resources to find the losses in the heating network of the city.*

Key words: *precision features, metrological characteristics, thermal fields, computing functions, computational procedures, estimation of accuracy, limited accuracy of data input, methods of calculation.*

Постановка проблеми. Розрахунки теплових полів ґрунтуються на розв'язках рівнянь математичної фізики і є ефективним засобом виявлення теплових втрат у мережах теплопостачання. Особливо це актуально в умовах ощадності та енергозбереження. Для цього випадку математичні моделі теплового поля в середовищі забезпечують пояснення значної кількості фізичних явищ, що зустрічаються при дослідженнях втрат тепла у тепломережах та виявлення факторів, які впливають на зміну параметрів поширення тепла, швидкості його розсіювання та інші характеристики.

Розв'язування задач інформаційно-вимірювального плану для теплового поля, у першому наближенні, як правило, пов'язано з лінійними ефектами взаємодії тепла з оточуючим середовищем і описується системами лінійних рівнянь різного порядку, в тому числі й досить високого. При цьому функції вхідних взаємодій у цих рівняннях (зазвичай їх праві частини), а також коефіцієнти системи рівнянь (матриці) містять похибки, пов'язані з похибками датчиків, зокрема датчиків теплового поля. Це призводить до похибок розв'язків систем лінійних рівнянь. Крім того, на похибку розв'язку систем лінійних рівнянь впливають невизначеність порядку системи, помилки у розташуванні просторових координат датчиків, часові зміщення зняття показів з датчиків тощо. Похибки розв'язку систем рівнянь визначають, у першу чергу, значення похибки при виборі процедур оцінювання втрат тепла у тепломережах.

Аналіз досліджень і публікацій. Відомо, що вихідні значення похибок (для датчиків, вимірювальних перетворювачів) можуть значно підвищуватися інформаційно-вимірювальною системою [1]. Для оцінювання ефективності роботи системи необхідно кількісно розрахувати цей вплив на її точність. Як відомо, він, найперше, пов'язаний з коефіцієнтом обумовленості розв'язуваної системи лінійних рівнянь при обраній нормі матриці системи.

Оскільки умови вимірювального експерименту для теплового поля не завжди можуть бути обрані довільно, то відповідні розрахункові системи рівнянь можуть виявитися і погано обумовленими, і надмірними, а також виродженими або суперечливими. Тому для фізично обґрунтованої інтерпретації результатів розрахунків конструкція системи рівнянь повинна бути обрана з певною обережністю і в процесі розрахунку піддаватися коригуванню. Ця ситуація аналогічна розрахунку лінійних електричних кіл за схемами заміщення, вид яких може сильно змінюватися залежно від змісту розв'язуваної задачі. Особливо сильно на рішення можуть вплинути малі параметри, які призводять до появи малих додатних коренів характеристичних рівнянь.

Однак на практиці, при використанні обчислювальної процедури розрахунку теплового поля, дослідник, як правило, перевіряє працездатність зазначеної процедури по контрольній задачі шляхом застосування ПК і часто вважає, що, вибравши достатню швидкодію і метод розрахунку, він забезпечить з необхідною точністю вирішення реального завдання. Часто заспокоює велике число розрядів у тестовому розрахунку, і дослідники вважають, що існує такий же запас точності при надходженні вхідних даних із реальних датчиків, що володіють обмеженою точністю.

Спроба наблизити тестові завдання до реальних, шляхом введення невеликих похибок (збурень) в матрицю розв’язуваної системи рівнянь, призводить до того, що зазначена матриця стане виродженою, а система рівнянь виявиться непридатною для розрахунків теплових полів. Це, в свою чергу, потребує коректності застосування дискретного обчислювача, оцінювання його впливу на похибки первинних даних та їх трансформацію при обчисленнях, тобто вміння вибирати і визначати характеристики точності розрахунку.

Розрахунок теплових полів з допомогою сучасних обчислювальних засобів часто зводиться до розв’язання систем лінійних рівнянь, вхідні дані яких є сигналами первинних датчиків і відомі з обмеженою точністю. Розрахунок у даному випадку може бути неоднозначним. У різних дослідників розв’язок однієї і тієї ж задачі, наприклад, у програмному середовищі MatLab, може бути виконаний з різною точністю [1, 2]. В даному випадку необхідно з безлічі обчислювальних процедур вибрати ту, яка забезпечує необхідну точність розрахунку [3, 4]. Щоб підтвердити цю точність і забезпечити єдину методику використання вибраної обчислювальної процедури, необхідно розробити процедуру її оцінювання. Проте, з першого погляду, окрім похибки розрахунку, яку складно визначити, також абсолютно не зрозуміло, як визначати інші характеристики точності, який їх порядок і чи є вони взагалі.

Для визначення таких оцінок при розв’язанні систем лінійних рівнянь необхідно враховувати ту обставину, що при складанні вказаної системи рівнянь на базі експериментальних даних апостеріорно є ряд чинників, які можуть бути покладені в основу вибору метрологічних характеристик. Перший фактор – це похибки вхідних даних, що мають, як правило, систематичну та випадкову складові. Другий – похибка коефіцієнтів матриці, третій – невідома висота матриці (кількість рядків), часто залежить від умов експерименту, кількості точок сканування, розташування точок спостереження за параметрами поля. Нарешті, четвертий чинник – це невідома ширина матриці (кількість стовпців), що визначається або тривалістю вимірювального експерименту, або створенням бази даних отриманих результатів та іншими чинниками. Очевидно, що при зміні висоти і ширини матриці, а для квадратичних матриць, відповідно, їх порядку, змінюватимуться деякі характеристики точності розрахунку теплового поля, зокрема просторова роздільна здатність тощо. Вплив цих особливостей та потреба враховувати зміни теплофізичних властивостей і параметрів [5] теплового поля при розв’язуванні систем лінійних рівнянь оцінювання точності розглядається в цьому дослідженні.

Метою роботи є розроблення методу оцінювання результатів вимірювального експерименту при розрахунку втрат у мережах теплопостачання міста при обмеженій кількості й точності вхідних даних.

Постановка завдання і результати досліджень. При розрахунку теплових полів, як правило, результат обчислень, як і початкові функції, представлено розкладанням по простіших функціях, що є ортами розкладання,

$$f(x_0, y_0) = \sum_i \overline{a_i}(x_0, y_0) \cdot e_i(x_0, y_0), \quad (1)$$

де $e_i(x_0, y_0)$ – базисний орт початкової системи функцій, по якій проводимо розкладання; $\overline{a_i}(x_0, y_0)$ – фазор, координата розкладання по базису e_i.

Функція (1), якщо йдеться про деякі початкові функції (функції первинного поля), можуть мати й деяке інше інформаційне тлумачення [3, 5]. Функції, за якими представляється $f(x_0,y_0)$, можуть володіти деякими властивостями, інформаційними ознаками, а $\overline{a_i}(x_0, y_0)$ – фазор, який характеризує цю властивість кількісно. Наприклад, якщо початкова функція характеризує теплове поле випромінювання двомірної поверхні, то базисний орт відображає точку, або малу площину, на яких розкладена уся поверхня, а $\overline{a_i}$ – фазор теплового поля цієї площини, x_0, y_0 – координати цієї площини.

При проходженні теплової хвилі виду (1) через довільне середовище функція $f(x_0,y_0)$, як правило, змінюється середовищем, що математично відображається ядром перетворення $h(x_0, y_0, x_1, y_1)$, де x_1, y_1 – просторові координати на виході середовища, а функція, що відображає початкове поле, перетвориться до виду

$$F(x_1, y_1) = \sum_{x_0, y_0} f(x_0, y_0) \cdot h(x_0, y_0, x_1, y_1), \tag{2}$$

де x_0, y_0 – межі інтегрування первинного поля.

Оскільки всякий вимір параметрів поля здійснюється в дискретних точках, то співвідношення (2) необхідно представити у вигляді:

$$F(i_1, j_1) = \sum_{I_0, J_0} f(i_0, j_0) \cdot h(i_0, j_0, i_1, j_1). \tag{3}$$

Подальше перетворення функції $F(i_1, j_1)$ визначається змістом поставленого завдання. Найчастіше цей зміст визначає два типи завдань. Перший тип пов’язаний з тим, щоб з мінімальною похибкою відновити функцію $f(i_0, j_0)$, знаючи ядро перетворення h, тобто за експериментальними даними F і ядром h відновити функцію джерела теплового поля. Другий тип завдань пов’язаний з відновленням ядра h як функції чотирьох змінних за відомою функцією f і експериментально визначеною функцією F. І в одному, і в іншому випадку задача зводиться до розв’язання систем лінійних рівнянь, у правих частинах яких знаходяться значення $F(i_1, j_1)$, визначені експериментально.

Якщо розглядати перший тип завдань, тобто за ядром h та експериментальними даними F відновити функцію $f(i_0, j_0)$, то подальші математичні перетворення пов’язані з розв’язання систем лінійних рівнянь типу (3). З цією метою підбирається деякий оператор з ядром $k(i_1, j_1, i_2, j_2)$, зворотний ядру h, а потім здійснюється перетворення

$$\tilde{f}(i_2, j_2) = \sum_{I_1, J_1} \left[\sum_{I_0, J_0} f(i_0, j_0) \cdot h(i_0, j_0, i_1, j_1) \right] k(i_1, j_1, i_2, j_2), \tag{4}$$

де I_1, J_1 – граничні значення координат поля спостереження.

Змінюючи порядок підсумовування в співвідношенні (4), отримуємо

$$\tilde{f}(i_2, j_2) = \sum_{I_0, J_0} f(i_0, j_0) \left[\sum_{I_1, J_1} h(i_0, j_0, i_1, j_1) k(i_1, j_1, i_2, j_2) \right]. \tag{5}$$

Вираз у квадратних дужках у співвідношенні (5) є деяким ядром, еквівалентним двом перетворенням

$$m(i_0, j_0, i_2, j_2) = \sum_{I_1, J_1} h(i_0, j_0, i_1, j_1) k(i_1, j_1, i_2, j_2), \tag{6}$$

яке здійснює процедуру дифракції – фокусування. Функція $\widehat{f}(i_2, j_2)$ є розв'язком системи рівнянь, який у загальному випадку відрізняється від $f(i_0, j_0)$.

Надалі, для прикладу, розглядатимемо деяке одновимірне поле. Тоді для цього спрощеного випадку вираз (5) представляється у вигляді

$$\hat{f}(i_2) = \sum_{I_0} f(i_0) \cdot m(i_0, i_2). \tag{7}$$

Цей вираз при зміні i_2 від одиниці до I_2 є лінійною системою рівнянь, в якій $f(i_0)$ при $i_0 = 1 \div I_0$ шукане рішення. $m(i_0, i_2)$ – при $i_0 = 1 \div I_0$. $i_2 = 1 \div I_2$ – дає коефіцієнти матриці системи, $\hat{f}(i_2)$ при $i_2 = 1 \div I_2$ – значення правої частини.

Представимо систему (7) у зручному для подальших досліджень вигляді

$$\sum_{i=1}^{I} x_i m_{ji} = f_j \ , \tag{8}$$

чи в матричному вигляді $MX = F$.

Відновлення функції, що відображає поле, пов'язано таким чином з розв'язанням лінійної системи рівнянь (8). Для розв'язання цієї системи рівнянь необхідно провести зворотну операцію, яка зводиться до знаходження зворотної матриці M^{-1}, що в більшості випадків неможливе, оскільки величини I і J, як правило, не рівні між собою. Тому розв'язок системи (8) знаходять як розв'язок нормальної системи [6]

$$M^T M X = M^T F. \tag{9}$$

Співвідношення (9) мінімізує неув'язку розв'язку системи (8), де M^T – транспонована до M матриця.

Нормальна матриця $M^T M$ має й іншу інтерпретацію. Якщо кожен рядок матриці M вважати вектором $\overrightarrow{m_j}$ з компонентами $m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jI}$, то кожен елемент нормальної матриці є скалярним добутком цих векторів

$$\begin{vmatrix} (\overrightarrow{m_1}\overrightarrow{m_1})(\overrightarrow{m_1}\overrightarrow{m_2})\dots(\overrightarrow{m_1}\overrightarrow{m_I}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\overrightarrow{m_J}\overrightarrow{m_1})(\overrightarrow{m_J}\overrightarrow{m_2})\dots(\overrightarrow{m_J}\overrightarrow{m_I}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{m_1}\overrightarrow{f} \\ \overrightarrow{m_2}\overrightarrow{f} \\ \dots\dots \\ \overrightarrow{m_J}\overrightarrow{f} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

де I і J – відповідно кількість стовпців і рядків.

Нормальна матриця має ще одну інтерпретацію. Розглянемо компоненти функції $f(i)$, $i = 1 \div I$ як I-мірний вектор $\vec{f}$ і поставимо задачу розкладання його за набором векторів – рядків $\overrightarrow{m_j}$, число яких J: $\vec{f} = \sum_{j}^{J} x_j \overrightarrow{m_j}$ і $j = 1 \div J$.

Тоді значення x_j визначаються з системи рівнянь, яка отримується при скалярному множенні векторів на вектор $\overrightarrow{m_k}$, тобто

$$\left(\overrightarrow{m_k}\overrightarrow{f}\right) = \sum_j^J x_j \left(\overrightarrow{m_k}\overrightarrow{m_j}\right). \tag{11}$$

Як результат цієї операції знову отримуємо систему рівнянь (10). Дії, пов’язані з розв’язанням системи рівнянь (10) як системи визначальної координати розкладання вектора $\overrightarrow{f}$ по векторах $\overrightarrow{m_j}$, можуть бути проведені і простіше, якщо відомий зв’язаний з векторами $\overrightarrow{m_j}$ базис $\overrightarrow{e_j}$, який задовольняє умову

$$\left(\overrightarrow{e_j}\overrightarrow{m_k}\right) = \begin{Bmatrix} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

У цьому випадку невідомі легко визначаються зі співвідношення

$$x_j = \left(\overrightarrow{e_j}\overrightarrow{f}\right). \tag{13}$$

У наведених міркуваннях центр ваги розв’язання системи рівнянь (8) з операції знаходження зворотної матриці перенесений на операцію знаходження матриці зворотної до нормальної. Використання останньої операції виправдане тим, що нормальна матриця дещо простіша, вона симетрична і, отже, квадратна незалежно від матриці M. Слід зазначити, що коефіцієнти нормальної матриці показують як близькі, або далекі, від лінійної залежності рядка матриці M, є вона виродженою чи ні. Це має важливе значення для наступного кількісного оцінювання процедури розв’язку системи лінійних рівнянь. Нарешті, систему (8) можна розглядати і в плані перетворення сигналів від первинних вимірювальних перетворювачів, де функцію перенесення сигналу відображає стовпець $\overrightarrow{m_i} = m_{1i}, m_{2i}, ..., m_{ji}$, де m_{ji} – значення i-го переносника в j-ий момент часу, або на j-ій просторовій координаті; x_i – амплітудне значення передаваної функції при i-му переноснику. У різні дискретні моменти в кожній просторовій координаті j сума сигналів з амплітудами x_i дорівнює $f(i)$. Визначення x_i пов’язане з розподілом функцій переносників, що досягається фільтрацією. Математично це здійснюється шляхом застосування операції скалярного добутку. Зв’язаний базис $\overrightarrow{\ell_i}$ – це функції, що фільтрують, а процедура утворення скалярного добутку – це фільтрація за функціями-переносниками. Зокрема, для періодичних функцій такими функціями-переносниками є синусні й косинусні функції часу. Успіх фільтрації визначається властивостями матриці рівняння (8), тобто коефіцієнтами m_{ji}. Якщо вектори рядків або стовпців взаємно ортогональні, то фільтрація ідеальна, якщо ні, то побудова зв’язаного базису або зворотної матриці ускладнюється. Крім того, при істинних коефіцієнтах вона залежить від числа обумовленості матриці $V(M)$ [7]. При цьому число обумовленості $V(M)$ дорівнює добутку норми матриці $\|M\|$ на норму зворотної матриці $\|M^{-1}\|$, де $\|M\|$ – одна з прийнятих норм матриці. Число обумовленості більше одиниці. Для ортогональної матриці воно дорівнює одиниці й різко зростає для вироджених матриць, у яких рядки і стовпці близькі до лінійно залежних. Очевидно, що знижуючи порядок матриці можна домогтися зниження числа обумовленості, тобто отримати краще обумовлену матрицю. Проте при цьому порушується просторова деталізація поля, зникають деякі подробиці середовища, що вивчається, які відображає матриця M, що призводить до погіршення просторової роздільної здатності. Якщо матриця погано обумовлена (число обумовленості $V(M)$ – велике), то слід мати на увазі, що причин поганої обумовленості, в основному, три. Перша з них полягає в неортогональності базисів. Завжди реально існує деяка неортогональність базису, оскільки ортогональність – це математична абстракція. Друга причина полягає у властивості оператора перетворення у середовищі. Перетворення, здійснюване реальними середовищами, не є ізометричними, тобто для реальних середовищ не виконується умова $(x, y) = (M_x, M_y)$. Порушення цієї рівності виникає внаслідок різних як відомих, так і невідомих втрат інформації в процесі її проходження через середовище – це і дисперсність відбору, неповна апертура збору інформації (мале значення j), неконтрольовані зміни оператора середовища M, перешкоди і так далі. Третя причина поганої обумовленості матриці – неправильне уявлення про оператора M (наприклад, унаслідок недостатньо вивченої фізики процесу або надто спрощеної математичної моделі процесу) і, відповідно, невірний вибір зворотного оператора.

Вказані три причини тією чи іншою мірою впливають на величину числа обумовленості, яке визначає величину відносної похибки результату обчислювальної процедури (відносно його норми)

$$\delta\left\|\vec{x}\right\| = \frac{\left\|\Delta\vec{x}\right\|}{\left\|\vec{x}\right\|} \le \frac{V(M)(\alpha+\beta)}{1-V(M)\alpha}, \tag{14}$$

де $\left\|\Delta\vec{x}\right\|$ – норма абсолютної похибки вектора $\vec{x}$; α і β – відносне збурення норм матриці M і вектора-стовпця правої частини f. Якщо відносна норма матриці мала і $V(M)\alpha \le 1$, то норма відносної похибки результату обчислення дорівнює

$$\delta\left\|\vec{x}\right\| = V(M)\left[\frac{\left\|\Delta M\right\|}{\left\|M\right\|} + \frac{\left\|\Delta f\right\|}{\left\|f\right\|}\right].$$

Звідси випливає, що число обумовленості є показником посилення похибки вхідних даних і матриці при розв’язанні системи лінійних рівнянь.

Таким чином, обумовленість залежить від порядку матриці, який, зрештою, визначається роздільною здатністю системи, з іншого боку, вона визначає норму відносної похибки результату розв’язування системи лінійних рівнянь. Як міру роздільної здатності доцільно узяти величину мінімального інтервалу часу, відстані, смуги частот і так далі, а саме, величину

$$\mu_s = 1/I, \tag{15}$$

де I – кількість стовпців матриці M або ж, що в даному випадку те ж саме, кількість невідомих. Якщо відоме абсолютне значення апертури поля, наприклад, повний просторовий інтервал L або тимчасове T, тоді вираз для роздільної здатності має вигляд

$$\mu_s = L/I \text{ чи } \mu_s = T/I.$$

Зміна кількості стовпців матриць I призводить до зміни числа обумовленості, тобто існує залежність $V = \sigma_1(\mu_s)$. Графічно – це монотонно-спадаюча крива. З іншого боку, похибка залежить від обумовленості й ця залежність має вже монотонно-зростаючий характер $\sigma_2 = \sigma_2(V)$. Для інформаційної амплітудної міри μ_a ця залежність також має монотонно-зростаючий характер.

Якщо прийняти V як параметр, то виключивши її з функцій σ_1 і σ_2, отримаємо функцію зв'язку

$$\mu_a = \sigma(\mu_s)\,. \tag{16}$$

Функція зв'язку (16) є характеристикою точності обчислювальної процедури розв'язання системи лінійних рівнянь.

Амплітудна і просторова міри дозволяють ввести загальну амплітудно-просторову міру для матриці й процедури розв'язання системи лінійних рівнянь, яка дорівнює добутку мір

$$\mu_\Sigma = \mu_a \mu_s \quad м/біт\,. \tag{17}$$

Оскільки число обумовленості змінює співмножники в протилежні сторони (перше – збільшується, а друге – зменшується при збільшенні V), то їх добуток μ – величина, що змінюється не в дуже великих межах. Із співвідношення (17) бачимо, що величина зворотна мірі є інформаційною пропускною спроможністю матриці і слабо залежить від числа обумовленості, а визначається глибшими властивостями оператора.

Нарешті розглянемо конкретні кроки, які необхідно зробити, щоб отримати оцінку точності усієї обчислювальної процедури розв'язання системи лінійних рівнянь.

На базі отриманих результатів розглянемо послідовність кроків для отримання характеристик точності обчислювальної процедури розв'язку системи лінійних рівнянь. Особливо це є важливим для погано обумовленої системи рівнянь.

Як перший крок необхідно задатися видом норми вектора й матриці. Відомо, що таких норм може бути вибрано багато і будь-яка з них, що відповідає асимптотичним вимогам до норми, може бути використана для уточнюючих оцінок. Проте з усього різноманіття норм найчастіше використовуються такі [6, 7]:

- $\|\vec{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$ – октаедрична, або ℓ-норма;
- $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ – Евклідова норма;
- $\|\vec{x}\| = \sqrt[p]{\sum_i |x_i|^p}$ – норма Гельдера, або ℓ_p-норма ($p > 2$)
- $\|\vec{x}\|_\infty = \max |x_i|$ – кубічна норма, або C-норма.

Найчастіше зустрічається Евклідова норма, оскільки вона відображає процедуру наближення початкової функції за допомогою ортогональних функцій.

Аналогічно попереднім нормам матриць, матриця має такі норми:

1. Спектральну, що дорівнює максимальному сингулярному числу, тобто кореню квадратному з найбільшого характеристичного числа нормальної матриці $\|M\| = \alpha_1$ і $\|M^{-1}\| = \alpha_N^{-1}$, де α_1 – найбільше, α_N – найменше сингулярні числа.

2. Матричну C-норму (векторні C-норми індукують матричну C-норму) $\|M\|_c = \max_j \sum_i |m_{i,j}|$.

3. Евклідова $\|M\|_E = \left(\sum_{i,j} |m_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$. Ця норма дорівнює квадрату сліду нормальної матриці $\|M\|_E = \sqrt{t^2 M^T M}$.

4. Найбільш проста $\|M\| = \max_{i,j} |m_{i,j}|$ і норма для квадратних матриць $\|M\|_{C'} = n \max_{i,j} |m_{i,j}|$.

5. Використовуються ще $\sum_{i,j} |m_{i,j}|$ і $\frac{1}{n} \sum_{i,j} |m_{i,j}|$.

Найчастіше для матриць використовуються Евклідові, спектральні і норма (4). Таким чином, після вибору виду норм вектора і матриці, задаємося величинами $\alpha = \frac{\|\Delta M\|}{\|M\|}$ і $\beta = \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}$. Вони визначаються похибкою елементів матриці й похибкою визначення правих частин рівнянь. Якщо матриця задана точно, то $\alpha = 0$, якщо машинний експеримент носить характер модельних досліджень, то $\beta = 0$ і так далі.

Другий крок полягає у визначенні числа обумовленості матриці $V(M)$ і є одним з найскладніших.

Третій крок – це визначення похибки розв’язання системи лінійних рівнянь $\delta \|\vec{x}\| = V(M) \left[\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} + \frac{\|\Delta M\|}{\|M\|} \right]$.

Четвертий крок – визначення амплітудної міри $\mu_a = Cog_2^{-1} \left(1 + \frac{1}{\delta \|\vec{x}\|} \right)$.

П’ятий крок – визначення роздільної здатності розв’язання системи лінійних рівнянь $\mu_s = 1/N$, де N – порядок нормальної матриці. Значення μ_a і μ_s дають одну точку на кривій функції зв’язку оцінок точності розрахунків параметрів.

Шостий крок – фіксується тривалість реального часу обчислень T, якщо в цьому є необхідність і цей параметр є істотним для оцінювання обчислювальної процедури.

Сьомий крок – є характерним для визначення характеристики точності обчислювальної процедури розв’язання систем лінійних рівнянь. Він полягає в тому, що певним чином знижується порядок системи шляхом викреслювання рядків і стовпців матриці та елементів вектора f. Ця операція еквівалентна вибору меншої кількості точок виміру поля. Потім повторюються кроки 2–6 і знаходяться наступні точки функції зв’язку. Так робиться до граничного зниження порядку матриці, тобто до отримання одного рівняння. При останньому рівнянні просторова роздільна здатність системи рівнянь повністю відсутня, тобто в цьому випадку виходить мінімальне значення похибки (статичної похибки) і найгірша роздільна здатність.

Погано обумовлена матриця призводить до великих похибок, тобто неякісний початковий базис $\overrightarrow{m_i}$ дає "погану" матрицю, і міра цієї матриці досить велика. Ці властивості матриці не покращаться ніякими подальшими перетворюваннями, а лише її розрідженням. Ця обставина відображає принципове положення про те, що міра перетворення (невизначеність перетворення) не може бути покращена, можливі лише обмінні процеси між заходами, що досягається шляхом руйнування початкової матриці (виключенням ряду рядків і стовпців). Це пояснюється тим, що розріджуючи матрицю, ми виключаємо рядки і стовпці, близькі до лінійно-залежних, залишкова частина все більше немовби ортогоналізується. При цьому унеможливлюється отримання суперечливих систем рівнянь, зменшується вплив на знаходження помилки правої частини розв'язуваної системи рівнянь та коефіцієнтів матриці. Проте це позитивна властивість при проведенні обчислень виходить в обмін на роздільну здатність, тобто на здатність системи виділити дрібніші деталі поля.

Висновок. Запропоновано формування підходу до опрацювання даних і оцінювання вимірювального експерименту при розрахунку втрат у мережах теплопостачання міста при обмеженій кількості й точності вхідних даних. Якщо обчислювальна процедура не забезпечує необхідної точності, тоді необхідно змінити праву частину у системі рівнянь, яка на практиці означає корекцію вимірювального експерименту, що потребує додаткових ресурсів (зміни кількості датчиків, їх просторового розташування, підвищення точності вимірювання тощо). Цей підхід дозволяє забезпечити оптимізацію вибраної обчислювальної процедури і мінімізації ресурсів для визначення втрат у мережі теплопостачання міста.

Conclusion. The paper presents the formation of approach to data processing and evaluation of measurement experiment in the calculation of network losses of heat in a limited number and accuracy of input data. If the computational procedure does not provide the required accuracy, the right part in the system of equations must be changed, which practically means to correct the measurement experiment, which requires additional resources (change of sensors and their spatial location, improvement of the measurement accuracy, etc.). This approach allows to profile optimization of the selected computational procedure and to minimize the resources to determine the losses in the heating network of the city.

Список використаної літератури

1. Грановський, В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях [Текст] / В.А. Грановский, Т.Н. Сирая. –Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 288с.
2. Алтунин, А.Е. Модели й алгоритмы принятия решений у нечетких условиях: монография [Текст] / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: ТГУ, 2000. – 352с.
3. Pratt, T.M. Современные языки программирования. Разработка и реализация [Текст] / T.M. Pratt, M.V. Zelkovicz; пер. с англ. – СПб: Питер, 2002. – 688с.
4. The Semantic Web Revisited / N. Shadbolt, W. Hal, T. Berners-Lee [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http:www.computer.org.
5. Селиванова, З.М. Интелектуализация информационно-измерительных систем неразрушающе-го контроля теплофизических свойств твердых материалов [Текст] / З.М. Селиванова. – М: Машиностроение-1, 2006. – 184с.
6. Баклемышев, Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры [Текст] / Д.В. Баклемышев. – М.: Наука, 1983. – 185с.
7. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1981. – 456с.

Отримано 16.04.2012