Семенюта М. Збалансованість деяких видів графів / Семенюта М., Олійник О. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 16. — № 4. — С.151-155. — (приладобудування та іформаційно-вимірювальні технології).

УДК 519.17

М. Семенюта[1], канд. фіз.-мат. наук; О. Олійник[2]

[1]Державна льотна академія України
[2]Кіровоградський кібернетико-технічний коледж

ЗБАЛАНСОВАНІСТЬ ДЕЯКИХ ВИДІВ ГРАФІВ

***Резюме**. Доведено, що декартів добуток двох графів є строго збалансованим графом, якщо хоча б один із графів множників строго збалансований. Досліджено умови збалансованості з'єднання двох графів та визначено, при яких потужностях множини вершин певних графів ці графи будуть рівномірно збалансованими.*

***Ключові слова:** нумерація, збалансований граф, строго вершинно-збалансований граф, строго реберно-збалансований граф, множина збалансованих індексів, рівномірно збалансований граф.*

M. Semenyuta, O. Oliinyk

ON BALANCEDNESS OF SOME GRAPH CONSTRUCTIONS

***The summary.** Provide Cartesian product of two graphs is a strongly balanced graph, if at least one of the graphs multiplier is strongly balanced graph. The conditions balanced connections of two graphs are analyzed and determined, under which the capacities of the set of vertexes of certain graph, these graphs will be uniformly balanced graph.*

***Key words:** labeling, balanced graph, strongly vertex-balanced graph, strongly edge-balanced graph, balance index set, uniformly balanced graph.*

Умовні позначення

$V(G)$ – звичайний скінчений неорієнтований граф;
$v_f(0)$ – число вершин графа G з позначкою 0;
$v_f(1)$ – число вершин графа G з позначкою;
$e_f(0)$ – число ребер графа G з позначкою 0;
$e_f(1)$ – число ребер графа G з позначкою 1;
$G\times H$ – декартів добуток графів G і H;
$G+H$ – з'єднання графів G і H;
BI(G) – множина збалансованих індексів графа G.

1. Вступ. Відомо, що під нумерацією скінченого неорієнтованого графа $G=(V, E)$ розуміють відображення f: $V \to Z$ (або $E \to Z$), де Z – скінченна множина, елементами якої, як правило, є додатні або невід'ємні цілі числа. Нумерація f породжує реберну (або вершинну) нумерацію f^* графа G. Залежно від f^* розрізняють граціозну, досконалу, гармонійну, арифметичну, магічну, антимагічну, кардіальну та інші нумерації. Серед останніх видів нумерацій – часткова реберна нумерація, яка призводить до поняття збалансованого графа [1]. Збалансованість деяких конструкцій графів розглянуто в [2]. Множини збалансованих індексів досліджують автори робіт [3, 4].

У [2] доведено строгу збалансованість декартового добутку графів за певних умов, а також збалансованість диз'юнктивного об'єднання m копій графа K_n, композиції і тензорного добутку двох графів. У [3] введено поняття рівномірно збалансованого графа і висунута проблема, пов'язана з загальною характеристикою рівномірно збалансованих графів.

Занумеровані графи знайшли застосування у кристалографії, теорії кодування, радіолокації, проектуванні схем і комунікаційних мереж; керуванні базами даних та ін.

В даній роботі доведено, що декартів добуток двох графів є строго збалансованим графом, якщо хоча б один із графів множників строго збалансований. Це узагальнює результат, отриманий в [2]. Ми дослідили умови збалансованості з'єднання двох графів та визначили, при яких потужностях множини вершин певних графів ці графи будуть рівномірно збалансованими.

2. Про збалансованість деяких графів. Будемо розглядати звичайні графи, тобто скінчені, неорієнтовані графи, які не містять петель та кратних ребер. Наведемо теоретичні відомості, що стосуються даної тематики.

Нехай G – граф з множиною вершин $V(G)$ і множиною ребер $E(G)$. Бінарна вершинна нумерація графа G – це відображення f: $V(G)\to\{0, 1\}$. Кожна бінарна вершинна нумерація індукує бінарну реберну нумерацію f^*: $E(G)\to\{0, 1\}$, яка визначається за певним правилом. Число вершин графа G, що мають позначки 0 і 1 при нумерації вершин f, позначатимемо $v_f(0)$ і $v_f(1)$ відповідно. Аналогічно $e_f(0)$ і $e_f(1)$ – число ребер графа G, які мають позначки 0 і 1, відповідно, при нумерації ребер f^*, породженій нумерацією f.

Кожна бінарна вершинна нумерація f графа G породжує *часткову реберну нумерацію* f^* графа G, яка визначається таким чином:

$$f^*(u, v)= \begin{cases} 0, \text{ якщо } f(u) = f(v) = 0, \\ 1, \text{ якщо } f(u) = f(v) = 1, \end{cases}$$

де $(u, v)\in E(G)$. У випадку, якщо $f(u)\neq f(v)$, то ребро (u, v) не має позначки.

Таким чином, f^* є частковою функцією із $E(G)$ у множину $\{0, 1\}$.

Граф G називається *збалансованим*, якщо часткова реберна нумерація f^* така, що $|v_f(0)-v_f(1)|\leq 1$ і $|e_f(0)-e_f(1)|\leq 1$, де f – бінарна вершинна нумерація.

Граф G називається *строго вершинно-збалансованим*, якщо G збалансований і $v_f(0)=v_f(1)$.

Граф G – *строго реберно-збалансований*, якщо G збалансований і $e_f(0)=e_f(1)$.

Якщо G є строго вершинно-збалансованим і строго реберно-збалансованим, то G – *строго збалансований граф*.

Декартовим добутком графів G і H називається граф $G\times H$, множина вершин якого має вигляд $V=V(G)\times V(H)$ і дві вершини (a, x), (b, y) з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли або $a=b$, $(x, y)\in E(H)$, або $x=y$, $(a, b)\in E(G)$.

Дослідження збалансованості графів провели автори [2]. Вони розглянули диз'юнктивне об'єднання m копій графа K_n, декартів добуток, композицію і тензорний добуток двох графів. У [2] доведено, що коли H – строго збалансований граф і G – довільний граф, то $G\times H$ є строго збалансованим графом.

Теорема 2.1. Граф $G\times H$ є строго збалансованим графом, якщо один із графів G або H строго збалансований.

Доведення. Згідно з [2] визначимо розріз (або H-розріз) для кожної вершини (a_i, x), де i=1, 2, …, $|V(G)|$ графа $G\times H$ як підграф на множині вершин (a_i, x), що є копією графа G. Аналогічно визначається G-розріз.

Нехай G – строго збалансований граф, а H – довільний граф. Якщо розглянути строго збалансовану нумерацію f графа G і застосувати її до кожного H-розрізу графа $G\times H$, то диз'юнктивне об'єднання цих розрізів буде строго збалансованим графом. Усі вершини кожного G-розрізу графа $G\times H$, а отже, і ребра мають однакові позначки: нулі або одиниці. Так як G – строго збалансований граф, то для графа $G\times H$ маємо $v_f(0)=v_f(1)$ і $e_f(0)=e_f(1)$. Отже, $G\times H$ є строго збалансованим графом. Випадок, коли H – строго збалансований граф, G – довільний граф, розглянуто в [2]. Теорему доведено.

Теорема 2.1 узагальнює теорему 3.1, доведену в [2].

За Зиковим, *з'єднанням графів* G і H, таких, що $V(G)\cap V(H)=\varnothing$, називається граф $G+H$, з множиною вершин $V=V(G)\cup V(H)$ і множиною ребер $E=E(G)\cup E(H)\cup\{(a, x) : a\in V(G),\ x\in V(H)\}$. Якщо ж $V(G)\cap V(H)\neq\varnothing$, то перед операцією з'єднання проводять перепозначення вершин графів-операндів, щоб нові множини їх вершин не мали спільних елементів.

Дослідимо збалансованість графа G+H, тобто з'ясуємо, чи є він строго збалансованим і за яких умов.

Теорема 2.2. Граф G+H є строго збалансованим, якщо кожен із графів G і H строго збалансований.

Доведення. Нехай у графі G+H до копії графа G застосована строго збалансована нумерація φ цього графа. Аналогічно до копії графа H застосована його строго збалансована нумерація ψ. Тоді отримаємо вершинну нумерацію f графа G+H, для якої виконується рівність

$$v_f(0)=v_\varphi(0)+v_\psi(0)=v_\varphi(1)+v_\psi(1)=v_f(1).$$

Нумерація f породжує часткову реберну нумерацію f^* таку, що

$$e_f(0)=e_\varphi(0)+e_\psi(0)+(|V(G)|/2|)\cdot(|V(H)|/2)=e_\varphi(1)+e_\psi(1)+(|V(G)|/2|)\cdot(|V(H)|/2)=e_f(1)$$

Тому граф G+H є строго збалансованим.

Ця теорема є продовженням досліджень, проведених авторами робіт [1, 2] відносно збалансованості певних видів графів.

Розглянемо випадок, коли кожен з графів-операндів ізоморфний графу G і при цьому виконано перепозначення вершин.

Означення 2.3. Бінарній вершинній нумерації f графа G, що індукує часткову реберну нумерацію f^*, поставимо у відповідність вершинну нумерацію $\overline{f}$ таку, що $\overline{f}(v)=1-f(v)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ f(v)=1,\\ 1,\ \textit{якщо}\ f(v)=0.\end{cases}$ Нумерацію $\overline{f}$ назвемо *двоїстою* до даної вершинної нумерації f.

Тоді $v_f(0)=v_{\overline{f}}(1)$, $v_f(1)=v_{\overline{f}}(0)$, а отже і $e_f(0)=e_{\overline{f}}(1)$ та $e_f(1)=e_{\overline{f}}(0)$.

Теорема 2.4. Граф G+G є строго збалансованим для будь-якого збалансованого графа G.

Доведення. G – збалансований граф. Нехай у графі G+G до однієї з копій графа G застосована збалансована нумерація φ цього графа, а до іншої копії – двоїста нумерація $\overline{\varphi}$.

Нехай

$$v_\varphi(0)=k,\ v_\varphi(1)=k\pm l_1,\ \text{де}\ l_1=1;\ 0$$

і

$$e_\varphi(0)=s,\ e_\varphi(1)=s\pm l_2,\ \text{де}\ l_2=1;\ 0.$$

Тоді

$$v_{\overline{\varphi}}(1)=k\ ,\ v_{\overline{\varphi}}(0)=k\pm l_1,$$

$$e_{\overline{\varphi}}(1)=s\ ,\ e_{\overline{\varphi}}(0)=s\pm l_2\ .$$

Отримаємо вершинну нумерацію f графа G+G, для якої

$$v_f(0)=k+k\pm l_1=2k\pm l_1,$$
$$v_f(1)=k\pm l_1+k=2k\pm l_1.$$

Тому G+G – строго вершинно-збалансований граф.

Аналогічно,

$$e_f(0)=s+s\pm l_2+k(k\pm l_1)=2s\pm l_2+k(k\pm l_1),$$
$$e_f(1)=s\pm l_2+s+(k\pm l_1)k=2s\pm l_2+k(k\pm l_1).$$

Тому G+G – строго реберно-збалансований граф.

Отже, G+G є строго збалансованим графом.

З праць [1, 2] маємо:

(1) кожен ланцюг P_n – збалансований граф для будь-якого n≥1 та строго збалансований при парному n;

(2) кожен цикл C_n – збалансований граф для будь-якого n≥3 і строго збалансований при парному n;

(3) кожен повний граф K_n – строго збалансований тоді і тільки тоді, коли n парне.

На основі цих результатів та теорем 2.2 і 2.3 випливають твердження і доведення таких теорем:

Теорема 2.5. Граф P_n+P_m (n≥m≥1) є строго збалансованим

1) для будь-яких парних натуральних n і m при n≠m;

2) для довільних натуральних n і m при n=m.

Теорема 2.6. Граф C_n+C_m (n≥m≥3) є строго збалансованим

1) для будь-яких парних натуральних n і m при n≠m;

2) для довільних натуральних n і m при n=m.

Теорема 2.7. Граф K_n+K_m є строго збалансованим для будь-яких парних натуральних n і m (n≥m≥2).

3. Рівномірно збалансовані графи. Відомо, що граф G=(V, E) називається *дружнім*, якщо він допускає вершинну нумерацію f: $V(G)\to\{0, 1\}$ таку, що $|v_f(0)-v_f(1)|\leq 1$. Тому, збалансований – це дружній граф, для якого $|e_f(0)-e_f(1)|\leq 1$. В [3] множина збалансованих індексів графа G визначається як BI(G)={ $|e_f(0)-e_f(1)|$: вершинна нумерація f є дружньою}.

Авторами [3] граф G названо *рівномірно збалансованим*, якщо він є збалансованим графом для будь-якої дружньої бінарної вершинної нумерації цього графа. В [3] сформульована така проблема: провести загальну характеристику рівномірно збалансованих графів. У зв'язку з цим ми провели дослідження й отримали результати, наведені в наступних теоремах.

Під зіркою $St(n)$ розуміємо одновершинне об'єднання n копій графа P_2.

Теорема 3.1. Зірка $St(n)$ є рівномірно збалансованим графом для n=1; 2; 3.

Доведення. Згідно з [3] маємо $\mathrm{BI}(St(n))=\begin{cases}\{k\}, & якщо \quad n=2k+1,\\ \{k-1, k\}, & якщо \quad n=2k.\end{cases}$

Тільки при k=0 або k=1 граф $St(n)$ є рівномірно збалансованим графом. Тому для n можливі наступні значення n=1; 2; 3.

Теорема 3.2. Повне бінарне дерево B(2, d) висоти d є рівномірно збалансованим графом тільки при d=1.

Доведення. Для повного бінарного дерева B(2, d) маємо BI(B(2, d))=$\{0, 1, 2, \ldots, 2^d-1\}$. Повне бінарне дерево B(2, 1) – це зірка $St(2)$. Згідно з теоремою 3.1, граф $St(2)$ є рівномірно збалансованим.

Під подвійною зіркою $D(m, n)$, де m≤n і m≥1 розуміємо дерево діаметра три, яке отримане приєднанням до однієї з вершин ланцюга P_2 m копій графа P_2 і до іншої n копій цього графа. Якщо m≤n і n=1, маємо ланцюг P_3.

Теорема 3.3. Для будь-яких m, n, де $m \le n$ і $m>1$, подвійна зірка $D(m, n)$ не є рівномірно збалансованим графом.

Доведення. Так як

$$\mathrm{BI}(D(m,n))=\begin{cases} \left\{\dfrac{n-m}{2}, \dfrac{n+m}{2}\right\}, & \text{якщо} \quad m+n-\text{парне}, \\ \left\{\dfrac{n-m-1}{2}, \dfrac{n-m+1}{2}, \dfrac{n+m-1}{2}, \dfrac{n+m+1}{2}\right\}, & \text{якщо} \ m+n-\text{непарне}, \end{cases}$$

тому умову рівномірної збалансованості може задовольнити тільки випадок $m+n$ – парне. Але це можливо тільки при $m=n$. Тоді $\dfrac{n+m}{2}=1$, якщо $m=n=1$, що не задовольняє умові теореми.

Теорема 3.4. Повний граф K_n, де $n \ge 3$, є рівномірно збалансованим графом для будь-якого парного n і $n=3$.

Доведення безпосередньо випливає з теореми 3.1 [3].

4. Висновки. Продовжено дослідження з розширення класу строго збалансованих графів. У зв'язку з відсутністю загальних підходів, універсальних алгоритмів із визначення нумерації довільного графа, яка призводить до його збалансованості [2, 3] ми розглянули окремі конструкції графів. Серед них декартів добуток та з'єднання двох графів. Ми отримали умови їх строгої збалансованості. Крім того, розпочато розв'язання проблеми загальної характеристики рівномірно збалансованих графів.

Література

1. Lee S-M., Liu A, Tan S. K. On balanced graphs//Congr. Numerantium. – 1992. – № 87. – pp. 59–64.
2. Kim S., Lee S., Ng H. On balancedness of some graph constructions//JCMCC. – 2008. – № 66. – pp. 3–16.
3. Lee A. N-T., Lee S-M., Ng H. On the balance index sets of graphs// JCMCC. – 2008. – № 66. – pp. 135–150.
4. Kwong H., Lee S., Sarvate D. On balance index sets of one-point unions of graphs//JCMCC. – 2008. – 66. – pp. 113–127.

Отримано 22.09.2011