

УДК 539.3

Й. Лучко<sup>1</sup>, докт. техн. наук; О. Распопов<sup>2</sup>, докт. техн. наук;  
І. Добрянський<sup>3</sup>, канд. техн. наук

<sup>1</sup>Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

<sup>2</sup>Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту  
імені академіка В. Лазаряна

<sup>3</sup>Львівський національний аграрний університет

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ БАЛКИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ПОПЕРЕЧНОЮ АРМАТУРОЮ

**Резюме.** В роботі побудовано схему розрахунку напруженого стану залізобетонної балки, будівлі моста, підкріпленої поперечною арматурою, яка ґрунтується на розв'язку відповідної задачі теорії пружності про рівновагу полоси, до бокових граней якої прикладене дотичне зусилля, яке зрівноважує зовнішнє навантаження. Основні рівняння математичної моделі балки отримані, виходячи з умов сумісності деформації бетону й арматури та розгляду рівноваги елемента балки. Запропоновано методику побудови наближеного розв'язку одержаних рівнянь, яка базується на використанні рядів Фур'є за системою тригонометричних функцій. Отримано апроксимаційну залежність дотичних напружень в поперечному січненні армуючого шару. Проведено дослідження зміни дотичних напружень вздовж довжини і висоти балки. Отримані результати можуть бути використанні при прогнозуванні зародження та розвитку тріщин в армованих залізобетонних балках, що перебувають під дією силових навантажень.

**Ключові слова:** напруження, поперечна арматура, залізобетонна балка, методика розрахунку.

J. Luchko, O. Raspopov, I. Dobrjanskiy

## DETERMINATION OF THE STRESSED STATE OF THE REINFORCED CONCRETE BEAM STRENGTHENED BY THE LATERAL REINFORCEMENT

**The summary.** The scheme of the stressed state of the reinforced beam, bridge structure strengthened by the lateral reinforcement, which is based on the solution of the certain problem of the elasticity theory on the strip equilibrium, to the edge sides of which shearing force is applied, which balances the external loading, has been built. Basic equations of the beam mathematic model were obtained, in the conditions of the concrete and reinforcement deformation compatibility and analyses of the beam element equilibrium. The method of finding the approximate solution of the obtained equations, which is based on the application of the Fourier series according to the system of the trigonometric functions, was proposed. Approximation dependence of the shearing stresses in the cross-section of the reinforced layer was obtained. Investigations of the shearing stresses change along the beam length and height were carried out. Obtained results can be applied for the prediction of the initiation and growth of cracks in the reinforced concrete beams which are under the power loadings.

**Key words:** tension, transverse reinforced steel, reinforced concrete beam, method of calculation.

**Постановка проблеми.** Створення прийнятної методики розрахунку напруженого стану залізобетонних балок утруднене наявністю розтягнутих тріщин в

окремих зонах, які виникають при порівняно малих навантаженнях унаслідок низького опору бетону. Крім того, оскільки бетон працює сумісно з арматурою, виникає необхідність враховувати різномірність матеріального континууму.

Зародження й розвиток похилих тріщин значною мірою залежить від рівня дотичних напружень у приопорних ділянках балки, тобто від густини вертикальної арматури (хомутів), основне призначення яких – сприйняття частини дотичного напруження. Тому в багатьох випадках на приопорних ділянках балки крок хомутів (поперечної арматури) менший, ніж на середній частині балок, де поперечна сила може бути значно менша і на цих ділянках поперечну арматуру ставлять переважно конструктивно. Типові перерізи залізобетонних балок, до яких зводиться розрахунок міцності, зображено на рис. 1. Відповідні розрахунки здійснюють за емпіричними залежностями, які значно різняться залежно від наукових шкіл і країн, в яких вони розвиваються. Тому актуальною є задача отримання аналітичного розв’язку, за яким можна встановити залежність дотичного напруження в залізобетоні від густини поперечної арматури  $i$ , як наслідок, залежність між довжиною похилих тріщин і густиною арматури.

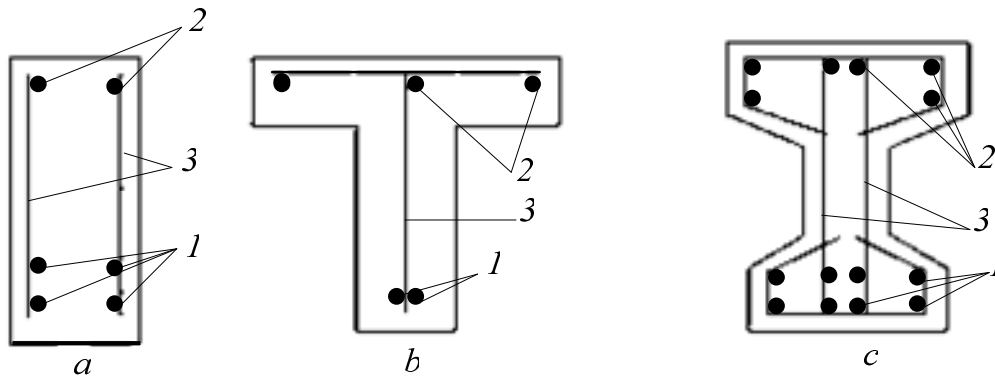


Рисунок 1. Типові перерізи залізобетонних балок: *a* – прямокутного; *b* – таврового; *c* – двотаврового, 1 – розтягнена робоча арматура; 2 – стиснена робоча арматура; 3 – поперечна арматура (хомути)

Figure 1. Typical cross section of reinforced concrete beams: *a* – rectangular; *b* – T-shaped; *c* – I-shaped; 1 – strained reinforcement; 2 – stressed reinforcement; 3 – cross reinforcement (clamps)

**Аналіз досліджень і публікацій з розв’язання проблеми впливу поперечної арматури на напружений стан у залізобетонних балках.** Хоча на даний час відома значна кількість робіт, в яких досліджуються питання руйнування бетонних конструкцій під навантаженням [1–4], однак основний їх недолік полягає у використанні при розвитку підходів та методик до вирішення цієї проблеми феноменологічних вихідних положень без розгляду умов виникнення й розвитку тріщин. Перші експериментальні дослідження, в яких показано можливість застосування механіки руйнування стосовно бетону, були здійснені в роботі [5].

Розвиток механіки залізобетону зумовив створення розрахункових моделей залізобетонних конструкцій, на основі чого в подальшому було сформульовано відповідні критерії утворення тріщин. Однак дослідження розвитку похилих тріщин в елементах залізобетонних конструкцій з позицій механіки деформівного твердого тіла і механіки руйнування є складною математичною проблемою, на першому етапі якої – аналітичне визначення напружень у залізобетонній балці з поперечною арматурою.

**Мета** – розроблення методики чисельного розрахунку напруженого стану

залізобетонної балки, підкріпленої поперечною арматурою.

**Постановка задачі дослідження.** Розглянемо залізобетонну балку на двох шарнірних опорах з поперечною арматурою (рис. 2), на яку діє розподілене навантаження інтенсивності  $p(x)$ . Поперечна арматура являє собою паралельні сталеві хомути, близько розміщені один біля одного (з певною періодичністю). Їх осі знаходяться в серединній площині балки, паралельній більшій стороні її прямокутного поперечного перерізу.

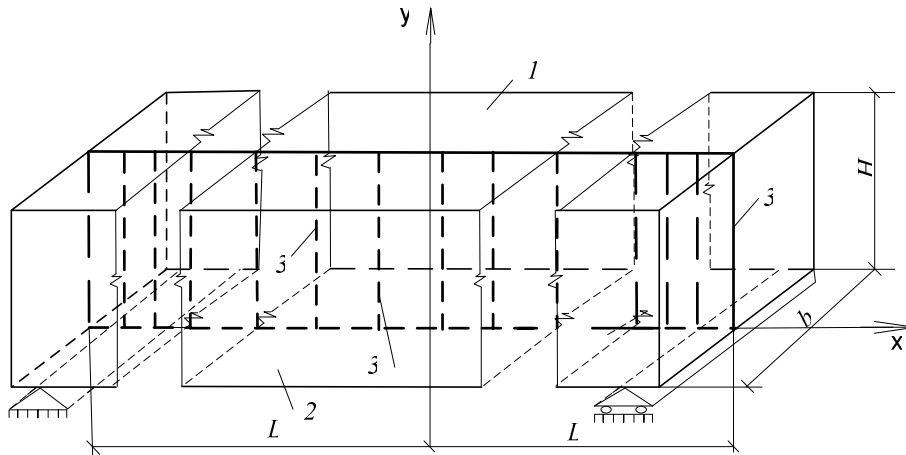


Рисунок 2. Вихідна модель задачі: 1,2 – бетон; 3 – поперечна арматура (сталь)

Figure 2. Initial model of the problem: 1,2 – concrete; 3 – cross reinforcement (steel)

Вважаючи, що стержні знаходяться досить близько один від одного, то їх взаємодію з бетоном у першому наближенні можна описати, ґрунтуючись на трактуванні сукупності хомути́в як суцільної тонкої пластини, при цьому вважаючи контакт між бетоном і арматурою ідеальним. Бетон і хомути вважаємо ізотропним однорідним лінійно-пружним матеріалом, модуль пружності й коефіцієнт Пуассона бетону і арматури позначимо відповідно як  $E, \nu$  і  $E_a, \nu_a$ .

Внаслідок взаємодії бетону й арматури в системі виникає дотичне напруження  $\tau_{yz}$ ; компонента  $\tau_{xz}$  відсутня, оскільки вертикальні хомути не перешкоджають видовженню (вкороченню) бетону в горизонтальному напрямі. Наявність компоненти  $\tau_{yz}$  означає, що розглядуване кусково-однорідне тіло перебуває в умовах об'ємного напруженого стану, тому розв'язок просторової задачі теорії пружності є винятково складною проблемою. Тому на першому етапі шляхом вибору граничних умов зведемо її до плоскої задачі теорії пружності

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -q(x) \text{ при } y = 0; \quad \sigma_y = -p(x) \text{ при } y = H; \\ \tau_{xy} &= 0 \text{ при } y = 0, \quad y = H, \\ \sigma_x &= \tau_{xy} = 0 \text{ при } x = \pm L. \end{aligned} \quad (1)$$

Умови (1) мають доповнюватися вимогою співпадання відносного видовження бетону  $\varepsilon_y$  і арматури  $\varepsilon_{ya}$ , тобто  $\varepsilon_y = \varepsilon_{ya}$ . В умовах (1)  $H$  – висота балки,  $2L$  – її довжина.

**Виклад матеріалу досліджень.** Основні рівняння моделі отримуємо, виходячи з умов сумісності деформації бетону й арматури та розгляду рівноваги елемента балки. Приймаючи для дотичного напруження

$\tau_{yz} = -\frac{\partial V}{\partial y}$ , де  $V$  – нова невідома функція,

а також використовуючи функцію Ері  $U$  [6], знаходимо

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Рівняння (2) – це умова сумісності деформації бетонного континууму, записана через невідомі функції  $U$  і  $V$ .

Використавши умову рівності деформації бетону каркасу й арматурного включення знаходимо вираз функції  $V$  через функцію Ері

$$V = -\frac{(E_a - E)b_1}{E_a b_1 + E b_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(-\nu_a E + \nu E_a)b_1}{E_a b_1 + E b_2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (3)$$

З використанням залежності (3) рівняння (2) набуде вигляду

$$D_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 y^2} + D_3 \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (4)$$

У співвідношенні (3) і рівнянні (4) прийнято позначення

$$D_1 = 1 - \frac{(E_a - E)b_1}{E_a b_1 + E b_2}, \quad D_2 = 1 + \frac{(-\nu_a E + 2\nu E_a - \nu E)b_1}{E_a b_1 + E b_2}, \quad D_3 = 1 - \frac{(\nu_a E - \nu E_a)b_1}{E_a b_1 + E b_2},$$

де  $b$  – товщина балки,  $b_1$  – товщина армуючого шару,  $b_2 = b - b_1$ .

Рівняння (4) є основним рівнянням задачі. Якщо відомий вид функції Ері  $U$ , то згідно з формулою (3) визначається і допоміжна функція  $V$ . Через вказані дві функції  $U$  і  $V$  визначаються напруження як в бетонному масиві

$$\sigma_x = \frac{1}{b_2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{b_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{b_2} V, \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{b_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

так і в арматурі

$$\sigma_y = \frac{1}{b_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{b_1} V. \quad (6)$$

Враховуючи симетрію задачі по змінній  $x$ , розв'язок рівняння (4) запишемо у вигляді

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \cos \alpha_k x, \quad (7)$$

причому, беручи до уваги умову рівності нулю нормальних напружень  $\sigma_x$ , отримаємо

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{2L}, \quad k = 2n - 1.$$

Фундаментальний розв'язок рівняння на визначення функції  $f_k(y)$ , яке отримується підстановкою виразу (7) в основне рівняння (4), матиме вигляд

$$f_k(y) = \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \operatorname{ch} \eta_{1k} y + \frac{2\eta_{2k}^2}{\eta_{1k}(\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2)} B'_k \operatorname{sh} \eta_{1k} y + \left( A_k - \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \right) \operatorname{ch} \eta_{2k} y + \left( B_k + \frac{\eta_{1k}^2 - 3\eta_{2k}^2}{\eta_{2k} \eta_{1k}^2 - \eta_{2k} \eta_{2k}^2} \right) B'_k \operatorname{sh} \eta_{2k} y. \quad (8)$$

У формулі (8)  $A_k, B_k, B'_k, C_k$  – сталі інтегрування;

$\eta_{1k,2k,3k,4k} = \pm \alpha_k \sqrt{\frac{D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - D_1 D_3}}{D_3}}$  – корені характеристичного рівняння:

$$D_3 \eta_k^4 - 2D_2 \alpha_k^2 \eta_k^2 + D_1 \alpha_k^4 \eta_k = 0.$$

З використанням формул (5), (7) і (8), а також умови про рівність нулю дотичного напруження, визначеної відповідно до (1), отримуємо формули для знаходження компонент тензора напружень у згинній балці:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{b_2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \frac{2\eta_{1k}^2 \eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \operatorname{ch} \eta_{1k} y + \eta_{2k}^2 \left( A_k - \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \right) \operatorname{ch} \eta_{2k} y + \right. \\ &+ \left. \frac{2\eta_{2k}^3}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} B_k \left( -\frac{\eta_{2k}}{\eta_{1k}} \operatorname{sh} \eta_{1k} y + \operatorname{sh} \eta_{2k} y \right) \right] \cos \alpha_k x, \\ \sigma_y &= -\frac{D_1}{b_2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[ \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \operatorname{ch} \eta_{1k} y + \left( A_k - \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \right) \operatorname{ch} \eta_{2k} y + \right. \\ &+ \left. \frac{2\eta_{2k}^3}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} B_k \left( -\eta_{1k} \operatorname{sh} \eta_{1k} y + \eta_{2k} \operatorname{sh} \eta_{2k} y \right) \right] \cos \alpha_k x + \\ &+ \frac{1-D_3}{b_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2\eta_{1k}^2 \eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \operatorname{ch} \eta_{1k} y + \eta_{2k}^2 \left( A_k - \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \right) \operatorname{ch} \eta_{2k} y + \right. \\ &+ \left. \frac{2\eta_{2k}^3}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} B_k \left( -\eta_{1k} \operatorname{sh} \eta_{1k} y + \eta_{2k} \operatorname{sh} \eta_{2k} y \right) \right] \cos \alpha_k x, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{b_2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \frac{2\eta_{1k} \eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \operatorname{sh} \eta_{1k} y + \eta_{2k} \left( A_k - \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \right) \operatorname{sh} \eta_{2k} y - \right. \\ &- \left. \frac{2\eta_{2k}^3}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} B_k \left( \operatorname{ch} \eta_{1k} y - \operatorname{ch} \eta_{2k} y \right) \right] \sin \alpha_k x, \quad k = 2n - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Отримані залежності (9) містять невідомі сталі інтегрування  $A_k, B_k$  і  $C_k$ , які будемо визначати з умов (1). Крім того, аналіз формул (9) показує, що умова  $\sigma_x = 0$  при  $x = \pm L$  задовольняється автоматично. Решта з граничних умов (1) призводять до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $A_k, B_k$  і  $C_k$ :

$$\begin{aligned} \left( D_1 \alpha_k^2 - \frac{1-D_3}{\nu} \eta_{2k}^2 \right) A_k - 2 \frac{1-D_3}{\nu} \eta_{2k} C_k &= b_2 q_k, \\ A_k (\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2) \operatorname{sh} \eta_{2k} H + 2C_k (\eta_{1k} \operatorname{sh} \eta_{1k} H - \eta_{2k} \operatorname{sh} \eta_{2k} H) - 2B_k (\operatorname{ch} \eta_{1k} H - \operatorname{ch} \eta_{2k} H) &= 0, \\ A_k \left( D_1 \alpha_k^2 - \frac{1-D_3}{\nu} \eta_{2k}^2 \right) (\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2) \operatorname{ch} \eta_{2k} H + 2\eta_{2k} [D_1 \alpha_k^2 (\operatorname{ch} \eta_{1k} H - \operatorname{ch} \eta_{2k} H) + \\ &+ \left( \frac{1-D_3}{\nu} \eta_{1k}^2 \operatorname{ch} \eta_{1k} H - \eta_{2k}^2 \operatorname{ch} \eta_{2k} H \right)] C_k + \\ &+ 2\eta_{2k}^2 \left[ D_1 \alpha_k^2 \left( -\frac{\eta_{2k}}{\eta_{1k}} \operatorname{sh} \eta_{1k} H + \operatorname{sh} \eta_{2k} H \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1-D_3}{\nu} \eta_{2k} (\eta_{1k} \operatorname{sh} \eta_{1k} H - \eta_{2k} \operatorname{sh} \eta_{2k} H) \right] B_k = b_2 p_k (\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2). \end{aligned} \quad (10)$$

У співвідношеннях (10) величини  $p_k, q_k$  – це коефіцієнти розкладу функцій, що описують зовнішні силові навантаження, в узагальнений ряд Фур’є за системою функцій  $\{\cos \alpha_k x\}$ .

Розв’язок задачі про згин залізобетонної балки з поперечним армуванням, який розв’язуємо за формулами (9), є неповним, оскільки не виконується умова  $\tau_{xy} = 0$  при  $x = \pm L$ . Для усунення цього недоліку потрібно побудувати розв’язок додаткової задачі для півбезмежної смуги, грані якої  $y = \pm \frac{H}{2}$  вільні від напружень, а на торці  $x = 0$  прикладені дотичні напруження  $\tau_{xy}^0$ . Ці напруження визначені відповідно до залежностей (9), в яких треба покласти  $x = -L$ , тобто

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^0 = & \frac{1}{b_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k \left\{ \frac{2\eta_{1k}\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \operatorname{sh}\eta_{1k} \left( y + \frac{H}{2} \right) + \right. \\ & + \eta_{2k} \left( A_k - \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \right) \operatorname{sh}\eta_{2k} \left( y + \frac{H}{2} \right) - \\ & \left. - \frac{2\eta_{2k}^3}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} B_k \left[ \operatorname{ch}\eta_{1k} \left( y + \frac{H}{2} \right) - \operatorname{ch}\eta_{2k} \left( y + \frac{H}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Остаточний розв’язок про згин армованої залізобетонної балки отримаємо шляхом накладання розв’язків, визначених залежностями (9) та розв’язку допоміжної задачі про згин смуги, для якої граничні умови (1) доповнюються умовою  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^0$  при  $x = \pm L$ .

Продовжимо компоненту напруження  $\tau_{xy}^0$ , визначену в інтервалі  $-\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2}$ , на інтервал  $-H \leq y \leq H$ . У проміжку  $\frac{H}{2} < y < H$  приймаємо  $\tau_{xy}^0(H-y) = -\tau_{xy}^0(y)$ ,  $0 \leq y < \frac{H}{2}$ ; замінивши  $H-y$  на  $y$  отримуємо  $\tau_{xy}^0(y) = -\tau_{xy}^0(H-y)$ ,  $\frac{H}{2} < y < H$ . У результаті на проміжку  $\frac{H}{2} < y < H$  величину  $\tau_{xy}^0$  визначимо виразом

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & -\frac{1}{b_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \left\{ \frac{2\eta_{1n}\eta_{2n}}{\eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2} C_n \operatorname{sh}\eta_{1n} \left( \frac{3H}{2} - y \right) + \right. \\ & + \eta_{2n} \left( A_n - \frac{2\eta_{2n}}{\eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2} C_n \right) \operatorname{sh}\eta_{2n} \left( \frac{3H}{2} - y \right) - \\ & \left. - \frac{2\eta_{2n}^3}{\eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2} B_n \left[ \operatorname{ch}\eta_{1n} \left( \frac{3H}{2} - y \right) - \operatorname{ch}\eta_{2n} \left( \frac{3H}{2} - y \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Приймаючи на проміжку  $-H \leq y < -\frac{H}{2}$   $\tau_{xy}^0(-H-y) = -\tau_{xy}^0(y)$  і замінивши  $-H-y$  на  $y$ , отримуємо  $\tau_{xy}^0(y) = -\tau_{xy}^0(-H-y)$ ,  $-H < y < -\frac{H}{2}$ ; звідси

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \left\{ \frac{2\eta_{1n}\eta_{2n}}{\eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2} C_n \operatorname{sh}\eta_{1n} \left( y + \frac{H}{2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \eta_{2k} \left( A_k - \frac{2\eta_{2k}}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} C_k \right) \operatorname{sh} \eta_{2k} \left( y + \frac{H}{2} \right) - \\
 & + \frac{2\eta_{2k}^3}{\eta_{1k}^2 - \eta_{2k}^2} B_k \left[ \operatorname{ch} \eta_{1k} \left( y + \frac{H}{2} \right) - \operatorname{ch} \eta_{2k} \left( y + \frac{H}{2} \right) \right] \Bigg\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Залежності (11), (12) визначають величину  $\tau_{xy}^0$  на розширеному інтервалі  $-H \leq y \leq H$ . Коефіцієнти ряду Фур'є для функції  $\tau_{xy}^0$

$$\tau_{xy}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau'_k \sin \beta_k y + \tau''_k \cos \beta_k y)$$

визначаємо залежностями

$$\tau'_k = \frac{1}{H} \int_{-H}^H \tau_{xy}^0 \sin \beta_k y dy, \quad \tau''_k = \frac{1}{H} \int_{-H}^H \tau_{xy}^0 \cos \beta_k y dy, \quad \beta_k = \frac{2k\pi}{H}. \quad (13)$$

Обчислюючи відповідні інтеграли (13), використовуючи при цьому залежності (11) і (12), отримуємо

$$\begin{aligned}
 \tau'_k = \frac{1}{b_2 H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n-1} & \left[ C_{2n-1} \frac{-4\eta_{12n-1} \eta_{22n-1}}{\eta_{12n-1}^2 - \eta_{22n-1}^2} \cdot \frac{\beta_k \operatorname{sh} \eta_{12n-1} H}{\eta_{12n-1}^2 + \beta_k^2} \cos \frac{k\pi}{2} - \right. \\
 & - 2\beta_k \eta_{22n-1} \left( A_{2n-1} - \frac{2\eta_{22n-1}}{\eta_{12n-1}^2 - \eta_{22n-1}^2} C_{2n-1} \right) \frac{\operatorname{sh} \eta_{22n-1} H}{\eta_{22n-1}^2 + \beta_k^2} \cos \frac{k\pi}{2} + \\
 & \left. + \frac{4\eta_{22n-1}^3 \beta_k B_{2n-1}}{\eta_{12n-1}^2 - \eta_{22n-1}^2} \cos \frac{k\pi}{2} \left( \frac{\operatorname{ch} \eta_{12n-1} H - 1}{\eta_{12n-1}^2 + \beta_k^2} - \frac{\operatorname{ch} \eta_{22n-1} H - 1}{\eta_{22n-1}^2 + \beta_k^2} \right) \right], \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau''_k = \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} & \left\{ (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1} (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\
 & - \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[ - \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] + \\
 & \left. + \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[ - \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Розв'язок сформульованої задачі про згин армованої балки поперечною арматурою отримуємо шляхом композиції напружених станів, перший з яких визначається залежностями (9), а другий відповідає напруженому стану, зумовленому розв'язком допоміжної задачі про згин півбезмежної полоси, грані якої  $y = \pm H/2$  вільні від напружень, а по торцю  $x = 0$  діє дотичне напруження  $\tau_{xy}^0$ . Використовуючи результати роботи [9], компоненти тензора напруженого стану допоміжної задачі мають вигляд

$$\begin{aligned}
 \sigma_x & = -x \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 e^{-\beta_k x} (A'_k \cos \beta_k y + B'_k \sin \beta_k y), \\
 \sigma_y & = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (\beta_k x - 2) (A'_k \cos \beta_k y + B'_k \sin \beta_k y), \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (1 - \beta_k x) (A'_k \sin \beta_k y - B'_k \cos \beta_k y).$$

Співставивши значення  $\tau_{xy}$  при  $x = 0$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (A'_k \sin \beta_k y - B'_k \cos \beta_k y)$$

з величиною  $\tau_{xy}^0$ , отримаємо

$$A'_k = \frac{\tau'_k}{\beta_k}, B'_k = -\frac{\tau''_k}{\beta_k}. \quad (17)$$

Отже, остаточний розв'язок вихідної задачі дається залежностями

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_1} - \sigma_{y_2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_1} - \tau_{xy_2},$$

причому напружений стан  $(\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{xy_1})$  визначається виразами (9), а  $(\sigma_{x_2}, \sigma_{y_2}, \tau_{xy_2})$  – формулами (16) та приєднаних до них залежностей (11), (12) та (17).

**Результати числового аналізу.** Для числових розрахунків прийемо такі вихідні дані:  $h/L = 0,3$ ; товщину армуючого шару  $b_1$  знаходимо з умови рівності площ поперечних перерізів усіх вертикальних хомутів і площі армуючого шару, тобто  $k \frac{\pi d^2}{4} = b_1 L$ , де  $d$  – діаметр арматури,  $k$  – кількість хомутів по довжині балки, ширина балки складає  $b = 0,15$ . Згідно з довідковими даними [7,8] пружні сталі бетону й арматури складають:  $E_b = 2 \times 10^4$  МПа,  $E_s = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu_b = 0,2$  і  $\nu_s = 0,3$ .

Результати числових підрахунків дотичних напружень  $\tau_{xy}$  уздовж довжини балки залежно від координати  $x/L$  наведено у вигляді графіків на рис. 3 і рис. 4. Величина  $b_1 = 0$  відповідає результатам для балки без вертикальної арматури, а решта – балці з приведеною товщиною армуючого шару відповідно  $b_1 = 0,02$  см=0,0002 м;  $b_1 = 0,04$  см=0,0004 м.

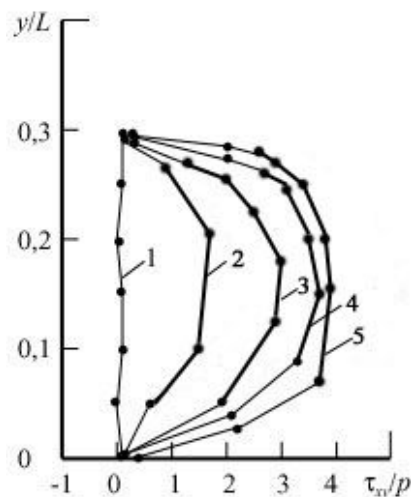


Рисунок 3. Розподіл дотичного напруження  $\tau_{xy}$  уздовж висоти в різних перерізах балки при  $b_1 = 0,04$  см: 1 –  $x/L = -1$ ; 2 –  $x/L = -0,95$ ; 3 –  $x/L = -0,90$ ; 4 –  $x/L = -0,85$ ; 5 –  $x/L = -0,80$

Figure 3. Distribution of tangential stresses along the height of cross-sections beams at 0.04 cm: 1 : 1 –  $x/L = -1$ ; 2 –  $x/L = -0,95$ ; 3 –  $x/L = -0,90$ ; 4 –  $x/L = -0,85$ ; 5 –  $x/L = -0,80$



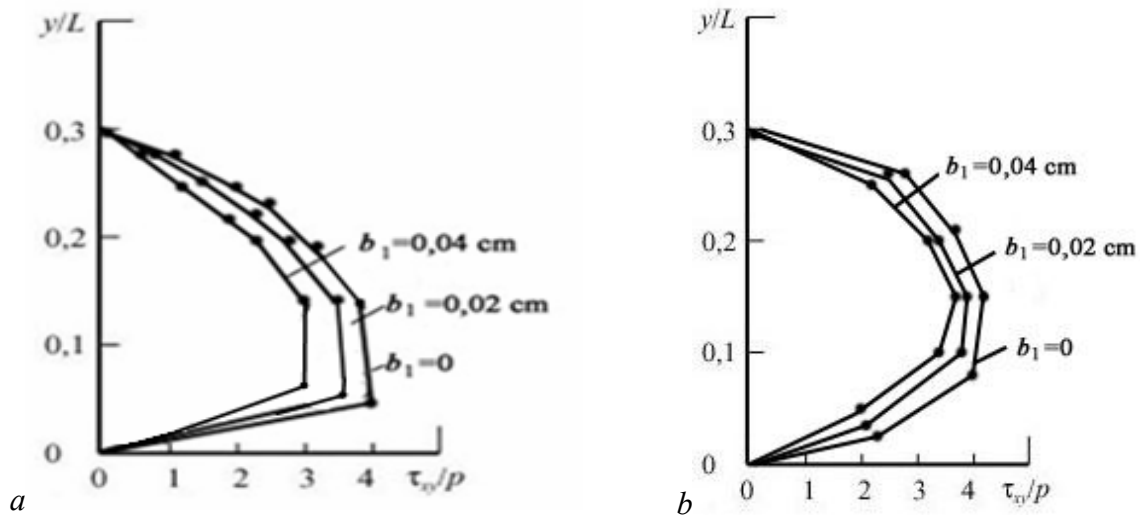


Рисунок 4. Вплив параметра густини армування  $b_1$  на розподіл дотичного напруження  $\tau_{xy}$  вздовж висоти в різних перерізах балки:  $a - x/L = -0,90$ ;  $b - x/L = -0,80$

Figure 4. Impact parameter distribution density  $b_1$  of reinforcement in tangential stresses  $\tau_{xy}$  distribution along the height of cross-sections beams:  $a - x/L = -0,90$ ;  $b - x/L = -0,80$

**Висновки.** З наведених числових результатів бачимо, що збільшення товщини армуючого шару  $b_1$  призводить до зменшення дотичних напружень у поперечному січенні балки. Хоча це тривіальний результат, але апроксимація отриманих аналітичних залежностей, підкріплена результатами числового аналізу, призводить до формули

$$\tau_{xy}(b_1) = \left(1 - 100 \frac{b_1}{b}\right)^m \tau_{xy}(0), \quad (18)$$

в якій  $\tau_{xy}(b_1)$  – дотичне напруження в поперечному перерізі армуючого шару товщиною  $b_1$ ,  $\tau_{xy}(0)$  – за його відсутності. Встановлено, що для наведених тут даних  $m = 0,7$ , при цьому похибка даної апроксимаційної залежності не перевищує 7% при  $b = 0,04$  см. При зменшенні величини  $b_1$  точність даної формули зростає. Важливість залежності (18) полягає в тому, що значно легше побудувати розв’язок задачі балки при згині без наявності поперечної арматури. До того ж треба брати до уваги, що величину  $\tau_{xy}(0)$  з достатньою точністю можна обчислити за формулою Журавського.

**Conclusions.** The numerical experiments show that increasing of the reinforcing layer thickness  $b_1$  leads to a decrease in tangential stresses in the beam cross-sections. Although this result is trivial, but the analytical approximation of dependencies supported by the results of numerical analysis leads to the formula:

$$\tau_{xy}(b_1) = \left(1 - 100 \frac{b_1}{b}\right)^m \tau_{xy}(0), \quad (18)$$

in which  $\tau_{xy}(b_1)$  – tangible tension in cross-section reinforcing layers with thickness  $b_1$ ,  $\tau_{xy}(0)$  – in its absence. It was found that the resulted data here  $m = 0,7$ , with the error of this approximation dependence not exceeding 7% at  $b = 0,04$  cm. As the size  $b_1$  decreases, the accuracy of this formula increases. The dependence (18) allows to build significantly easier a

solution to the problem of beam bending without transverse reinforcement. In addition, it should be noted that the  $\tau_{xy}(0)$  of sufficient accuracy can be calculated by the Zhuravskiy formula.

#### **Список використаної літератури**

1. Панасюк, В.В. Оценка трещиностойкости цементного бетона по вязкости разрушения [Текст] / В.В. Панасюк, Л.Т. Бережницкий, В.М. Чубриков // Бетон и железобетон. – 1981. – № 2. – С.36–42.
2. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения [Текст] / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Зайцев, Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения [Текст] / Ю.В. Зайцев. – М.: Стройиздат, 1982. – 196 с.
4. Лучко, Й.Й. Механика разрушения бетона (обзор) [Текст] / Й.Й. Лучко // Физ.-хим. механика материалов. – 1991. – № 3. – С.3–13.
5. Мурашов, В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона [Текст] / В.И. Мурашов. – М.: Изд-во мин. стр-ва предприятий машиностроения, 1950. – 350 с.
6. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
7. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов [Текст] / Г.С. Писаренко. – К.: Техника, 1967. – 790 с.
8. Сопротивление материалов деформированию и разрушению: справочник [Текст]; под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Наукова думка, 1993. – 286 с.
9. Лучко, Й.Й. Уточнений розрахунок балки при згині [Текст] / Й.Й. Лучко, І.М. Добрянський // Вісник Дніпропетр. у-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2010. – Вип. 33. – С.155–160.

*Отримано 27.02.2012*