УДК 539.3

Г. Козбур, Н. Крива
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК АНТИПЛОСКОЇ ПРУЖНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТІЛА З ПІВБЕЗМЕЖНИМ ПРЯМОКУТНИМ ВИРІЗОМ

При визначенні напружено деформованого стану (НДС) тіл із тріщинами їх, як правило, моделюють математичними розрізами. До навантаження віддаль між берегами тріщин вважають нульовою, а береги – невзаємодіючими. Вершини тріщин приймають за точки звороту. Важливим продовженням таких досліджень є визначення розподілів НДС в околі прямокутних щілин, які за нескінченно малої ширини переходять у класичну тріщину.

Дослідимо НДС при вершинах вузької прямокутної щілини під впливом зсувного навантаження, прикладеного на великій віддалі від її торців. Довжину щілини вважтимемо великою проти її ширини настільки, що саму щілину можна приймати півнескінченною: $x \le 0,\ -b \le y \le b,\ -\infty < z < +\infty$. За такого підходу щілина буде тріщиноподібною з вершиною, відмінною від точки звороту та із відмінною від нуля початковою віддаллю між берегами.

Навантаження задаватимемо асимптотикою поля напружень на нескінченності рівною асимпотиці такого поля для півбезмежної тріщини.

Приведемо крайову задачу для аналітичної у верхній півплощині $\zeta = x + iy$ без смуги $x \le 0,\ 0 \le y \le b$ (область D) функції $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$:

$$\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0\ (\zeta = x + ib, -\infty < x < 0); \qquad \operatorname{Re}\tau(\zeta) = 0\ (\zeta = iy, 0 < y < b);$$

$$\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0\ (\zeta = x, 0 < x < +\infty); \quad \tau(\zeta) = K_3 / \sqrt{2\pi\zeta} + o\left(\zeta^{-1/2}\right), \text{ якщо } \zeta \to \infty, \quad (1)$$

де K_3 – коефіцієнт інтенсивності напружень.

Для розв'язання задачі (1) зауважимо, що функція $\tau(\zeta)$ конформно відображає область D площини ζ на четвертий квадрант площини τ (рис. 1, $\tau_0 = \min\limits_{[0;b]} \tau_{yz}(0, y)$).

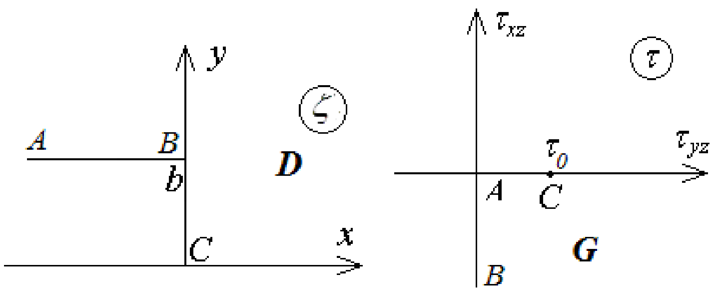

Рис. 1. – Області для конформного відображення

Аналітичний розв'язок задачі (1) є таким

$$\tau(t) = \frac{K_3}{2\sqrt{bt}},$$

$$\zeta(t) = ib + \frac{2b}{\pi}\sqrt{t^2 - t} + \frac{2b}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-t} - \sqrt{-t}\right)$$

$(t \in H = \{\operatorname{Im} t > 0\})$.

Тут під $(p - t)^{1/2}$ ($p = 0$ або 1) розумітимемо аналітичну в області H функцію, яка приймає дійсні додатні значення, коли $t > 1$; $\ln\left(\sqrt{1-t} - \sqrt{-t}\right)$ – аналітична в H функція, що приймає дійсні значення, коли аргумент логарифма дійсний і додатний.