Бойчук М., Шмуригіна Н. Моделювання і оптимізація статичного міжгалузевого балансу із запізненням // Вісник ТДТУ. – 2009. - Том 14. - №1. – ст.. 190-200. – (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 519.863; 338.3

М. Бойчук[1], канд. фіз.-мат. наук; Н. Шмуригіна[2]

[1]Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича
[2]Буковинський університет

МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ СТАТИЧНОГО МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Запропоновано модель статичного міжгалузевого балансу із запізненням. Проведено її дослідження, в результаті якого для задачі оптимального розвитку міжгалузевої економіки із запізненням знайдено розв'язок – оптимальна траєкторія та керування, причому з'ясовано, що оптимальна траєкторія – кусково-диференційована функція на відрізку часу $[t_0, T]$*, а оптимальне керування – кусково-неперервна функція на відрізку часу* $[t_0, T]$*. Наведено результати чисельного моделювання трьохгалузевої економіки на модельному прикладі.*

Ключові слова: *міжгалузевий баланс, запізнення, керування.*

M. Boichuk, N. Shmurygina

DESIGN AND OPTIMIZATION OF STATIC INTERSECTOR BALANCE WITH DELAY

The offered model of static intersector balance with the delay. Its research as a result of which for the task of optimum development of intersector economy with the delay the decision is found – optimum trajectory and management is conducted, thus, it is found out, that optimum trajectory – the piece-differentiated function on the segment of time $[t_0, T]$*, and optimum management – piece-continuous function on the segment of time* $[t_0, T]$*. The results of numeral design three of a particular branch economy are resulted on a model example.*

Key words: *intersector balance, delay, management.*

Умовні позначення:

$\tau -$ запізнення; $X -$ валовий випуск продукції; $Y -$ кінцева продукція; $I -$ інвестиції;
$C -$ невиробниче споживання; $K -$ основні виробничі фонди; $L -$ трудові ресурси;
$U -$ функція корисності; $\mu -$ норма амортизації капіталів; $\delta > 0 -$ норма дисконтинування;
$m -$ кількість фондоутворюючих галузей; $A = (a_{ij}) -$ матриця матеріальних витрат; $\chi = (\chi_{ij}) -$ матриця часток капіталовкладень у виробництво: $\chi_{ij} = 0$ при $i > m$, $\sum_{i=1}^{n} \chi_{ij} = 1$ для всіх $j \in \{1,...,n\}$.

Постановка проблеми. Модель розвитку міжгалузевої економіки із запізненням має вигляд :

$$\int_{t_0}^{T} e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{i=1}^{n} U_i(C_i(t-\tau))dt \to \max_{\pi \in M},$$

$$X_i(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t-\tau) + Y_i(t-\tau),$$

$$Y_i(t-\tau) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} I_j(t-\tau) + C_i(t-\tau), & i \in \{1,...,m\}, \\ C_i(t-\tau), \quad i \in \{m+1,...,n\}, & t \in [t_0, T], \end{cases}$$

$$\dot{K}_i(t) = I_i(t-\tau) - \mu_i K_i(t),\ t \in [t_0, T],\ K_i(t_0) = K_i^{(0)},\ K_i(T) \geq K_i^{(T)},$$

$$L_i(\theta)=\psi_i(\theta),\ I_i(\theta)=\phi_i(\theta),\ \theta\in[t_0-\tau,t_0],$$

$$\sum_{i=1}^{n}L_i(t-\tau)\le N(t-\tau),\ 0\le X_i(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),L_i(t-\tau)),$$

$$I_i(t-\tau)\ge 0,\ C_i(t-\tau)\ge C_i^{\min}>0,\ t\in[t_0,T],\ i\in\{1,...,n\},\qquad(1)$$

де $\psi_i(\theta)$, $\phi_i(\theta)$ - кусково-неперервні функції на відрізку $[t_0-\tau,t_0]$, $i\in\{1,...,n\}$.

Перший рядок в задачі (1) означає максимізацію дисконтованої сумарної корисності; другий – міжгалузевий баланс; третій – випуск кінцевої продукції іде на споживання фондоутворюючої галузі та інвестування всіх галузей, а також на споживання нефондоутворюючих галузей; четвертий – рух капіталу при інвестиціях із запізненням, початковому стані капіталу та обмеженнях на кінцевий капітал; п'ятий – початкова передісторія на робочу силу та інвестиції; шостий – обмеження на сумарні робочі сили галузей та обмеження на валову продукцію. Дослідження динаміки моделі міжгалузевого балансу із запізненням, визначення можливих сценаріїв її розвитку та зростання є важливою та актуальною економічною проблемою. За існуючими методами системного аналізу дослідимо процес і визначимо оптимальні траєкторії зростання моделі міжгалузевого балансу з метою її використання в задачах прогнозування, планування та керування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Багато відомих вітчизняних і закордонних вчених займалися проблемами математичного моделювання еколого-економічних систем. Серед них: М.В. Михалевич, А.А. Петров, І.Г Поспєлов, І.М. Ляшенко, В.С. Григорків та ін. Але, не дивлячись на плідну працю вчених, деякі проблеми не мають однозначного розв'язання та потребують уточнення. У роботі [1] проведено дослідження аналогічної задачі (1) без запізнення та описаний алгоритм її розв'язання. Але інвестиції, як правило, поступають із запізненням, тому дослідження моделі (1) із запізненням має практичну та теоретичну цінність.

Мета. Метою даної роботи є дослідження моделі (1), побудова оптимального керування та оптимальної траєкторії, розробка методологічних основ аналізу розвитку економіки. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації, економіко-математичне моделювання, теорія диференціальних рівнянь.

Дослідження задачі. В задачі (1) роль стану відіграє вектор капіталу $K=(K_1,...,K_n)^T$, а інші змінні $X,I,C,L-$ компоненти вектора керування. Згідно з достатніми умовами оптимальності [2] треба оптимізувати дві функції R та Φ:

$$R(t,K(t),K(t-\tau),I(t-\tau),X(t-\tau),C(t-\tau))=e^{-\delta(t-t_0)}\sum_{i=1}^{n}U_i(C_i(t-\tau))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\dot{a}_i(t)+\dot{\varphi}_i^{(0)}(t)K_i(t)+\dot{\varphi}_i^{(1)}(t-\tau)K_i(t-\tau)]+\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i^{(0)}(t)+\varphi_i^{(1)}(t)]\{I_i(t-\tau)-\mu_iK_i(t)\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t-\tau)\left(X_i(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j(t-\tau)-\begin{cases}C_i(t-\tau)+\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}I_j(t-\tau), & i\in\{1,...,m\}\\ C_i(t-\tau), & i\in\{m+1,...,n\}\end{cases}\right)+$$

$$+\gamma(t-\tau)\left(N(t-\tau)-\sum_{i=1}^{n}L_i(t-\tau)\right)\to\sup_{\substack{K_i(t)\ge0,K_i(t-\tau)\ge0,\\ I_i(t-\tau)\ge0,C_i(t-\tau)\ge C_i^{(\min)},L_i(t-\tau)\ge0,\\ 0\le X_i(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),L(t-\tau)),t\in[t_0,T]}},$$

$$\Phi(T,K(T),K(T-\tau))=\sum_{i=1}^{n}[a_i(T)+\varphi_i^{(0)}(T)K_i(T)+\varphi_i^{(1)}(T-\tau)K_i(T-\tau)]\to\inf_{\substack{K_i(T)\ge K_i^{(T)},\\ K_i(T-\tau)\ge0}}.\qquad(2)$$

Тут $\gamma(t-\tau),\lambda_i(t-\tau)$, $i\in\{1,...,n\}$, $t\in[t_0,T]-$ множники Лагранжа, які є кусково-диференційованими функціями.

На оптимізацію функції R по кожній змінній впливають лише ті доданки, в які входить змінна, що розглядається. Це пов'язано з тим, що необхідною умовою оптимізації за деякою змінною є рівність нулеві частинної похідної за цією змінною. А це призводить до того, що в цю рівність входять лише доданки із цією змінною функції R, тому оптимізація першої функції в (2) розбивається на п'ять задач:

I. $\dot{\varphi}_i^{(0)}(t)K_i(t) - \mu_i(\varphi_i^{(0)}(t) + \varphi_i^{(1)}(t))K_i(t) \to \sup\limits_{K_i(t)\ge 0}$, $t \in [t_0, T]$,

$\varphi_i^{(1)}(t) \equiv 0$, $t \in (T-\tau, T]$;

II. $e^{-\delta(t-t_0)}U_i(C_i(t-\tau)) - \lambda_i(t-\tau)C_i(t-\tau) \to \sup\limits_{C_i(t-\tau)\ge C_i^{(\min)}}$, $t \in [t_0, T]$;

III. $[\varphi_i^{(0)}(t) + \varphi_i^{(1)}(t)]I_i(t-\tau) - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j(t-\tau)\chi_{ji}I_i(t-\tau)\} \to \sup\limits_{I_i(t-\tau)\ge 0}$, $t \in [t_0, T]$;

IV. $\dot{\varphi}_i^{(1)}(t-\tau)K_i(t-\tau) + [\lambda_i(t-\tau) - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j(t-\tau)a_{ji}]X_i(t-\tau) -$

$- \gamma(t-\tau)L_i(t-\tau) \to \sup\limits_{\substack{K_i(t-\tau)\ge 0, L_i(t-\tau)\ge 0,\\ 0\le X_i(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau), L_i(t-\tau))}}$, $t \in [t_0, T]$;

$$\text{V. } \begin{cases} X_i(t-\tau) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_j(t-\tau) + \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \chi_{ij}I_j(t-\tau) + C_i(t-\tau), \ i \in \{1,...,m\}, \\ C_i(t-\tau), \ i \in \{m+1,...,n\}, \end{cases} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} L_i(t-\tau) = N(t-\tau), \quad t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

Функції $\varphi_i^{(0)}, \varphi_i^{(1)}, \lambda_i, \gamma$, $i \in \{1,...,n\}$ - кусково-диференційовані на $[t_0, T]$.

Задамо $\lambda_i(t-\tau) = \lambda_{i0}e^{-\delta(t-t_0-\tau)}$, $i \in \{1,...,n\}$, $\gamma(t-\tau) = \gamma_0 e^{-\delta(t-t_0-\tau)}$. Тоді із задачі II маємо необхідну умову екстремуму

$$U_i'(C_i(t-\tau)) - \lambda_{i0}e^{\delta\tau} = 0,$$

звідки, при $\lambda_{i0} > 0$ задача II має розв'язок $C_i^{(маг)}(t-\tau) = C_i^{(маг)} \equiv const_i$. Якщо знайдене значення $C_i^{(маг)} \ge C_i^{(\min)}$, то переходимо до розв'язання інших задач. В противному випадку вибором $\lambda_{i0} > 0$ необхідно добитися, щоб виконувалась нерівність $C_i^{(маг)} \ge C_i^{(\min)}$.

Із задач I та III при довільних $K_i(t)$ і $I_i(t-\tau)$ маємо

$$\varphi_i^{(1)}(t) = \frac{\delta + \mu_i}{\delta} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j0}\chi_{ji}(e^{-\delta(t-t_0-\tau)} - e^{\delta\tau}),\ t \in [t_0, T-\tau],\ \varphi_i^{(1)}(t) \equiv 0,\ t \in (T-\tau, T];$$

$$\varphi_i^{(0)}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{j0}\chi_{ji}e^{\delta\tau} + \dfrac{\mu_i}{\delta}\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{j0}\chi_{ji}e^{\delta\tau}(1 - e^{-\delta(t-t_0)}), & t \in [t_0, T-\tau], \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{j0}\chi_{ji}e^{-\delta(t-t_0-\tau)}, & t \in (T-\tau, T] \end{array} \right\} > 0.$$

Позначимо через $b_i = \lambda_{i0} - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{j0}a_{ji}$. Нехай матриця A - продуктивна, невід'ємна, нерозкладна. Тоді існує обернена $(E-A)^{-1}$ і її елементи $\tilde{a}_{ij} \ge 0$. Вектор $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n)^T$ виражається через вектор $b = (b_1,...,b_n)^T$ матричною формулою

$\lambda = (E - A^T)^{-1} b$. Компоненти вектора λ додатні. Тому компоненти вектора b додатні і не можуть бути нульовими, бо в протилежному випадку не існувало би оберненої матриці. Отже, $b_i > 0$ для всіх $i \in \{1,...,n\}$.

В результаті максимізації задачі IV за X_i маємо повну завантаженість галузей, тобто

$$X_i(t-\tau) = F_i(K_i(t-\tau), L_i(t-\tau)),\ t \in [t_0, T].$$

В результаті чого одержимо

$$-(\delta + \mu_i)\sum_{j=1}^{n} \chi_{ji}\lambda_{j0} K_i(t-\tau) + b_i\ F_i(K_i(t-\tau), L_i(t-\tau)) - \gamma_0 L_i(t-\tau) \to \sup_{K_i(t-\tau)\ge 0, L_i(t-\tau)\ge 0}. \quad (3)$$

Позначимо $k_i(t-\tau) = \dfrac{K_i(t-\tau)}{L_i(t-\tau)}$, $F_i(K_i, L_i) = L_i f_i(k_i)$.

Використаємо однорідність першого порядку функції $F_i(K_i, L_i)$. Тоді $\dfrac{\partial F_i}{\partial L_i} = f_i(k_i) - f_i'(k_i)k_i$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial K_i} = f_i'(k_i)$. Необхідними умовами оптимізації (3) за L_i та K_i є

$$\frac{f_i(k_i) - f_i'(k_i)k_i}{f_i'(k_i)} = \frac{\gamma_0}{(\delta + \mu_i)\sum_{j=1}^{n}\chi_{ji}\lambda_{j0}}. \quad (4)$$

Оскільки $b_i > 0$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial L_i} > 0$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial K_i} > 0$, то з (4) випливає, що і $\gamma_0 > 0$. Тоді рівняння (4) має розв'язок $k_i^{(маг)}(t-\tau) \equiv k_i^{(маг)}(\gamma_0) = const_i$ і $K_i\ (t-\tau) = k_i^{(маг)}(\gamma_0)L_i(t-\tau)$, $i \in \{1,...,n\}$. Значення $k_i^{(маг)}(\gamma_0)$ є магістральним значенням (рівноважним станом).

З рівняння руху капіталу задачі (1) знайдемо керування за інвестиціями I_i:

$$I_i\ (t-\tau) = k_i^{(маг)}(\gamma_0)\dot{L}_i(t) + \mu_i k_i^{(маг)}(\gamma_0)L_i(t),\ i \in \{1,...,n\},\ t \in [t_0, T]. \quad (5)$$

Підставимо (5) при $X_i(t-\tau) = F_i(K_i(t-\tau), L_i(t-\tau))$, $t \in [t_0, T]$ в задачу V. Одержимо початкову задачу для визначення L_i, $i \in \{1,...,n\}$:

$$f_i(k_i^{(маг)}(\gamma_0))L_i(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0))L_j(t-\tau) +$$

$$+\left\{\begin{matrix} \sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}[k_j^{(маг)}(\gamma_0)\dot{L}_j(t) + \mu_j k_j^{(маг)}(\gamma_0)L_j(t)] + C_i^{(маг)}, & i \in \{1,...,m\} \\ C_i^{(маг)}, & i \in \{m+1,...,n\} \end{matrix}\right\},\ i \in \{1,...,n\},\ t \in [t_0, T],$$

$$L_i(t) = \psi_i\ (t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0],\ i \in \{1,...,m\}. \quad (6)$$

Спочатку розв'яжемо першу підсистему системи (6), з якої виразимо $L_i(t-\tau)$, $i \in \{m+1,...,n\}$, $t \in [t_0, T]$ через змінні $L_i(t-\tau)$, $i \in \{1,...,m\}$, $t \in [t_0, T]$. Нехай матриця $\widetilde{A}^{(2)} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=m+1}^{n}, (n-m)\times(n-m)$ є продуктивною, невід'ємною та нерозкладною. Тоді існує обернена матриця $(E - \widetilde{A}^{(2)})^{-1} = (\widetilde{a}_{ij})$ до матриці $(E - \widetilde{A}^{(2)})$ і система рівнянь має розв'язок в матричній формі

$$Lf^{(2)}(t-\tau) = (E - \widetilde{A}^{(2)})^{-1} A^{(4)} Lf^{(1)}(t-\tau) + (E - \widetilde{A}^{(2)})^{-1} C^{(2,маг)}, \quad (7)$$

де $Lf^{(2)} = \left(L_{m+1} f_{m+1}(k_{m+1}^{(маг)}(\gamma_0)),...,L_n f_n(k_n^{(маг)}(\gamma_0))\right)^T$, $A^{(4)} = \left(a_{ij}\right)_{i=m+1, j=1}^{n,\ m}, (n-m)\times m$,

$Lf^{(1)} = \left(L_1 f_1(k_1^{(маг)}(\gamma_0)),...,L_m f_m(k_m^{(маг)}(\gamma_0))\right)^T$, $C^{(2,маг)} = \left(C_{m+1}^{(маг)},...,C_n^{(маг)}\right)^T$.

Праву частину (7) підставимо в другу підсистему системи (6). Одержимо матричне диференціальне рівняння для знаходження $Lf^{(1)}$:

$$[\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)}]\dot{L}f^{(1)}(t)+[\chi_{\mu kf}^{(1)}+\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)}]Lf^{(1)}(t)=$$
$$=[E-A^{(1)}-A^{(3)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)}]Lf^{(1)}(t-\tau)-\widetilde{C}^{(маг)},$$

де $C^{(1,маг)}=\left(C_1^{(маг)},...,C_m^{(маг)}\right)^T$, $A^{(1)}=\left(a_{ij}\right)_{i=1,\,j=1}^{m,\;m}, m\times m$, $A^{(3)}=\left(a_{ij}\right)_{i=1,\,j=m+1}^{m,\;n}, m\times(n-m)$,

$$\widetilde{C}^{(маг)}=A^{(3)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}C^{(2,маг)}+\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}C^{(2,маг)}+C^{(1,маг)},$$

$$\chi_{kf}^{(1)}=\left(\frac{\chi_{ij}k_j^{(маг)}(\gamma_0)}{f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0))}\right)_{i,j=1}^{m},(m\times m),\ \chi_{\mu kf}^{(1)}=\left(\frac{\chi_{ij}\mu_j k_j^{(маг)}(\gamma_0)}{f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0))}\right)_{i,j=1}^{m},(m\times m),$$

$$\chi_{kf}^{(2)}=\left(\frac{\chi_{ij}k_j^{(маг)}(\gamma_0)}{f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0))}\right)_{i=1,\,j=m+1}^{m,n},[m\times(n-m)],$$

$$\chi_{\mu kf}^{(2)}=\left(\frac{\chi_{ij}\mu_j k_j^{(маг)}(\gamma_0)}{f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0))}\right)_{i=1,\,j=m+1}^{m,n},[m\times(n-m)].$$

Нехай матриця $A^{*}=\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)}$ має обернену $(\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)})^{-1}$. Тоді початкова задача для визначення $Lf^{(1)}$ набуває вигляду

$$\dot{L}f^{(1)}(t)+(\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)})^{-1}(\chi_{\mu kf}^{(1)}+\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)})Lf^{(1)}(t)=$$
$$=(\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)})^{-1}\{[E-A^{(1)}-A^{(3)}(E-\widetilde{A}^{(2)})^{-1}A^{(4)}]Lf^{(1)}(t-\tau)-\widetilde{C}^{(маг)}\},\quad(8)$$
$$Lf^{(1)}(t)=\varsigma(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0],\ \varsigma(t)=\left(\psi_1(t)f_1(k_1^{(маг)}(\gamma_0)),...,\psi_m(t)f_m(k_m^{(маг)}(\gamma_0))\right)^T.$$

Задача (8) при кусково-неперервній вектор функції $\varsigma(t)$, $t\in[t_0-\tau,t_0]$ має розв'язок $Lf_{маг}^{(1)}(t)$, $t\in[t_0,T]$, який є кусково-диференційованою функцією [3].

Але розв'язок $Lf_{маг}^{(1)}(t)$, $t\in[t_0,T]$ задачі (8) повинен бути додатнім, оскільки відбувається процес розширення виробництва, то принаймні $\dot{L}f^{(1)}(t)\geq 0$, $t\in[t_0,T]$. Використовуючи ці умови для міжгалузевого балансу

$$\begin{cases}X^{(1)}(t-\tau)=A^{(11)}X^{(1)}(t-\tau)+A^{(12)}X^{(2)}(t-\tau)+V(t-\tau)+C_{маг}^{(1)},\\ X^{(2)}(t-\tau)=A^{(21)}X^{(1)}(t-\tau)+A^{(22)}X^{(2)}(t-\tau)+C_{маг}^{(2)},\end{cases}$$

одержали обмеження на дані задачі (8):

1) початковий вектор $\varsigma(t)$, $t\in[t_0-\tau,t_0]$ є додатнім;
2) $V(t-\tau)\geq 0$, $t\in[t_0,T]$, похідна $\dot{L}f^{(1)}(t)$, $t\in[t_0,T]$ принаймні невід'ємна, тобто виконуються нерівності

$$\psi_i(t)>0,\ t\in[t_0,T],\ i\in\{1,...,m\},$$

$$[E-A^{(11)}-A^{(12)}(E-A^{(22)})^{-1}A^{(21)}]Lf^{(1)}(t-\tau)-A^{(12)}(E-A^{(22)})^{-1}C_{маг}^{(2)}-C_{маг}^{(1)}\geq 0,$$

$$-\Omega[\chi_{\mu kf}^{(1)}+\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-A^{(22)})^{-1}A^{(21)}]Lf^{(1)}(t)-\Omega\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-A^{(22)})^{-1}C_{маг}^{(2)}+\Omega[E-A^{(11)}-$$
$$-A^{(12)}(E-A^{(22)})^{-1}A^{(21)}]Lf^{(1)}(t-\tau)-\Omega[A^{(12)}(E-A^{(22)})^{-1}C_{маг}^{(2)}+C_{маг}^{(1)}]\geq 0,\ t\in[t_0,T],\quad(9)$$

де $\Omega=[\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-A^{(22)})^{-1}A^{(21)}]^{-1}$.

Підставивши $Lf^{(1)}_{маг}$ в (7), одержимо вектор $Lf^{(2)}_{маг}(t)$, $t \in [t_0, T]$. В результаті чого одержимо весь вектор $Lf^{(маг)}(t)$, $t \in [t_0, T]$ робочої сили, причому компоненти $L_i^{(маг)}(t) f_i(k_i^{(маг)}(\gamma_0))$, $i \in \{1,...,n\}$ є неперервними функціями на $[t_0, T]$ і неперервно залежать від параметра $\gamma_0 > 0$. Функція $k_i^{(маг)}(\gamma_0)$ за $\gamma_0 \ge 0$ є монотонно зростаючою, а функція

$$\omega(t-\tau, \gamma_0) = N(t-\tau) - \sum_{i=1}^{n} L_i(t-\tau, \gamma_0),\ t \in [t_0, T] \qquad (10)$$

є неперервною за γ_0. Тому за класичним математичним аналізом для неперервної функції існує внутрішня точка γ_0, в якій функція перетворюється в нуль.

Отже, при деякому γ_0 знайдені $L_i^{(маг)}(t-\tau, \gamma_0)$, $i \in \{1,...,n\}$, які задовольняють рівність задачі, тобто $\omega(t-\tau, \gamma_0)$=0.

В результаті чого, отримали магістральні траєкторію та керування:

$$K_i^{(маг)}(t) = k_i^{(маг)} L_i^{(маг)}(t),\ I_i^{(маг)}(t-\tau) = k_i^{(маг)} \dot{L}_i^{(маг)}(t-\tau) + \mu_i k_i^{(маг)} L_i^{(маг)}(t-\tau),$$

$$X_i^{(маг)}(t-\tau) = F_i(K_i^{(маг)}(t-\tau), L_i^{(маг)}(t-\tau)),$$

$$Y_i^{(маг)}(t-\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} I_j^{(маг)}(t-\tau) + C_i^{(маг)}, \quad i \in \{1,...,m\} \\ C_i^{(маг)}, \quad i \in \{m+1,...,n\} \end{array} \right\},\ i \in \{1,...,n\},\ t \in [t_0, T]. \qquad (11)$$

Причому, $K_i^{(маг)}(t)$ і $X_i^{(маг)}(t-\tau)$ – неперервно-диференційовані функції на $[t_0, T]$, а $I_i^{(маг)}(t-\tau)$, $Y_i^{(маг)}(t-\tau)$ – кусково-неперервні на $[t_0, T]$.

Стан системи (траєкторія) $\widetilde{K}_i(t)$, $i \in \{1,...,n\}$, $t \in [t_0, T]$ визначається з рівняння:

$$\widetilde{K}_i(t) = K_i^{(0)} e^{-\mu_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\mu_i(t-s)} I_i^{(маг)}(s-\tau) ds,\ i \in \{1,...,n\},\ t \in [t_0, T], \qquad (12)$$

тому траєкторія $\widetilde{K}_i(t)$ є неперервно-диференційованою функцією на $[t_0, T]$.

Знайдемо $a_i(t)$, $i \in \{1,...,n\}$, $t \in [t_0, T]$. У функцію $\dot{a}_i$ входять вирази функції R (2) з протилежним знаком, які не перетворювались в нуль при оптимізації:

$$\dot{a}_i(t) = -e^{-\delta(t-t_0)} U_i(C_i^{(маг)}) + (\delta + \mu_i) e^{-\delta(t-t_0-\tau)} \sum_{j=1}^{n} \chi_{ji} \lambda_{j0} k_i^{(маг)} L_i^{(маг)}(t-\tau) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j0} \chi_{ji} e^{-\delta(t-t_0-\tau)} I_i^{(маг)}(t-\tau)$$

або

$$a_i(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{a}_i(s) ds,\ i \in \{1,...,n\}.$$

Тоді за достатніми умовами оптимальності [2] при виконанні обмеження $\widetilde{K}_i(T) \ge K_i^{(T)}$, $i \in \{1,...,n\}$ оптимальним процесом є процес (11), (12) $\pi = \{\widetilde{K}_i(t), I_i^{(маг)}(t-\tau),$ $X_i^{(маг)}(t-\tau), L_i^{(маг)}(t-\tau), Y_i^{(маг)}(t-\tau), C_i^{(маг)},\ i \in \{1,...,n\},\ t \in [t_0, T]\}$.

У випадку, якщо для частини $i \in \{m-i_0+1,...,m\}$ – фондоутворюючих галузей та $i \in \{m+1,...,m+i_1\}$ – нефондоутворюючих галузей виконуються нерівності $\widetilde{K}_i(T) < K_i^{(T)}$, а для всіх інших мають місце нерівності $\widetilde{K}_i(T) \ge K_i^{(T)}$, то з другої задачі (2) оптимальності функції Φ випливають рівності $K_i(T) = K_i^{(T)}$, $i \in \{m-i_0+1,...,m+i_1\}$, оскільки $\varphi_i^{(0)}(t) \ge 0$. Тоді необхідно розв'язати задачу на швидкодію

$\min(T-\xi)$,

$\dot{K}_i(t) = I_i(t-\tau) - \mu_i K_i(t)$, $i \in \{m-i_0+1,...,m+i_1\}$, $t \in [\xi, T]$,

$$X_i(t-\tau)=\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} a_{ij}X_j(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m-i_0} a_{ij}X_j^{(маг)}(t-\tau)+\sum_{j=m+i_1+1}^{n} a_{ij}X_j^{(маг)}(t-\tau)+Y_i(t-\tau),$$

$$Y_i(t-\tau)=\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1}\chi_{ij}I_j(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m-i_0}\chi_{ij}I_j^{(маг)}(t-\tau)+\sum_{j=m+i_1+1}^{n}\chi_{ij}I_j^{(маг)}(t-\tau)+C_i(t-\tau), i\in\{m-i_0+1,...,m\}\\ C_i(t-\tau),\quad i\in\{m+1,...,m+i_1\}\end{array}\right\},$$

$$i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\},$$

$$K_i(\xi)=\widetilde{K}_i(\xi),\ K_i(T)=K_i^{(T)},\ i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\},$$

$$X_i(t-\tau)=X_i^{(маг)}(t-\tau),\ Y_i(t-\tau)=Y_i^{(маг)}(t-\tau),\ I_i(t-\tau)=I_i^{(маг)}(t-\tau),$$

$$L_i(t-\tau)=L_i^{(маг)}(t-\tau),\ i\in\{1,...,m-i_0\},\ i\in\{m+i_1+1,...,n\},$$

$$\sum_{i=1}^{m-i_0}L_i^{(маг)}(t-\tau)+\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}L_i(t-\tau)+\sum_{i=m+i_1+1}^{n}L_i^{(маг)}(t-\tau)\le N(t-\tau),\ t\in[\xi,T],$$

$$0\le X_i(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),L_i(t-\tau)),\ C_i(t-\tau)\ge C_i^{\min},\ I_i(t-\tau)\ge 0,$$

$$\widetilde{K}_i(t-\tau)\le K_i(t-\tau)\le K_i^{(T)},\ t\in[\xi,T],\ i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\},$$

$$L_i(t)=\psi_i(t),\ I_i(t)=\phi_i(t),\ t\in[\xi-\tau,\xi],\ i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\}. \qquad (13)$$

За достатніми умовами оптимальності треба оптимізувати допоміжні функції:

$$R(t,K(t),K(t-\tau),I(t-\tau),X(t-\tau),C(t-\tau))=$$

$$=\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}[\dot{\widetilde{a}}_i(t)+\dot{\widetilde{\varphi}}_i^{(0)}(t)K_i(t)+\dot{\widetilde{\varphi}}_i^{(1)}(t-\tau)K_i(t-\tau)]+\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}[\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(t)+\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(t)]\{I_i(t-\tau)-\mu_iK_i(t)\}+$$

$$+\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}\widetilde{\lambda}_i(t-\tau)\left(X_i(t-\tau)-\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1}a_{ij}X_j(t-\tau)-\sum_{j=1}^{m-i_0}a_{ij}X_j^{(маг)}(t-\tau)-\sum_{j=m+i_1+1}^{n}a_{ij}X_j^{(маг)}(t-\tau)-\right.$$

$$\left.-\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1}\chi_{ij}I_j(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m-i_0}\chi_{ij}I_j^{(маг)}(t-\tau)+\sum_{j=m+i_1+1}^{n}\chi_{ij}I_j^{(маг)}(t-\tau)+C_i(t-\tau), i\in\{m-i_0+1,...,m\}\\ C_i(t-\tau),\quad i\in\{m+1,...,m+i_1\}\end{array}\right\}\right)+$$

$$+\gamma(t-\tau)\left(N(t-\tau)-\sum_{i=1}^{m-i_0}L_i^{(маг)}(t-\tau)-\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}L_i(t-\tau)-\sum_{i=m+i_1+1}^{n}L_i^{(маг)}(t-\tau)\right)\to$$

$$\to\sup_{\substack{\widetilde{K}_i(t)\le K_i(t)\le K_i^{(T)},L_i(t)\ge 0,i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\},\\ 0\le X_i(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),L_i(t-\tau)),t\in[\xi,T]}},$$

$$\Phi(\xi,T,K(T),K(T-\tau),K(\xi),K(\xi-\tau))=T-\xi+\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}[\ \widetilde{a}_i(T)-\widetilde{a}_i(\xi)+\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(T)\widetilde{K}_i(T)-$$

$$-\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(\xi)\widetilde{K}_i(\xi)+\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(T-\tau)\widetilde{K}_i(T-\tau)-\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(\xi-\tau)\widetilde{K}_i(\xi-\tau)+\int_{\xi-\tau}^{\xi}\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\dot{\widetilde{K}}_i(t+\tau)dt]\to\inf_{t_0\le\xi\le T}. \qquad (14)$$

Дослідження задач (14) проводиться аналогічно як задач (2).

Позначимо через $\widetilde{b}_i(t-\tau)=\widetilde{\lambda}_i(t-\tau)-\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1}a_{ji}\widetilde{\lambda}_j(t-\tau)$, $\gamma(t-\tau)=\gamma_0\widetilde{\gamma}(t-\tau)$, $t\in[\xi,T]$,

γ_0 – число для (10) при $\omega(t-\tau,\gamma_0)=0$.

Оптимальним розв'язком задачі (14) є

$K_i^{(пр)}(t)=\widetilde{K}_i(t)$ або $k_i(t)=k_i^{(маг)}(\gamma_0)$, $t\in[\xi,T]$, $i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\}$;

$C_i^{(пр)}(t-\tau)=C_i^{(\min)}$, $i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\}$;

$I_i^{(пр)}(t-\tau)=k_i^{(маг)}(\gamma_0)\dot{L}_i^{(пр)}(t)+\mu_ik_i^{(маг)}(\gamma_0)L_i^{(пр)}(t)$, $t\in[\xi,T]$, $i\in\{m-i_0+1,...,m+i_1\}$.

$L_i^{(пр)}(t)$ визначається з системи рівнянь

$$L_i^{(пр)}(t-\tau) f_i(k_i^{(маг)}(\gamma_0)) = \sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} a_{ij} f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0)) L_j^{(пр)}(t-\tau) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m-i_0} a_{ij} X_j^{(маг)}(t-\tau) + \sum_{j=m+i_1+1}^{n} a_{ij} X_j^{(маг)}(t-\tau) +$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} \chi_{ij}(k_j^{(маг)}(\gamma_0)\dot{L}_j^{(пр)}(t) + \mu_j k_j^{(маг)}(\gamma_0) L_j^{(пр)}(t)) + \sum\limits_{j=1}^{m-i_0} \chi_{ij} I_j^{(маг)}(t-\tau) + \sum\limits_{j=m+i_1+1}^{n} \chi_{ij} I_j^{(маг)}(t-\tau) + \\ + C_i^{(пр)}(t-\tau), \quad i \in \{m-i_0+1,...,m\} \\ C_i^{(пр)}(t-\tau), \quad i \in \{m+1,...,m+i_1\} \end{array}\right\} \qquad (15)$$

при виборі такого $\gamma_0 > 0$, щоб виконувалась нерівність

$$\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1} L_i(t-\tau) \le N(t-\tau) - [\sum_{i=1}^{m-i_0} L_i^{(маг)}(t-\tau) + \sum_{i=m+i_1+1}^{n} L_i^{(маг)}(t-\tau)], \; t \in [t_0, T].$$

В результаті чого, одержимо

$$\widetilde{b}_i\;(t-\tau) = \frac{\gamma_0 \widetilde{\gamma}(t-\tau)}{f_i(k_i^{(маг)}(\gamma_0)) - k_i^{(маг)}(\gamma_0) f_i'(k_i^{(маг)}(\gamma_0))},$$

$$\widetilde{\lambda}_i(t-\tau) = \gamma_0 \widetilde{\gamma}(t-\tau) \sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} \frac{a_{ji}^*}{f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0)) - k_j^{(маг)}(\gamma_0) f_j'(k_j^{(маг)}(\gamma_0))},$$

$$\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(t) = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\gamma_0 f_i'(k_i^{(маг)}(\gamma_0))}{f_i(k_i^{(маг)}(\gamma_0)) - k_i^{(маг)}(\gamma_0) f_i'(k_i^{(маг)}(\gamma_0))} \int\limits_{T-\tau}^{t} \widetilde{\gamma}(t)dt, \quad t \in [\xi, T-\tau] \\ 0, \quad t \in (T-\tau, T] \end{array}\right\},$$

$$\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(t) = \gamma_0 \widetilde{\gamma}(t-\tau) \sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} \chi_{ji} \sum_{l=m-i_0+1}^{m+i_1} \frac{a_{lj}^*}{f_l(k_l^{(маг)}(\gamma_0)) - k_l^{(маг)}(\gamma_0) f_l'(k_l^{(маг)}(\gamma_0))} +$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\gamma_0 f_i'(k_i^{(маг)}(\gamma_0))}{f_i(k_i^{(маг)}(\gamma_0)) - k_i^{(маг)}(\gamma_0) f_i'(k_i^{(маг)}(\gamma_0))} \int\limits_{T-\tau}^{t} \widetilde{\gamma}(t)dt, \quad t \in [\xi, T-\tau] \\ 0, \quad t \in (T-\tau, T] \end{array}\right\},$$

$i \in \{m-i_0+1,...,m+i_1\}$,

де функція $\widetilde{\gamma}$ визначається з диференціальної нерівності

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(t-\tau) - \mu \widetilde{\gamma}(t-\tau) + \left\{\begin{array}{l} d, \quad t \in [\xi, T-\tau] \\ 0, \quad t \in (T-\tau, T] \end{array}\right\} \widetilde{\gamma}(t) < 0, \; t \in [\xi, T],$$

розв’язком якої є вираз:

$$\widetilde{\gamma}(t-\tau) = \left\{\begin{array}{l} \widetilde{\gamma}_1(t-\tau), \quad t \in (T-\tau, T], \\ \\ \widetilde{\gamma}_{l+1}(t-\tau), \quad t \in (T-(l+1)\tau, T-l\tau], l = \overline{1,P}, P = \left[\dfrac{T-t_0}{\tau}\right] + 1; \end{array}\right.$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа,

а) при $t \in (T-\tau, T]$

$\widetilde{\gamma}_1(t-\tau) = e^{(\mu-\varepsilon)(t-T)}$, $\widetilde{\gamma}_1(T-\tau) = 1$, $\varepsilon > 0$ – досить мале число;

б) при $t \in (T-(l+1)\tau, T-l\tau]$

$$\widetilde{\gamma}_{l+1}(t-\tau) = e^{(\mu-\varepsilon)(t-T+l\tau)}\, \widetilde{\gamma}_l(T-l\tau) + d \int\limits_{t}^{T-l\tau} e^{\mu(t-s)} \widetilde{\gamma}_l(s)ds, \; \widetilde{\gamma}_{l+1}(T-(l+1)\tau) = \widetilde{\gamma}_l(T-l\tau), \; l = \overline{1,P};$$

$$d = \sup_i\{\frac{d_i}{\omega_i}\}, \; \mu = \inf_i\{\mu_i\}, \; d_i = \frac{f_i'(k_i^{(маг)}(\gamma_0))}{f_i(k_i^{(маг)}(\gamma_0)) - k_i^{(маг)}(\gamma_0) f_i'(k_i^{(маг)}(\gamma_0))},$$

$$\omega_i = \sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} \chi_{ji} \sum_{l=m-i_0+1}^{m+i_1} \frac{a_{lj}^*}{f_l(k_l^{(маг)}(\gamma_0)) - k_l^{(маг)}(\gamma_0) f_l'(k_l^{(маг)}(\gamma_0))},$$

матриця $A^{(i_0,i_1)} = (a_{ij})_{i,j=m-i_0+1}^{m+i_1}$ є продуктивною, невід'ємною, нерозкладною, а тому існує обернена матриця $(E - A^{(i_0,i_1)})^{-1} = (a_{ij}^*)_{i,j=m-i_0+1}^{m+i_1}$, де $E-$одинична матриця. При цьому матриця $A^{(i_1,i_1)} = (a_{ij})_{i,j=m+1}^{m+i_1}$ також є продуктивною, невід'ємною, нерозкладною.

А матриця $\chi_{kf}^{(i_0,i_0)} + \chi_{kf}^{(i_0,i_1)}(E - A^{(i_1,i_1)})^{-1} A^{(i_1,i_0)}$ має обернену, де $A^{(i_1,i_0)} = \left(a_{ij}\right)_{i=m+1,\, j=m-i_0+1}^{m+i_1,\ m}$,

$$\chi_{kf}^{(i_0,i_0)} = \left(\frac{\chi_{ij} k_j^{(маг)}(\gamma_0)}{f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0))} \right)_{i,j=m-i_0+1}^{m,m}, \quad \chi_{kf}^{(i_0,i_1)} = \left(\frac{\chi_{ij} k_j^{(маг)}(\gamma_0)}{f_j(k_j^{(маг)}(\gamma_0))} \right)_{i=m-i_0+1,\, j=m+1}^{m,m+i_1}.$$

Для того, щоб вектор $Lf^{(i_0)}(t) = \left(L_{m-i_0+1}(t) f_{m-i_0+1}(k_{m-i_0+1}^{(маг)}(\gamma_0)),\dots, L_m(t) f_m(k_m^{(маг)}(\gamma_0))\right)^T$ $t \in [\xi, T]$ мав невід'ємні компоненти, досить виконання нерівностей

$$\left(\psi_{m-i_0+1}(\theta) f_{m-i_0+1}(k_{m-i_0+1}^{(маг)}(\gamma_0)),\dots,\psi_m(\theta) f_m(k_m^{(маг)}(\gamma_0))\right)^T \ge 0,\ \theta \in [\xi - \tau, \xi];$$

$$[E - A^{(i_0,i_0)} - A^{(i_0,i_1)}\,(E - A^{(i_1,i_1)})^{-1} A^{(i_1,i_0)}] Lf^{(i_0)}(t-\tau) - Q^{(1)}(t-\tau) \ge 0;$$

$$-\chi_{kf}^{-1}\chi_{\mu kf} Lf^{(i_0)}(t) + \chi_{kf}^{-1}\,[E - A^{(i_0,i_0)} - A^{(i_0,i_1)}\,(E - A^{(i_1,i_1)})^{-1} A^{(i_1,i_0)}] Lf^{(i_0)}(t-\tau) -$$

$$-(E - A^{(i_1,i_1)})^{-1} A^{(i_1,i_0)}] Lf^{(i_0)}(t-\tau) - \chi_{kf}^{-1} Q^{(1)}(t-\tau) \ge 0,\ t \in [\xi, T], \tag{16}$$

де $Q^{(1)}(t-\tau) = A^{(i_0,1)} X^{(i_0,маг)}(t-\tau) + A^{(i_0,n)} X^{(i_1,маг)}(t-\tau) + C^{(i_0,\min)} +$

$+ A^{(i_0,i_1)}(E - A^{(i_1,i_1)})^{-1} Q^{(2)}(t-\tau)$, $A^{(i_0,1)} = \left(a_{ij}\right)_{i=m-i_0+1,\, j=1}^{m,\ m-i_0}$, $A^{(i_0,n)} = \left(a_{ij}\right)_{i=m-i_0+1,\, j=m+i_1+1}^{m,\ n}$,

$C^{(i_0,\min)} = \left(C_{m-i_0+1}^{(\min)},\dots,C_m^{(\min)}\right)^T$,

$Q^{(2)}(t-\tau) = A^{(i_1,m)} X^{(i_0,маг)}(t-\tau) + A^{(i_1,n)} X^{(i_1,маг)}(t-\tau) + C^{(i_1,\min)}$,

$C^{(i_1,\min)} = \left(C_{m+1}^{(\min)},\dots,C_{m+i_1}^{(\min)}\right)^T$, $X^{(i_0,маг)}(t-\tau) = \left(X_{m-i_0+1}^{(маг)}(t-\tau),\dots,X_m^{(маг)}(t-\tau)\right)^T$,

$X^{(i_1,маг)}(t-\tau) = \left(X_{m+1}^{(маг)}(t-\tau),\dots,X_{m+i_1}^{(маг)}(t-\tau)\right)^T$, $A^{(i_1,m)} = \left(a_{ij}\right)_{i=m+1,\, j=1}^{m+i_1,\ m-i_0}$,

$A^{(i_1,n)} = \left(a_{ij}\right)_{i=m+1,\, j=m+i_1+1}^{m+i_1,\ n}$.

Таким чином, знайдемо праві інвестиції $I_i^{(np)}(t-\tau)$, праві валові продукції $X_i^{(np)}(t-\tau) = f_i(k_i^{(маг)}) L_i^{(np)}(t-\tau)$, праві кінцеві продукції

$$Y_i^{(np)}(t-\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{j=m-i_0+1}^{m} \chi_{ij} I_j^{(np)}(t-\tau) + C_i^{(\min)}, & i \in \{m - i_0 + 1,\dots,m\} \\ C_i^{(\min)}, & i \in \{m+1,\dots,m+i_1\} \end{cases},\ t \in [\xi, T],$$

а також правий стан системи із рівняння руху капіталу

$$K_i^{(np)}(t) = \widetilde{K}_i(t) e^{-\mu_i(t-\xi)} + \int_{\xi}^{t} I_i^{(np)}(s-\tau) e^{-\mu_i(t-s)} ds,\ t \in [\xi, T],\ i \in \{m - i_0 + 1,\dots,m+i_1\}.$$

Аналогічно знаходяться функції $\widetilde{a}_i(t)$, $t \in [\xi, T]$, $i \in \{m - i_0 + 1,\dots,m+i_1\}$. Причому функції $\widetilde{\varphi}_i^{(0)}$, $\widetilde{\varphi}_i^{(1)}$, $\widetilde{a}_i$ є неперервними на $[t_0, T]$. А тому, за теоремою Вейєрштрасса, неперервна функція на замкненій множині досягає точної нижньої межі. Отже, точка ξ існує, і для цієї задачі є точкою переключення керувань.

Тоді оптимальним розв'язком задачі (1) є процес $\pi = \{K^{(opt)}(t),\ I^{(opt)}(t-\tau),$ $C^{(opt)}(t-\tau),\ X^{(opt)}(t-\tau), Y^{(opt)}(t-\tau), L^{(opt)}(t-\tau), t\in[t_0,T]\}$ з компонентами:

$$K_i^{(opt)}(t) = \begin{Bmatrix} \widetilde{K}_i\,(t), & t\in[t_0,\xi] \\ K_i^{(np)}(t), & t\in[\xi,T] \end{Bmatrix}, \qquad I_i^{(opt)}(t-\tau) = \begin{Bmatrix} I_i^{(маг)}(t-\tau), & t\in[t_0,\xi) \\ I_i^{(np)}(t-\tau), & t\in[\xi,T] \end{Bmatrix},$$

аналогічний вигляд мають керування $C_i^{(opt)}$, $X_i^{(opt)}$, $Y_i^{(opt)}$, $L_i^{(opt)}$, $i\in\{1,...,n\}$.

Одержані результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виробничі функції $F_i\,(K_i, L_i)$, $K_i \ge 0$, $L_i \ge 0$, $i\in\{1,...,n\}$ двічі неперервно-диференційовані, монотонно зростаючі, опуклі вверх за кожним аргументом та однорідні першого порядку; функції корисності $U_i(C_i)$, $C_i \ge 0$, $i\in\{1,...,n\}$ - двічі неперервно-диференційовані, монотонно зростаючі та опуклі вверх за C_i. Матриці $A, \widetilde{A}^{(2)}, A^{(22)}, A^{(i_0,i_1)}, A^{(i_1,i_1)}$ - продуктивні, невід'ємні та нерозкладні, а матриці A^*, χ_{kf}, $\chi_{kf}^{(1)} + \chi_{kf}^{(2)}(E - A^{(22)})^{-1}A^{(21)}$, $\chi_{kf}^{(i_0,i_0)} + \chi_{kf}^{(i_0,i_1)}(E - A^{(i_1,i_1)})^{-1}A^{(i_1,i_0)}$ мають обернені. Виконуються нерівності (9), (16). Тоді оптимальна траєкторія $K^{(opt)}(t)$, $t\in[t_0,T]$ є кусково-диференційованою, оптимальні керування $C^{(opt)}(t)$, $X^{(opt)}(t)$, $L^{(opt)}(t)$, $t\in[t_0,T]$ - кусково-диференційованими на $[t_0,T]$, а оптимальні керування $I^{(opt)}(t)$, $Y^{(opt)}(t)$, $t\in[t_0,T]$ - кусково-неперервними на $[t_0,T]$.

Числове моделювання трьохгалузевої економіки із запізненням

Проведено дослідження статичної моделі оптимального розвитку трьохгалузевої економіки із запізненням при таких даних:

$$F_1(K_1,L) = 10K_1^{1/4}L^{3/4},\ F_2(K_2,L) = 12K_2^{1/3}L^{2/3},\ F_3(K_3,L) = 15K_3^{1/5}L^{4/5};$$

$$U_1(C_1) = C_1^{1/2},\ U_2(C_2) = 2C_2^{1/2},\ U_3(C_3) = 3C_3^{1/2};\ m=1;\ n=3;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.403 & 0.528 & 0.096 \\ 0.092 & 0.003 & 0.226 \\ 0.092 & 0.006 & 0.054 \end{pmatrix};\ \chi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ C_1^{(\min)} = 0{,}1,\ C_2^{(\min)} = 0{,}2,\ C_3^{(\min)} = 0{,}3;$$

$$\mu_1 = 0{,}07,\ \mu_2 = 0{,}08,\ \mu_3 = 0{,}09;\ \delta = 0{,}05;\ t_0 = 0,\ T = 10;\ \tau = 0.25;\ \gamma_0 = 2;$$

$$\lambda_{10} = 1,\ \lambda_{20} = 1{,}5,\ \lambda_{30} = 2;\ \psi_1(\theta) = 0{,}3,\ \psi_2(\theta) = 0{,}046,\ \psi_3(\theta) = 0{,}054;\ \phi_1(\theta) = 0{,}117,$$

$$\phi_2(\theta) = 0{,}028,\ \phi_3(\theta) = 0{,}017;\ K_1^{(0)} = 5,\ K_2^{(0)} = 4,\ K_3^{(0)} = 3;\ K_1^{(T)} = 350,\ K_2^{(T)} = 40,\ K_3^{(T)} = 25.$$

В результаті розрахунку одержали результати (наводяться деякі):

– оптимальна траєкторія і оптимальне керування

t	$K_3^{(onm)}(t)$	$X_1^{(onm)}$	$I_2^{(onm)}$	$L_3^{(onm)}$	$Y_1^{(onm)}$
0	3	4.606	0.028	0.054	0.406
0.25	2.93	5.42	0.041	0.084	0.46
0.5	2.87	6.38	0.062	0.12	0.65
0.75	2.81	7.68	0.17	0.34	1.85
1	2.75	8.42	0.31	0.62	3.55
1.25	2.7	9.37	0.44	0.88	4.61
1.5	2.79	11.78	0.56	0.91	5.68
1.75	3.40	14.21	0.62	1.11	6.76
2	3.77	18.17	0.67	1.23	6.87
2.25	4.02	21.65	0.78	1.31	8.91
2.5	4.26	28.92	0.81	1.39	8.18
2.75	4.69	32.69	0.86	1.53	8.93
3	5.03	40.83	0.89	1.64	9.05
3.25	5.31	49.44	0.93	1.73	9.96

3.5	5.58	63.41	0.98	1.82	10.16
3.75	5.86	79.62	1.02	1.91	10.35
4	6.11	98.72	1.03	1.99	10.45
4.25	6.38	120.57	1.04	2.08	10.52
4.5	6.72	150.25	1.19	2.19	12.13
4.75	6.84	187.85	1.21	2.23	12.27
5	7.03	223.51	1.27	2.29	12.69
5.25	7.15	289.53	1.29	2.33	13.04
5.5	7.38	357.79	1.30	2.41	13.61
5.75	7.64	436.14	1.36	2.49	13.90
6	8.01	540.49	1.37	2.61	14.02
6.25	8.38	700.32	1.42	2.73	14.73
6.5	8.84	807.41	1.45	2.88	14.82
6.75	8.99	1018	1.48	2.93	15.11
7	9.17	1256	1.51	2.99	15.9
7.25	9.39	1460	1.59	3.06	16.54
7.5	9.60	2000	1.67	3.13	16.96
7.75	9.85	2372	1.73	3.21	17.41
8	10.12	3020	1.77	3.30	17.74
8.25	10.31	3674	1.79	3.36	18.06
8.5	10.46	4316	1.84	3.41	18.62
8.75	10.77	5978	1.86	3.51	18.81
9	13.05	6870	7.11	10.58	72.41
9.25	15.63	8300	17.43	20.41	176.37
9.5	17.31	9420	23.38	31.56	234.9
9.75	19.99	11320	31.58	43.65	342.99
10	25	13830	41.87	56.23	423.33

$$C_1^{(onm)}(t) = 0.244\,,\ t \in [0,10]\,;\ C_2^{(onm)}(t) = 0.433\,,\ t \in [0,10]\,;\ C_3^{(onm)}(t) = \begin{cases} 0.549, & t \in [0, 8.9), \\ 0.3, & t \in [8.9,10]; \end{cases}$$

$$Y_2^{(onm)}(t) = 0.433\,,\ t \in [0,10]\,;\ Y_3^{(onm)}(t) = \begin{cases} 0.549, & t \in [0, 8.9), \\ 0.3, & t \in [8.9,10]; \end{cases}$$

– момент переключення керувань $\xi = 8.9$.

Економічна інтерпретація. Третя галузь на відрізку часу [0; 1.25] рухається по оптимальній траєкторії, а на [1.25, 8.9] - по магістралі $k_3 = K_3 / L_3 = 3.068$ (також оптимальна траєкторія). На часовому відрізку [8.9, 10] рух відбувається по правій крайовій траєкторії і на цьому відрізку споживання третьої галузі мінімальне, а відбувається накопичення інвестицій.

Висновки

1. Проведено дослідження моделі статичного міжгалузевого балансу із запізненням, побудовано оптимальне керування та траєкторія.
2. На модельному прикладі проведено числове моделювання трьохгалузевої статичної моделі із запізненням.

Література

1. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Знание, 1990. – 430с.
2. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. – М.: Наука, 1992. – 336с.
3. Фодчук В.І., Бігун Я.Й., Клевчук І.І., Черевко І.М., Якімов І.В. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 210с.

Одержано 30.06.2008 р.