УДК 517.9

О. Панчук
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ПАРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЯДРА ЯКИХ МІСТЯТЬ ФУНКЦІЮ БЕССЕЛЯ

Багато прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, гідромеханіки, електростатики зводиться до розв'язання парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty J_0(xt)y(t)dt = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty tJ_0(xt)y(t)dt = 0, \qquad 1 \le x < \infty. \tag{2}$$

У співвідношеннях (1) та (2) $J_0(x)$ – функція Бесселя, $f(x)$ – задана функція, а $y(t)$ – невідома. За допомогою невідомої функції $\varphi(x)$ продовжимо співвідношення (2), визначене на нескінченому інтервалі, на всю додатну піввісь.

$$\int_0^\infty tJ_0(xt)y(t)dt = \varphi(x)\eta(1-x),\ 0 \le x < \infty,\ \eta(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x \le 0. \end{cases} \tag{3}$$

Функцію $\varphi(x)$ зручно шукати у вигляді ряду $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\gamma_n x)$, де γ_n – додатні корені рівняння $J_0(x) = 0$, a_n – невідомі коефіцієнти.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до інтегрального рівняння (3), отримаємо вираз для шуканої функції:

$$y(t) = \int_0^\infty x\varphi(x)\eta(1-x)J_0(xt)dx,,$$

$$y(t) = \int_0^1 x\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\gamma_n x)J_0(xt)dx,\ ,$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(t),\ \text{де}\ \Phi_n(t) = \int_0^1 xJ_0(\gamma_n x)J_0(tx)dx = \frac{\gamma_n J_1(\gamma_n)J_0(t)}{\gamma_n^2 - t^2}. \tag{4}$$

Щоб визначити невідомі коефіцієнти a_n підставимо одержаний вираз для функції $y(t)$ (4) у інтегральне рівняння (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty J_0(xt)\Phi_n(t)dt = f(x), 0 \le x \le 1. \tag{5}$$

Помноживши (5) на $xJ_0(\gamma_q x)$, $q = \overline{1,\infty}$ та проінтегрувавши по змінній x на відрізку $[0,1]$ матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty \Phi_n(t)\Phi_q(t)dt = \int_0^1 xf(x)J_0(\gamma_q x)dx. \tag{6}$$

Останнє співвідношення визначає систему лінійних рівнянь, розв'язавши яку та знайшовши коефіцієнти a_n, за допомогою виразу (4), можна знайти значення шуканої функції $y(t)$.