

УДК 539.3:620.012

Й. Лучко<sup>1</sup>, докт.техн.наук; М. Ігнатишин<sup>2</sup>;

<sup>1</sup> Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна<sup>2</sup> Мукачівський державний університет

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПЛИТИ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

*Досліджено математичну модель проїзної частини моста, тонкої залізобетонної плити, що описується диференціальним рівнянням Софі Жермен. Отриманий розв'язок пов'язаний з результатами статичних випробувань моста з інтегральною циліндричною жорсткістю. Розраховано циліндричну жорсткість та визначено силові характеристики, що виникають у проїзній частині навантаженого моста під дією дванадцяти локальних сил. Одержані результати мають науковий та прикладний характер, можуть бути використані для прогнозування довговічності мостових конструкцій.*

**Ключові слова:** математична модель, диференціальне рівняння, циліндрична жорсткість, деформація, залізобетонна плита.

**J. Luchko, M. Ihnatyshyn**

## DIFFERENTIAL EQUALIZATION OF DEFORMATION OF FLAG AND HIS APPLICATION

*The mathematical model of part of bridge is explored, thin reinforced concrete flag, is described by differential equalization of Sophie Germen. The got decision is related to the results of static tests of bridge with integral cylinder inflexibility. Cylinder inflexibility is expected and power descriptions, which arise up in part of the loaded bridge under action of twelve local forces, are certain. The got results have a scientific and applied character, can be the use for prognostication of longevity of bridge constructions.*

**Key words:** mathematical model, differential equalization, cylinder inflexibility, deformation, reinforced concrete flag.

**Актуальність теми.** У зв'язку з вступом України в СОТ зростатиме товарообіг, а з ним і кількість та темпи транспортних перевезень. Тому важливим питанням для держави є ремонт і розвиток транспортної інфраструктури, зокрема такого її елемента, як мости [1].

Оскільки мостові конструкції експлуатуються протягом тривалого часу, то доцільно при їх розрахунку та випробуванні оцінити фактичний резерв несучої спроможності конструкції після проявлення її реальних властивостей. Експериментальними дослідженнями встановлено суттєвий вплив довготривалих навантажень на напружено-деформований стан (НДС) конструкцій та перерозподіл зусиль в часі [1,2].

В роботі [3] досліджено вплив зміни жорсткості через появу тріщин та необхідність врахування впливу повзучості на перерозподіл зусиль при довготривалих навантаженнях. Процеси, що приводять до старіння матеріалу [4,5], утворення мікротріщин [6] в макроскопічному плані проявляються як зміна жорсткості, зокрема циліндричної жорсткості моста.

При розрахунку будівельних, мостових конструкцій та вантажопідйомних машин застосовують як традиційні методи, так і метод скінченних елементів [7].

На сьогодні переважають числові методи розрахунку, ефективність яких обґрунтована у [8]. Проте, коли є можливість отримати аналітичний розв'язок, навіть

громіздкий і з застосуванням спрощеної математичної моделі, його варто отримати і застосувати для вивчення досліджуваного об'єкту. Тому в даній праці приведена, хоч і громіздка, формула аналітичного розв'язку вона є надзвичайно потрібна для усвідомлення закономірностей поведінки досліджуваного об'єкту.

**Постановка задачі та її розв'язок.** Метою даної праці є визначення силових характеристик в проїзній частині моста шляхом розгляду одної з моделей, що пов'язує циліндричну жорсткість залізобетонної плити, конструктивного елемента моста, та величину її прогину при навантаженні. Напружено-деформований стан плити можна записати таким рівнянням [9]:

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 w = q, \quad (1)$$

де  $D$  - циліндрична жорсткість плити;  $\nabla^2$  - оператор Лапласа;  $w$  - поперечна деформація плити;  $q$  - питома навантаження.

Диференціальне рівняння (1) при певних крайових умовах можна застосувати для моделювання деформації проїзної частини моста.

Представимо статично навантажений міст як ізотропну залізобетонну плиту з ефективною товщиною  $h$ .

Запишемо диференціальне рівняння (1) у змінних  $(\eta, \xi)$ :

$$\eta = \frac{x}{a}; \quad \xi = \frac{y}{b}, \quad (2)$$

де  $a$  - довжина плити,  $b$  - ширина плити, що дозволяють компактно представити результати.

Диференціальне рівняння деформації плити буде мати вигляд:

$$\frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2 \frac{1}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial^2 \eta \partial^2 \xi} + \frac{1}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{1}{D} q(\eta, \xi), \quad (3)$$

а його розв'язок представимо у вигляді:

$$w(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \sin(i\pi\eta), \quad (4)$$

де

$$Y_i = A_i \operatorname{sh}(\alpha\xi) + B_i \operatorname{ch}(\alpha\xi) + C_i \operatorname{ysh}(\alpha\xi) + D_i \operatorname{ych}(\alpha\xi) + \varphi_i(\xi) \quad (5)$$

та

$$\alpha = \frac{b}{a} i\pi. \quad (6)$$

Локальне навантаження представимо як добуток двох ступінчатих функцій (рис.1).

$$q(\eta, \xi) = \frac{1}{ab} \sum_k \frac{F_k}{\Delta\eta_k \Delta\xi_k} \lambda(\eta) \mu(\xi); \quad (7)$$

де

$$\lambda_k(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \eta_k \leq \eta \leq \eta_k + \Delta\eta_k \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}; \quad (8)$$

$$\mu_k(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \xi_k \leq \xi \leq \xi_k + \Delta\xi_k \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}.$$

Функцію  $\mu(\xi)$  розкладемо в ряд Фур'є:

$$\mu_k(\xi) = \Delta \xi_k + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \sin(\pi j \Delta \xi_k) \left\{ \begin{aligned} & \cos \left[ 2\pi j \left( \xi_k + \frac{\Delta \xi_k}{2} \right) \right] \cos(2\pi \xi) + \\ & + \sin \left[ 2\pi j \left( \xi_k + \frac{\Delta \xi_k}{2} \right) \right] \cos(2\pi \xi) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

оскільки  $q(\eta, \xi)$  повинна бути інтегрована по змінній  $\eta$  та диференційована по змінній  $\xi$ .

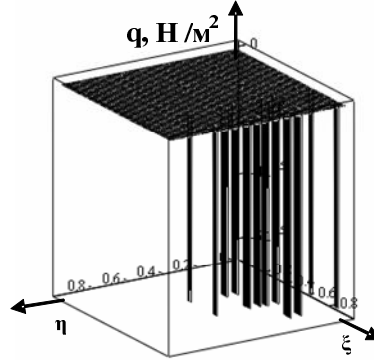


Рисунок 1 - Локальне навантаження 12-коліс

Частинний розв'язок представимо у вигляді:

$$\varphi_{i,j}(\xi) = \frac{4 b^3 F_1}{\pi D a i} \sum_k \frac{\sin \left[ \pi \left( \eta_k + \frac{\Delta \eta_k}{2} \right) \right] \sin \left( \pi \frac{\Delta \eta_k}{2} \right)}{\Delta \eta_k \Delta \xi_k} \left\{ \Phi_k + \frac{2}{\pi} \sum_j \frac{1}{j} \sin(\pi j \Delta \xi_k) \left[ \begin{aligned} & \Psi_{k,j} \cos(2\pi j) + \\ & + \Omega_{k,j} \sin(2\pi j) \end{aligned} \right] \right\} \quad (10)$$

$$\Phi_k = \frac{\Delta \xi_k}{\alpha^4}; \Psi_{j,k} = \frac{\cos \left[ 2\pi j \left( \xi_k + \frac{\Delta \xi_k}{2} \right) \right]}{\left[ (2\pi j)^2 + \alpha^2 \right]^2}; \quad (11)$$

$$\Omega_{j,k} = \frac{\sin \left[ 2\pi j \left( \xi_k + \frac{\Delta \xi_k}{2} \right) \right]}{\left[ (2\pi j)^2 + \alpha^2 \right]^2}.$$

Крайові умови:

$$w(0) = w(1) = 0; \quad M_1(0) = M_1(1) = 0; \quad (12)$$

$$M_2(0) = M_2(1) = 0; \quad V_2(0) = V_2(1) = 0, \quad (13)$$

де

$$M_1 = -D \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right). \quad (14)$$

$$M_2 = -D \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); \quad V_2 = -D \left( \frac{1}{b^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2-\nu) \frac{1}{a^2 b} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right). \quad (15)$$

Розв'язок (4) побудований так, що задовольняє крайовим умовам (12).

З крайових умов (13) впливає система чотирьох рівнянь для знаходження констант  $A_i, B_i, C_i, D_i$ .

В матричному представленні система рівнянь має вид:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Елементи матриці:

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{14} = M_{32} = M_{33} = 0; \quad M_{12} &= \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 - \nu \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2; \quad M_{13} = 2\frac{\alpha}{b^2}; \\ M_{21} = M_{12}sh(\alpha); \quad M_{22} = M_{12}ch(\alpha); \quad M_{23} &= M_{12}sh(\alpha) + M_{13}ch(\alpha); \\ M_{24} = M_{13}sh(\alpha) + M_{12}ch(\alpha); \quad M_{31} &= \left(\frac{\alpha}{b}\right)^3 - (2-\nu)\frac{\alpha}{b}\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2; \\ M_{34} = 3\frac{\alpha^2}{b^3} - (2-\nu)\frac{1}{b}\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2; \quad M_{41} = M_{31}ch(\alpha); \quad M_{42} &= M_{31}sh(\alpha); \\ M_{43} = M_{34}sh(\alpha) + M_{31}ch(\alpha); \quad M_{44} &= M_{31}sh(\alpha) + M_{34}ch(\alpha). \end{aligned} \quad (17)$$

Елементи правої сторони системи:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[ \frac{4}{\pi^3} \cdot \frac{b}{Dai} \sum_k \frac{F_k \cdot \sin\left[\pi\left(\eta_k + \frac{\Delta\eta_k}{2}\right)\right]}{\Delta\eta_k \Delta\xi_k} \times \sin\left(\pi \frac{\Delta\eta_k}{2}\right) \right] \times \\ &\times \left\{ \nu \cdot \left(\frac{a}{ib}\right)^2 \cdot \Delta\xi_k + \frac{2}{\pi} \sum_j \frac{\sin(\pi j \cdot \Delta\xi_k)}{j} \cdot \frac{(2j)^2 + \nu \left(i\frac{b}{a}\right)^2}{\left[(2j)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} \cdot \cos\left[2\pi j \left(\xi_k + \frac{\Delta\xi_k}{2}\right)\right] \right\}; \\ V_2 &= \left[ \frac{16}{\pi^3} \cdot \frac{1}{Dai} \sum_k \frac{F_k \cdot \sin\left[\pi\left(\eta_k + \frac{\Delta\eta_k}{2}\right)\right] \sin\left(\pi \frac{\Delta\eta_k}{2}\right)}{\Delta\eta_k \Delta\xi_k} \right] \times \\ &\times \sum_j \frac{\sin(\pi j \cdot \Delta\xi_k)}{j} \cdot \frac{(2j)^2 + (2-\nu) \cdot \left(i\frac{b}{a}\right)^2}{\left[(2j)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} \cdot \sin\left[2\pi j \left(\xi_k + \frac{\Delta\xi_k}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язок системи (16) та частинний розв'язок (10) підставимо в (5), далі (5) в (4) і одержуємо розв'язок диференціального рівняння (3).

Використовуючи співвідношення (4), запишемо формулу для визначення циліндричної жорсткості плити, що пов'язана з експериментально визначеною деформацією плити

$$D = \frac{4}{\pi^3} \frac{b^2}{w(\eta_p; \xi_p)} \sum_{k=1}^K F_k \sum_{i=1}^N f(i; v; \eta_p; \xi_p; \eta_k; \xi_k; \Delta \eta_k; \Delta \xi_k; a; b), \quad (19)$$

де  $\eta_p; \xi_p$  - координати точки вимірювання прогину моста, що рівні відповідно:  $\eta_p = 0,5; \xi_p = 1$ .

Дані статичних випробовувань можна застосувати як вихідні і пов'язати їх через математичну модель з механічною характеристикою конструкції, яку назвемо інтегральною циліндричною жорсткістю моста.

На рис.2 зображено розміщення та площини контакту коліс крана та автомобіля на поверхні моста.

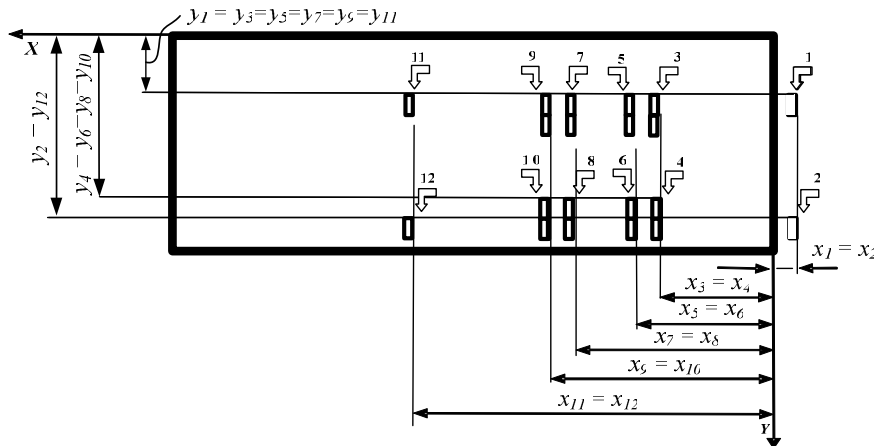


Рисунок 2 – Розміщення коліс на поверхні моста. Колеса крана,  $i = 1-6$ , колеса автомобіля,  $- i = 7-12$

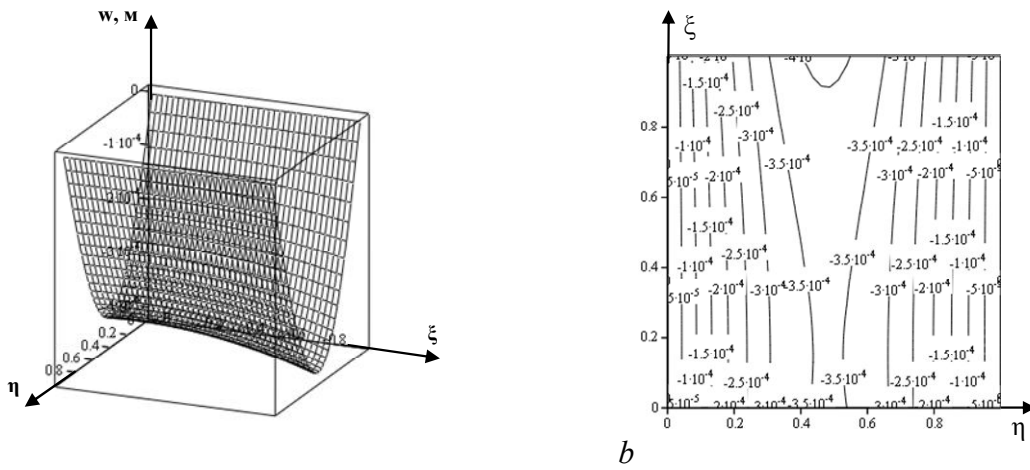
При загальній величині навантаження 48 т. (кран 26 т, КрАЗ 22 т), проєкції ( $\Delta x_i \times \Delta y_i$ ), координати розміщення коліс ( $x_i, y_i$ ) на поверхні моста, та розподіл навантаження ( $F_i$ ) наведено в табл. 1.

Таблиця 1 - Координати і розподіл навантаження автомобіля та крана на поверхні моста

$i$	$\Delta x_i, м$	$\Delta y_i, м$	$x_i, м$	$y_i, м$	$F_i, Н$
1	0,14	0,26	-0,02	5,56	-240000
2	0,14	0,26	-0,02	7,50	-240000
3	0,14	0,52	5,03	5,56	-480000
4	0,14	0,52	5,03	7,24	-480000
5	0,14	0,52	6,49	5,56	-480000
6	0,14	0,52	6,49	7,24	-480000
7	0,14	0,52	10,69	5,56	-440000
8	0,14	0,52	10,69	7,24	-440000
9	0,14	0,52	12,15	5,56	-440000
10	0,14	0,52	12,15	7,24	-440000
11	0,14	0,26	16,79	5,56	-220000
12	0,14	0,26	16,79	7,50	-220000

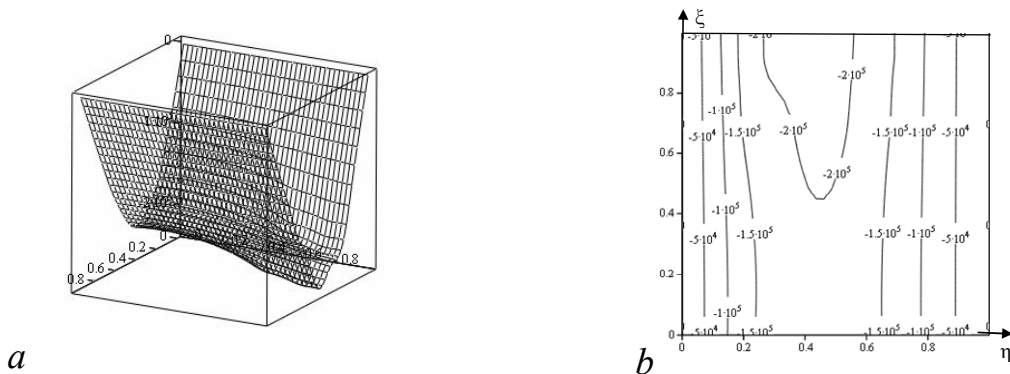
Нижче наведено графіки поверхонь та контурні графіки, що описують поперечний прогин та силові фактори, що діють в проїзній частині моста, які зображені на рис.3 – рис.5.

Зокрема, на рис.3 зображено поверхню та контурний графік, що описує деформацію проїзної частини моста, а на рис.4 зображено поверхню та контурний графік, що описує питомий згинальний момент у площині  $\eta = const$ .



**Рисунок 3** - Деформація проїздної частини залізобетонного моста під дією статичних випробувань. Довжина моста  $a = 24,3$  м., ширина моста  $b = 8,3$  м:  $a$  – поверхневий графік;  $b$  – контурний графік

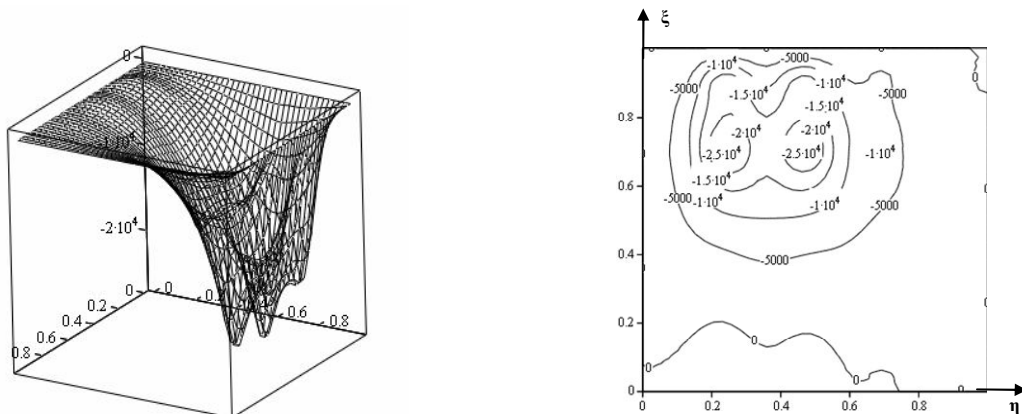
Максимальний прогин моста з боку розміщення навантаження, в точці  $x_p = 12,15$  м,  $y_p = 8,3$  м, дорівнює  $0,41$  мм. =  $4,1 \cdot 10^{-4}$  м. За таких даних обчислена інтегральна циліндрична жорсткість проїзної частини моста за формулою (19), яка дорівнює  $D = 3,777 \cdot 10^{10}$  Н·м., а в таблиці 2 наведено максимальні значення обчислених факторів, що діють на міст та їх координати.



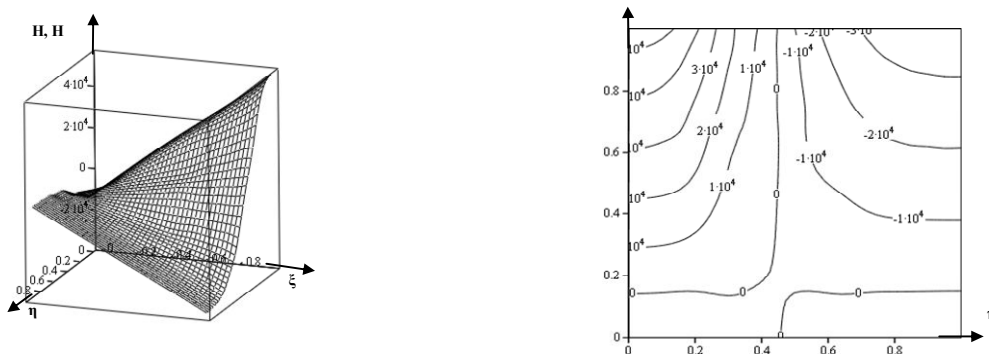
**Рисунок 4** - Питомий згинальний момент  $M_1$  в площині  $\eta = const$ :  $a$  – поверхневий графік;  $b$  – контурний графік

На рис.5 зображено поверхню та контурний графік, що описує питомий згинальний момент в площині  $\xi = const$ .

На рис.6 зображено поверхню та контурний графік, що описує питомий крутний момент.



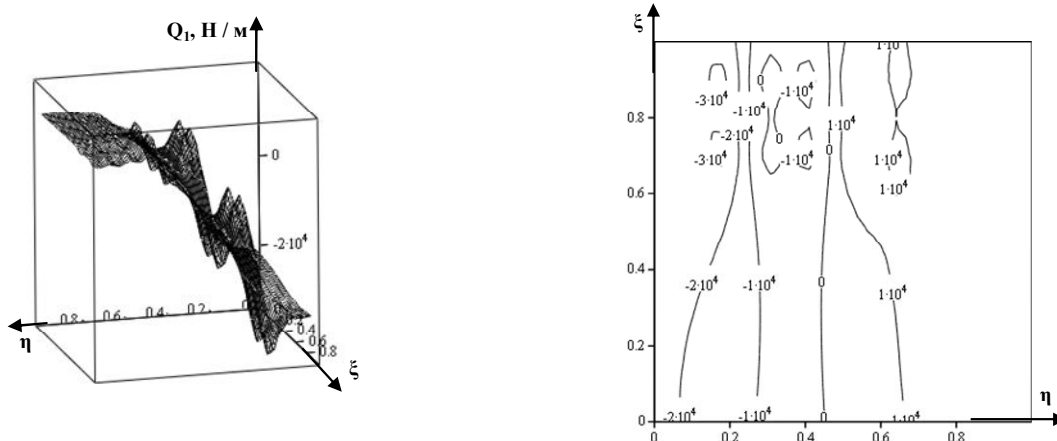
**Рисунок 5** - Питомий згинальний момент  $M_2$  в площині  $\xi = const$ .  $a$  – поверхневий графік;  $b$  – контурний графік



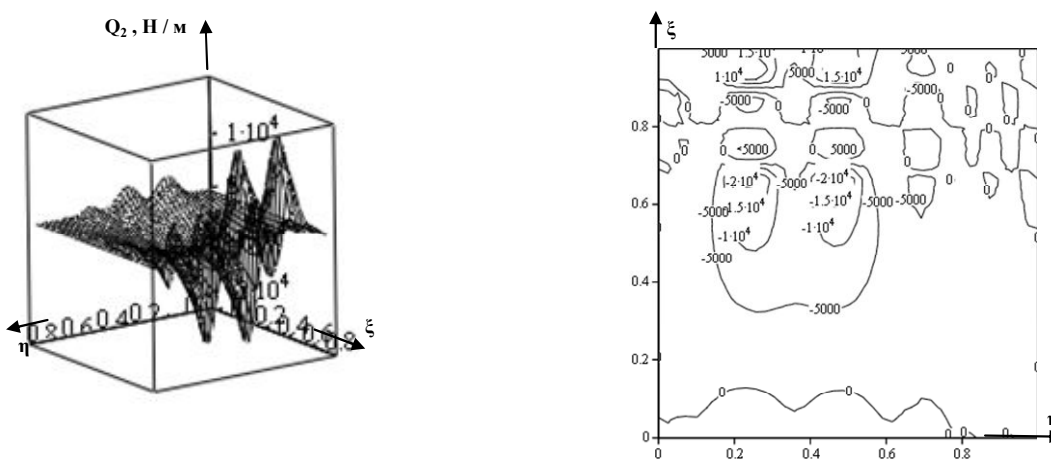
**Рисунок 6** - Питомий крутний момент  $H$ :  $a$  – поверхневий графік;  $b$  – контурний графік

На рис. 7 зображено поверхню та контурний графік, що описує питому поперечну силу в площині  $\eta = const$ .

На рис. 8 зображено поверхню та контурний графік, що описує питому поперечну силу в площині  $\xi = const$ .



**Рисунок 7** - Питома поперечна сила в площині  $\eta = const$ :  $a$  – поверхневий графік;  $b$  – контурний графік



**Рисунок 8** - Питома поперечна сила в площині  $\xi = const$ ;  $a$  – поверхневий графік;  $b$  – контурний графік

Таблиця 2 - Максимальні значення силових факторів, що діють на міст та їх координати

Назва показника	Максимальне значення по модулю	Координати максимуму	
		$x_0$ , м	$y_0$ , м
Питомий згинальний момент $M_1$ в площині $\eta = const$ , Н	$2.322 \times 10^5$	11.199	8.3
Питомий згинальний момент $M_2$ в площині $\xi = const$ , Н	$2.672 \times 10^4$	5.979	5.855
Питомий крутний момент $H$ , Н	$6,209 \times 10^4$	0	8,3
Питома поперечна сила $Q_1$ в площині $\eta = const$ Н/м	$3.233 \times 10^4$	4.129	5.893
Питома поперечна сила $Q_2$ в площині $\xi = const$ Н/м	$2.234 \times 10^4$	5.865	5.481

У даних дослідженнях для розрахунку застосовано двадцять гармонік розкладу розв'язку диференціального рівняння [3] в ряд. На рис.3 – рис.7 чітко видно максимуми в місцях розміщення вантажу та коліс автомобіля, а на рис.8, крім максимумів, в місцях розміщення коліс містяться максимуми вищих гармонік розкладу розв'язку диференціального рівняння [3]. Отже, для розрахунку питомої поперечної сили при  $\xi = const$  варто застосувати більшу кількість гармонік, тобто в формулі (9) покласти  $N > 20$ .

### Висновки

Отримано значення механічної характеристики моста - інтегральну циліндричну жорсткість. Величина цього показника однозначно пов'язує зовнішнє статичне навантаження та силові фактори, що в результаті виникають.

Отримано поверхневі та контурні графіки розподілу силових факторів і розраховано максимальні за модулем значення силових факторів та координати розміщення максимумів.

Інтегральна циліндрична жорсткість та її відносна зміна у часі, яку можна виявити при повторному статичному випробуванні, є корисною інформацією про залишковий ресурс експлуатації моста. Зростання інтегральної циліндричної жорсткості з часом вказуватиме на зростання силових факторів, що діють в середині конструкції. Спадання інтегральної циліндричної жорсткості з часом вказуватиме зростання кількості та розмірів тріщин.

### Література

1. Енциклопедичний словник Брокгауза й Ефрона в 82 тт. й 4 доп. тт. — М.: Терра, 2001. — 40 726 с.
2. Лучко Й.Й., Сулим Г.Т., Кириян В.І. Механіка руйнування мостових конструкцій та методи прогнозування залишкової довговічності / За редакцією Й.Й.Лучка – Львів: Каменяр, 2004. - 885 с.
3. Лучко Й.Й., Коваль П.М., Корнієв М.М. і ін. Мости: Конструкції та надійність / За редакцією В.В.Панасюка і Й.Й.Лучка, - Львів: Каменяр, 2005. - 989 с.
4. А. С. Моргун, І. А. Моргун. Дослідження зміни жорсткості через появу тріщин залізобетонних балок при статичних довготривалих навантаженнях // Вісник Вінницького політехнічного інституту, 2007, № 1.
5. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. - М: Госстройиздат, 1963. - 276 с.
6. Бондаренко В. М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков, 1968. — 210 с.



7. Моргун А.С. О вычислении  $\psi^*(t)$  с учетом возрастания нагрузки во времени // Вопросы строительства и архитектуры. Вып.7. — Минск: Высшая школа, 1977. — С. 25—30.
8. Баженов В.А., Дашенко О.Ф., Коломієць Л.В., Ухов О.В. Будівельна механіка та металеві конструкції: Підручник.- Одеса: Астропринт, 2001.-432с.
9. Сулим Г.Т., Гурняк Л.І., Станкевич В.З. Числові методи в опорі матеріалів та їх програмне забезпечення. Навчальний посібник. – Луцьк: Вид-во ЛДТУ, 2006. – 147 с.

*Одержано 10.04.2009 р.*