Ленюк М. Обчислення невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера–Фур'є (Конторовича–Лєбєдєва) на полярній осі / Ленюк М., Шелестовська М. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 16. — № 4. — С.193-201. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.52/524

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська[2], канд. техн. наук

[1]*Чернівецький факультет Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*
[2]*Тернопільський національний економічний університет*

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА–ФУР'Є (КОНТОРОВИЧА–ЛЄБЄДЄВА) НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Резюме. *Методом порівняння розв'язків крайової задачі на полярній осі з двома точками спряження для сепаратної системи з диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та Конторовича–Лєбєдєва для модифікованих функцій, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого – методом відповідного гібридного інтегрального перетворення обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера–Фур'є (Конторовича–Лєбєдєва).*

Ключові слова*: невласні інтеграли, власні елементи, гібридний диференціальний оператор, інтегральне перетворення, головні розв'язки.*

M. Lenyuk, M. Shelestovska

COMPUTATION IMAGINARYS INTEGRALS SETS ACCORDING OWN ELEMENTS OF THE HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR EILER–FURIER (KONTOROVYCH–LEBEDEV) ON THE POLAR AXIS

The summary*. Using comparison method of solving the boundary problem on the polar axis segment with two junction points for the separate system consisting of Eiler, Furier and Kontorovych–Lebedev differential equations for the modified functions, built, on one side, by Caushier function method, and on the other side, by the definite hybrid integral transformation, polyparametric family of the imiginarys integrals accordihg to the own elements of the differential operator Eiler–Furier (Kontorovych–Lebedev) have been calculationed.*

Key words: *unown integrals, own elements, hybrid differential operator, integral transformations, main decision.*

Вступ. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик призводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображуються поліпараметричними інтегралами, які можуть бути умовно збіжними навіть тоді, коли зображають аналітичну функцію. Звідси виникає доцільність заміни невласного інтеграла його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню невласних інтегралів присвячені роботи [1, 2].

Мета роботи. Розробити методику обчислення поліпараметричної сім'ї невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера–Фур'є (Конторовича–Лєбєдєва).

Постановка задачі. Побудуємо обмежений на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є, Конторовича–Лєбєдєва для модифікованих функцій

$$(B_{\alpha_1}^* - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r), r \in (0, R_1),$$
$$(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2)u_2(r) = -g_2(r), r \in (R_1, R_2), \tag{1}$$
$$(B_{\alpha_2} - q_3^2)u_3(r) = -g_3(r), r \in (R_2, \infty),$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, j,k = 1,2. \tag{2}$$

У рівностях (1), (2) $q_m > 0$, $c_{1k}c_{2k} > 0, c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k; \alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0,$ $B_{\alpha_1}^* = r^2 \frac{d}{dr} + (2\alpha_1 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_1^2$ – диференціальний оператор Ейлера [3]; $B_{\alpha_2} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$ – диференціальний оператор Конторовича–Лєбєдєва [4]; $2\alpha_j + 1 > 0, \lambda \in (0, \infty)$.

Результати досліджень. I. Метод функцій Коші. Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* - q_1^2)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha_1 - q_1}$ та $v_2 = r^{-\alpha_1 + q_1}$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича–Лєбєдєва $(B_{\alpha_2} - q_3^2)v = 0$ складають функції Бесселя уявного аргументу 1-го роду $I_{q_2,\alpha_3}(\lambda r)$ та 2-го роду $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2)v = 0$ складають функції $v_1 = chq_2 r$ та $v_2 = shq_2 r$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (1), (2) методом функцій Коші [3, 5]:

$$u_1(r) = A_1 r^{-\alpha_1 + q_1} + \int_0^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho,$$
$$u_2(r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) d\rho, \tag{3}$$
$$u_3(r) = B_3 K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho.$$

Тут $E_j(r,\rho)$ – функції Коші:

$$E_1(r,\rho) = \frac{1}{2q_1 Z_{\alpha_1;11}^{12}(q_1, R_1)} \begin{cases} r^{-\alpha_1 + q_1} \psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, \rho), \; 0 < r < \rho < R_1, \\ \rho^{-\alpha_1 + q_1} \psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, r), \; 0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{4}$$

$$E_2(r,\rho) = -\frac{1}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \begin{cases} \Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 r)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho), \; R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 \rho)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 r), \; R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \tag{5}$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)} \begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r),\ R_2 < r < \rho < \infty, \\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho),\ R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Функції, які беруть участь у рівностях (4)–(6), загальноприйняті [1, 6].

Умови спряження (2) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають неоднорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z^{12}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1)A_1 - V^{11}_{j2}(q_2R_1)A_2 - V^{12}_{j2}(q_2R_1)B_2 = \omega_{j1} + \delta_{j2}G_{12},\ j=1,2,$$
$$V^{21}_{j1}(q_2R_2)A_2 + V^{22}_{j1}(q_2R_2)B_2 - U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2) = \omega_{j2} + \delta_{j2}G_{23}. \tag{7}$$

У системі (7) беруть участь функції

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_0^{R_1} \frac{\rho^{-\alpha_1+q_1}}{Z^{12}_{\alpha_1;11}(q_1,R_1)} g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + c_{21}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)} g_2(\rho)d\rho,$$

$$G_{23} = -c_{12}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)} g_2(\rho)d\rho + \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_2}^{\infty} \frac{K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)} g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0, \delta_{22}=1)$.

Введемо до розгляду функції

$$A_{\alpha_1;j}(q) = Z^{12}_{\alpha_1;11}(q_1,R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2) - Z^{12}_{\alpha_1;21}(q_1,R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),\ j=1,2,$$
$$B_{\alpha_2,j}(q) = \Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2) - \Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2)U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2),$$
$$\theta_{\alpha_1;1}(r,q) = Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2r) - Z^{12}_{\alpha_1,21}(q_1,R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r),$$
$$\theta_{\alpha_2,2}(r,q) = U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r) - U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначного розв'язку крайової задачі (1), (2): визначник алгебраїчної системи (7) відмінний від нуля

$$\Delta_{(\alpha)}(q) \equiv A_{\alpha_1;1}(q)U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2) - A_{\alpha_1;2}(q)U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2) =$$
$$= B_{\alpha_2,2}(q)Z^{12}_{\alpha_1;11}(q_1,R_1) - B_{\alpha_2,1}(q)Z^{12}_{\alpha_1;21}(q_1,R_1) \neq 0. \tag{8}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1), (2):

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);11}(r,q) = \frac{B_{\alpha_2;2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} r^{-\alpha_1+q_1},\ \mathcal{R}^1_{(\alpha);21}(r,q) = -\frac{B_{\alpha_2,1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} r^{-\alpha_1+q_1},$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);12}(r,q) = -\frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)} U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2) r^{-\alpha_1+q_1},\ \mathcal{R}^1_{(\alpha);22}(r,q) = \frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)} U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2) r^{-\alpha_1+q_1},$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);11}(r,q) = -\frac{Z^{12}_{\alpha_1;21}(q_1,R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2,2}(r,q),\ \mathcal{R}^2_{(\alpha);21}(r,q) = \frac{Z^{12}_{\alpha_1;11}(q_1,R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2,2}(r,q). \tag{9}$$

$$\mathcal{R}^2_{\nu(\alpha);12}(r,q) = -\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(r,q),\ \mathcal{R}^2_{\nu(\alpha);22}(r,q) = \frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);11}(r,q) = -\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)} Z^{12}_{\alpha_1;21}(q_1R_1)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),\ \mathcal{R}^3_{(\alpha);21}(r,q) = \frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)} Z^{12}_{\alpha_1;11}(q_1R_1)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);12}(r,q) = \frac{A_{\alpha_1,2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),\ \mathcal{R}^3_{(\alpha);22}(r,q) = -\frac{A_{\alpha_1,1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);$$

2) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);11}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_1\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1)}[B_{\alpha_2,2}(q)\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)-B_{\alpha_2,1}(q)\psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,\rho)], 0<r<\rho<R_1, \\ \rho^{-\alpha_1+q_1)}[B_{\alpha_2,2}(q)\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)-B_{\alpha_2,1}(q)\psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,r)], 0<\rho<r<R_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2;2}(\rho,q)r^{-\alpha_1+q_1},$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);13}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}q_2c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}r^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\rho^{-\alpha_1+q_1)}\theta_{\alpha_2,2}(r,q),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_2\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta_{\alpha_1;1}(r,q)\theta_{\alpha_2;2}(\rho,q), R_1<r<\rho<R_2, \\ \theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\theta_{\alpha_2;2}(r,q), R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,\alpha_1;1}(r,q)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}q_2}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\rho^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r). \qquad (10)$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)[A_{\alpha_1,2}(q)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)- \\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)[A_{\alpha_1,2}(q)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)-\end{cases}$$

$$-A_{\alpha_2,1}(q)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r), R_2<r<\rho<\infty,$$

$$-A_{\alpha_1,1}(q)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda\rho), R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначного розв’язку алгебраїчної системи (7) та підстановки отриманих значень A_1, A_2, B_2, B_3 у формули (3) маємо єдиний розв’язок крайової задачі (1)–(2)

$$u_j(r)=\sum_{m,k=1}^{2}\mathcal{R}^{j}_{(\alpha);mk}(r,q)\omega_{mk}+\int_0^{R_1}\mathcal{H}_{(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho, j=\overline{1,3}. \qquad (11)$$

II. Метод інтегральних перетворень. Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)B^*_{\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\frac{d^2}{dr^2}+\theta(r-R_2)B_{\alpha_2}. \qquad (12)$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [5].

Означення. За область визначення ГДО $M_{(\alpha)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r)=\{B^*_{\alpha_1}[g_1];g_2'';B_{\alpha_2}[g_3]\}$ неперервна на I_2^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови обмеження

$\lim\limits_{r\to 0}[r^{\gamma_1}g_1(r)]=0,\ \lim\limits_{r\to\infty}[r^{\gamma_2}g_3(r)]=0$;

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k d/dr+\beta_{j1}^k)g_k(r)-(\alpha_{j2}^k d/dr+\beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)]|_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2\,. \qquad (13)$$

Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений і має на множині I_2^+ одну особливу точку $r=0$, то його спектр дійсний та неперервний [7]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$ і йому відповідає спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\,. \qquad (14)$$

При цьому $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(B_{\alpha_1}^*+b_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ r\in(0,R_1)\,,$$
$$(d^2/dr^2+b_2^2)V_{(\alpha);2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2)\,, \qquad (15)$$
$$\left(B_{\alpha_2}+b_3^2\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty)\,,$$

та умови спряження (13); $b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\ge 0$, $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^*+b_1^2)v=0$ утворюють функції $r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)$ та $r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)$ [3], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b_2^2)v=0$ утворюють функції $\cos b_2 r$ та $\sin b_2 r$ [3], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича–Лєбєдєва $(B_{\alpha_2}+b_3^2)v=0$ складають функції $C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [4].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)+B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r),\ r\in(0,R_1)\,,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta)=A_2\cos b_2 r+B_2\sin(b_2 r),\ r\in(R_1,R_2)\,, \qquad (16)$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta)=B_3 D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3),\ r\in(R_2,\infty)\,,$$

то умови спряження (13) дають алгебраїчну систему

$$Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1,R_1)A_1+Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1,R_1)B_1-v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2-v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=0\,,$$
$$v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2+v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2-X_{\alpha_2,j2}^{22}(\lambda R_2,b_3)B_3=0,\ j=1,2\,. \qquad (17)$$

У результаті розв'язання системи (17) стандартним способом та підстановки обчислених величин A_j,B_j у рівності (16) отримуємо функції

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=\omega_{(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)-\omega_{(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)\,,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta)=c_{11}b_1R_1^{-(2\alpha_1+1)}[X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2,b_3)\varphi_{21}^2(b_2R_2,b_2r)-X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2,b_3)\varphi_{11}^2(b_2R_2,b_2r)]\,,$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta)=c_{11}b_1R_1^{-(2\alpha_1+1)}c_{12}b_2D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)\,. \qquad (18)$$

У рівностях (18) беруть участь функції

$$\varphi_{j1}^2(b_2R_2,b_2r)=v_{j1}^{22}(b_2R_2)\cos b_2r-v_{j1}^{21}(b_2R_2)\sin b_2r,\ j=1,2\,,$$
$$a_{\alpha_2;j}(\beta)=X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2,b_3)\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2)-X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2,b_3)\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2)\,,$$
$$b_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2)-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2);\ j,k=1,2\,,$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta)=a_{\alpha_2,1}(\beta)Y_{\alpha_1;21}^{1j}(b_1R_1)-a_{\alpha_2,2}(\beta)Y_{\alpha_1;11}^{1j}(b_1,R_1),\ j=1,2\,.$$

Спектральна функція $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ визначена.

Введемо до розгляду числа $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = c_{21}R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11}, \sigma_3 = c_{21}c_{22}R_1^{2\alpha_1+1}(c_{11}c_{12}R_2^{2\alpha_1+1})^{-1}$, вагову функцію $\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}$ та спектральну густину $\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}([\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$.

Наявність спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{(\alpha)}$ [8],

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta). \tag{19}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \tag{20}$$

Наведемо ще основну тотожність

$$H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^{3}\tilde{g}_i(\beta)k_i^2 + \sum_{k=1}^{2} d_k[Z_{(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}]. \tag{21}$$

Тут прийняті позначення

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr, \tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr, d_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11}, d_2 = \sigma_2 : c_{12},$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^k(\beta) = (\alpha_{i2}^k \, d\!\!\diagup\!_{dr} + \beta_{i2}^k)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)|_{r=R}\ ; i,k = 1,2.$$

Правила (19), (20), (21) складають математичний апарат для розв’язання крайової задачі (1), (2).

Запишемо систему (1) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} (B_{\alpha_1}^* - q_1^2)u_1(r) \\ (d^2\!\diagup\!_{dr^2} - q_2^2)u_2(r) \\ (B_{\alpha_2} - q_3^2)u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}$ згідно з правилами (19) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\begin{aligned} H_{(\alpha)}[...] = [\int_0^{R_1} ...V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr \ \int_{R_1}^{R_2} ...V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 dr \\ \int_{R_2}^{\infty} ...V_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr]. \end{aligned} \tag{23}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (23) до системи (22) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (21) отримаємо алгебраїчне рівняння

$$(\beta^2 + q^2)\tilde{u}(\beta) = \tilde{g}(\beta) + \sum_{k=1}^{2} d_k[Z_{(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k} - Z_{\alpha,22}^k(\beta)\omega_{1k}],\ q^2 = \max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\}.$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u}(\beta) = \frac{\tilde{g}(\beta)}{\beta^2 + q^2} + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[\frac{Z^k_{(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2 + q^2}\omega_{2k} - \frac{Z^k_{(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2 + q^2}\omega_{1k}\right]. \quad (24)$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{(\alpha)}$ згідно з правилом (20) як обернений до (23) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H^{-1}_{(\alpha)}[...] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ...V_{(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ...V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ...V_{(\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (25) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(\beta)]$, де функція $\tilde{u}(\beta)$ визначена формулою (24). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2)

$$\begin{aligned} u_j(r) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{u}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta = \sum_{k=1}^{2} d_k\Big[\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z^k_{(\alpha);12}(\beta)}{(\beta^2+q^2)}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)\omega_{2k} - \\ &-\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z^k_{(\alpha);22}(\beta)}{(\beta^2+q^2)}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)\omega_{1k}\Big] + \int_0^{R_1}\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)}{(\beta^2+q^2)}V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\times \\ &\times\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2}\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)}{(\beta^2+q^2)}V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)g_2(\rho)\sigma_2 d\rho + \\ &+\int_{R_2}^{\infty}\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)}{(\beta^2+q^2)}V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho, \quad j=\overline{1,3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Порівнюючи розв'язки (11) та (26) в міру єдиності, отримуємо формули обчислення невласних інтегралів

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z^k_{(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2+q^2}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta = d_k^{-1}\mathcal{R}^j_{(\alpha);2k}(r,q); k=1,2;\ j=\overline{1,3}. \quad (27)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z^k_{(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2+q^2}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta = -d_k^{-1}\mathcal{R}^j_{(\alpha);1k}(r,q); k=1,2;\ j=\overline{1,3}. \quad (28)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)}{\beta^2+q^2}V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta = \sigma_k^{-1}\mathcal{H}_{(\alpha);jk}(r,\rho,q);\ j,k=\overline{1,3}. \quad (29)$$

Функції впливу $\mathcal{H}_{(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ визначені рівністю (10), функції Гріна $\mathcal{R}^j_{(\alpha);ik}(r,q)$ умов спряження визначені формулами (9).

Зауваження 1. Якщо $q^2 = q_1^2$, то $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = q_1^2 - q_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = q_1^2 - q_3^2 \ge 0$; якщо $q^2 = q_2^2 > 0$, то $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = 0$, $k_3^2 = q_2^2 - q_3^2 \ge 0$; якщо $q^2 = q_3^2 > 0$, то $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = 0$.

Зауваження 2. Праві частини у формулах (27) – (29) не залежать від нерівностей $(q_j^2 - q_m^2) \ge 0$.Тому за необхідності можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q_0^2 > 0$.

Підсумком наведених не власних досліджень є твердження.

Основна теорема. *Нехай функція $g(r) \in G$, функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (2) та виконується умова (8) однозначного розв'язку крайової задачі (1), (2). Тоді справджуються формули (27)–(29) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеною рівністю (12).*

Висновки. Отримані формули (27)–(29) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі обчислення невласних інтегралів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики.

Література

1. Ленюк, М.П. Обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами гібридних диференціальних операторів другого порядку. Том VI [Текст] / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2010. – 404с.
2. Ленюк, М. Обчислення невласних інтегралів за власними гібридного диференціального оператора Ейлера–Фур'є на сегменті $[0, R_2]$ полярної осі [Текст] / М. Ленюк, Б. Шелестовський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – Том 13, №2. – С. 127–134.
3. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
4. Ленюк, М.П. Інтегральні перетворення типу Конторовича–Лєбєдєва [Текст] / М.П. Ленюк, Г.І. Міхалевська. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
5. Шилов, Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс [Текст] / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328с.
6. Ленюк, М. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора (Конторовича–Лєбєдєва) Ейлера–Фур'є на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі [Текст] / М. Ленюк, М. Шелестовська // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2010. – Том 15, №4. – С. 121–130.
7. Ленюк, М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 [Текст] / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368с.
8. Ленюк, М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера – (Фур'є, Бесселя) [Текст] / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2009. – 76с.

Отримано 06.11.2011