

УДК 539.3

Н. Здолбіцька, канд. техн. наук

Луцький національний технічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ТОНКОЇ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ ТРАПЕЦЕВИДНОЇ ПЛИТИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ВІНКЛЕРА

Резюме. Методом конструкційних елементів визначено переміщення залізобетонної трапецевидної плити, покладеної на пружну основу Вінклера. Результати числових розрахунків співставлено з результатами, отриманими методом скінченних елементів та методом сплайн-функцій.

Ключові слова: трапецевидна плита, метод конструкційних елементів, крайові умови, переміщення, вузлові точки, точність розрахунку.

N. Zdolbitska

DETERMINATION OF DISPLACEMENTS OF THIN IRON-REINFORCED TRAPEZOIDAL PLATE ON WINKLER'S FOUNDATION

The summary: The displacements of thin iron-reinforced trapezoidal plate resting on Winkler's foundation was been calculated by the construction element method. The given results are compared with results obtained with help of the finite element method and spline function method.

Key words: trapezoidal plate, construction elements method, boundary conditions, displacements, node points, accuracy of computation.

Постановка проблеми. Плити на пружній основі виступають як елементи фундаментів будинків і перекриття цивільних та промислових будівель. Вони використовуються як покриття доріг та злітних смуг летовищ. Наявність пружної основи, на якій покладена плита, як фундамент конструкції, вносить додаткові збурення в розподіл напружень в елементах плити. Все це вимагає детальнішого врахування явищ, що відбуваються на поверхні плити – основи та розроблення нових аналітико-числових підходів до оцінювання напруженого стану та граничної рівноваги плити. На даний час аналітико-числові методи розрахунку композитних плит складної форми на пружній основі ще не в достатньо розроблено. На вирішення цих питань скеровано дану статтю.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача про напружено-деформований стан плити Г-подібної форми розв'язана методом сил у статті В.А. Смирнова [1]. С.М. Алейников і І.Е. Агапов [2] методом скінченних елементів досліджують контактну взаємодію ізотропної плити складної форми з пружною основою. Низка задач про напружено-деформований стан тонких плит скінченних розмірів розв'язані методом сплайн-колокації [3–6]. Згідно з методом прогин плити вибирається у вигляді суми добутків двох невідомих функцій. Одні з них є лінійними комбінаціями В-сплайнів 5-го порядку і підібрані так, щоб задовольнити крайові умови на двох протилежних краях плити. За допомогою інших функцій методом колокації задовольняються основне рівняння згину плити і крайові умови на двох інших її краях. Методом сплайн-колокації [7] проведено також розрахунок паралелограмних та трапецевидних плит. Розв'язок отримано в косокутній системі координат. Р.А. Сафонов [8] застосовує модифікований метод сплайн-колокації до розрахунку паралелограмних

плит. Розрахунок ромбічних і паралелограмних плит зі змішаними крайовими умовами проведено у статті [9] методом інтерполяції за коефіцієнтом форми. У статті [10] запропоновано новий метод розрахунку тонких плит, названий методом конструкційних елементів. У даній статті цим методом проведено розрахунок поля переміщень тонкої залізобетонної трапецевидної плити на пружній основі Вінклера.

Метою досліджень є застосування методу конструкційних елементів [10] до розрахунку тонких залізобетонних трапецевидних плит на пружній основі Вінклера.

Метод розв'язання задачі. Розглядаємо тонку трапецевидну залізобетонну плиту, покладену на пружну основу Вінклера. Плита перебуває під сталим поперечним навантаженням q , прикладеним до її поверхні. У розрахунку така плита розглядається як однорідна і ортотропна з усередненими жорсткостями на згин, які запропонував М.Т. Губер [11].

Основне рівняння згину тонкої ортотропної плити на пружній основі Вінклера має вигляд

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w = q, \quad (1)$$

де D_{ij} – жорсткості плити на згин і кручення; K_0 – коефіцієнт жорсткості пружної основи; w – функція прогину плити; q – поперечне навантаження, прикладене до її поверхні.

Залежно від способу затискання контуру плити маємо три класичні типи крайових умов:

1. Край плити жорстко затиснений:

$$w|_L = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_L = \frac{\partial w}{\partial x_1} \cos \varphi \Big|_L + \frac{\partial w}{\partial x_2} \sin \varphi \Big|_L = 0. \quad (2)$$

2. Край плити вільно обіпертий:

$$w|_L = 0; \quad M_{nn} \Big|_L = M_{11} \cos^2 \varphi \Big|_L + M_{22} \sin^2 \varphi \Big|_L - M_{12} \sin 2\varphi \Big|_L = 0. \quad (3)$$

3. Край плити вільний:

$$M_{nn} \Big|_L = 0; \quad V_n \Big|_L = V_1 \cos \varphi \Big|_L + V_2 \sin \varphi \Big|_L = 0, \quad (4)$$

де L означає похилий край плити; φ – кут між віссю Ox_1 і нормаллю до похилого контуру плити.

Згідно з методом конструкційних елементів розглядувана плита доповнюється до прямокутної області мінімальних розмірів, яка повністю вміщує в собі реальну плиту (рис. 1).

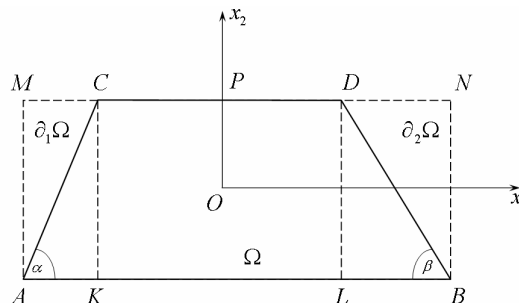


Рисунок 1. Схема трапецевидної плити

Навантаження, прикладене до поверхні прямокутної області (конструкційний елемент плити) подаємо у вигляді розривної функції, яка є навантаженням, прикладеним до поверхні трапецевидної плити (область Ω) і дорівнює нулю поза її межами (області $\partial_1\Omega$ і $\partial_2\Omega$).

Апроксимуємо таке розривне навантаження неперервною функцією, розкладаючи його в подвійні ряди Фур'є в області конструкційного елемента $AMNB$. Систему координат x_1Ox_2 вибираємо в центрі цього елемента: його сторони позначаємо відповідно $2a_1$ (AB) і $2a_2$ (AM). Позначимо довжину відрізка $CP = b_1$, а $PD = b_2$.

Визначаємо коефіцієнти розкладу q_{mn} навантаження $q(x_1, x_2)$

$$q_{mn} = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} q(x_1, x_2) \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) dx_2 dx_1 =$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \cos(\delta_n^{[2]} x_2) dx_2 \int_{-b_1+(a_2-x_2)ctg\alpha}^{b_2+(a_2-x_2)ctg\beta} q(x_1, x_2) \cos(\delta_m^{[1]} x_1) dx_1. \quad (5)$$

Враховуючи, що згідно з рисунком 1

$$b_1 = a_1 - 2a_2 ctg\alpha, \quad b_2 = a_1 - 2a_2 ctg\beta, \quad (6)$$

отримуємо

$$q_{mn} = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \cos(\delta_n^{[2]} x_2) dx_2 \int_{-a_1+(a_2+x_2)ctg\alpha}^{a_1-(a_2+x_2)ctg\beta} q(x_1, x_2) \cos(\delta_m^{[1]} x_1) dx_1. \quad (7)$$

Крайові умови записуємо в окремих точках (вузлах) контуру. Координати цих точок, які позначено через (x_{1i}, x_{2i}) , $i = 1 \div n$, визначаємо за формулою

$$x_{jn} = \frac{k^*(x_{2j} - x_{1j})}{K_* + 1} + x_{1j}, \quad (8)$$

де K_* – кількість наближень; k^* – номер вузлової точки на відрізку a_j , $j = 1, 2$; $k^* = 1 \div K_*$; x_{jn} – координати вузлових точок плити.

Результати досліджень. Як приклад розглядаємо трапецевидну плиту (рис. 2) з основами $2a_1 = 6\text{ м}$, $2a_2 = 4\text{ м}$ і товщиною $h = 0.2\text{ м}$, усі краї якої жорстко закріплені. Коефіцієнт постелі вибрано $K_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$. Плита перебуває під сталим поперечним навантаженням $q = 200 \text{ кН/м}^2$. Усереднені жорсткості залізобетону прийнято: $D_{11} = 16\,366\,372 \text{ Н/м}^2$, $D_{22} = 16\,747\,508 \text{ Н/м}^2$, $D_{12} = 33\,111\,68 \text{ Н/м}^2$, $D_{66} = 66\,223\,37 \text{ Н/м}^2$.

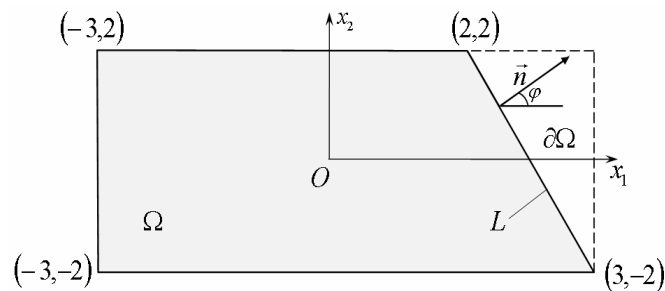
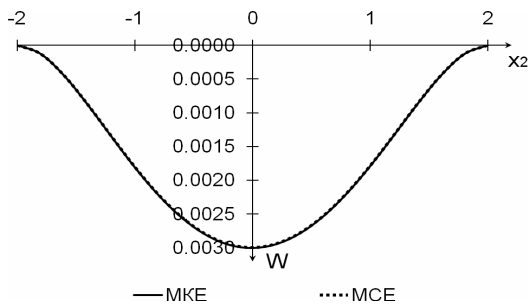
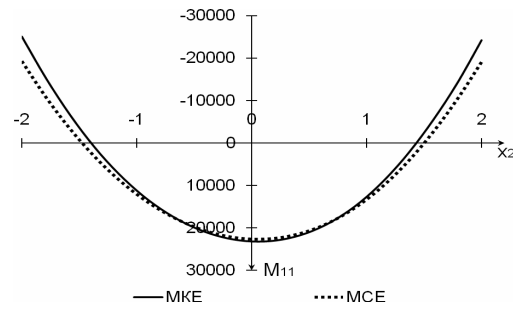


Рисунок 2. Схема трапецевидної плити

До розрахунку плити методом конструкційних елементів (МКЕ) вибрано 32 вузлові точки на контурі, по 8 вузлових точок, рівномірно розміщених на кожному краю.

Розрахунки виконано також методом скінченних елементів (МСЕ) у програмі ЛИРА 9.4, використовуючи фізично нелінійні скінченні елементи оболонки: прямокутний (№ 241), трикутний (№ 242), чотирикутний (№ 244).

На рисунках 3 і 4 зображені графіки зміни прогину плити і згинального моменту M_{11} у перерізі ($x_1 = 0$). Прогини, отримані різними методами, співпадають, а моменти добре узгоджуються між собою.

Рисунок 3. Прогин плити у перерізі ($x_1 = 0$)Рисунок 4. Зміна згинального моменту M_{11} у перерізі ($x_1 = 0$)

Значення максимального прогину дорівнює 0.003033 м (МКЕ) і 0.003029 м – (МСЕ). Відносна різниця максимальних значень моменту M_{11} , обчислена МКЕ та МСЕ, дорівнює 2.6 %.

У таблиці 1 наведено значення прогину w і нормальних переміщень u_n на скошеному затисненому краю плити. Точність задоволення крайових умов на скошеному краю становить 10^{-6} .

Таблиця 1. Значення прогину і переміщень u_n на скошеному краю плити

x_1	x_2	w, i	u_n
3	-2	0.00E+00	-1.44E-05
2.95	-1.8	2.17E-05	-2.52E-05
2.9	-1.6	-7.05E-05	7.54E-05
2.85	-1.4	-6.63E-05	6.92E-05
2.8	-1.2	2.11E-05	-2.21E-05
2.75	-1	5.26E-05	-5.67E-05
2.7	-0.8	1.17E-05	-1.33E-05
2.65	-0.6	-2.04E-05	2.57E-05
2.6	-0.4	-1.22E-05	1.84E-05
2.55	-0.2	2.27E-06	-4.84E-06
2.5	0	1.50E-06	-1.03E-05
2.45	0.2	-8.41E-07	-1.98E-06
2.4	0.4	4.63E-06	2.85E-06
2.35	0.6	6.35E-06	1.20E-06
2.3	0.8	-2.87E-06	-1.68E-08
2.25	1	-1.03E-05	9.33E-07
2.2	1.2	-3.42E-06	4.88E-07
2.15	1.4	9.35E-06	-1.55E-06
2.1	1.6	9.37E-06	-1.58E-06
2.05	1.8	-3.13E-06	3.82E-07
2	2	-3.07E-13	-2.83E-06

Виявлено, що точність результатів суттєво покращується, якщо відкинути малий окіл вершини гострого кута трапеції (порядку 1 см на 10 м) перерізом, перпендикулярним до основи, і на цьому перерізі розмістити хоча б одну вузлову точку.

У таблиці 2 наведено максимальні значення прогинів wE/q_0 плити у формі рівнобедреної трапеції (рис. 5) під рівномірним навантаженням q_0 , отримані МКЕ, МСЕ та розраховані М.М. Крюковим [7] з використанням сплайн-функцій. Дані в таблиці наведено для різних значень кутів φ і різних значень μ , де $\mu = (a - b)/(2c)$, $AD = 2c = 10$, $EN/EF = a/b$, $a - b = 10$, $h = 0,1$. $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = 2106227 \text{ Ї} / \text{ї}^2$.

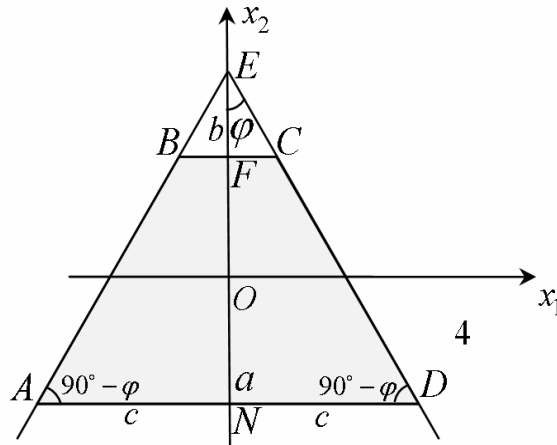


Рисунок 5. Схема трапецевидної рівнобедреної плити
Таблиця 2. Прогин плити, обчислений різними методами

φ	$\mu = 1$			$\mu = 0.5$		
	МКЕ	МСЕ	сплайни	МКЕ	МСЕ	сплайни
5°	1.1278E+05	1.1300E+05	1.1240E+05	1.7059E+04	1.7120E+04	1.7030E+04
10°	8.5903E+04	8.6110E+04	8.5150E+04	1.6737E+04	1.6790E+04	1.6740E+04
15°	6.0598E+04	6.0760E+04	6.0960E+04	–	–	–
20°	4.0775E+04	4.0890E+04	4.0420E+04	1.5600E+04	1.5650E+04	1.5630E+04
25°	2.7325E+04	2.7440E+04	2.6940E+04	–	–	–
30°	–	–	–	1.3080E+04	1.3120E+04	1.3040E+04
40°	–	–	–	7.8815E+03	7.9420E+03	7.7030E+03

Результати, отримані різними методами, практично співпадають для всіх значень кута розхилу трапеції φ .

Висновки. Методом конструкційних елементів визначено переміщення точок тонкої трапецевидної залізобетонної плити. Результати добре узгоджуються з відомими в літературі результатами, отриманими методом сплайн-функцій, а також методом скінченних елементів.

Література

1. Смирнов, В.А. Расчет пластин сложного очертания [Текст] / В.А. Смирнов. – М.: Стройиздат. 1978. – 300 с.
2. Алейников, С.М. Моделирование контактного изгиба плит сложной формы [Текст] / С.М. Алейников, И.Е. Агапов // Матем. моделирование. – 2006. – Т.18, № 7. – С. 82–92.
3. Крюков, М.М. Розв’язання крайових задач теорії косокутних ортотропних пластин із застосуванням

- сплайн-функцій [Текст] / М.М. Крюков, Н.С. Яковенко // Доповіді Національної академії Наук. – 2004. – № 9. – С. 44–49.
4. Григоренко, Я.М. Применение В-сплайнов к решению задач об изгибе прямоугольных пластин [Текст] / Я.М. Григоренко, М.Н. Беренов, О. Оллакулов // Вычислительная и прикладная математика. – 1988. – №6. – С. 47–51.
 5. Григоренко, Я.М. Розв'язання двовимірних задач про згин прямокутних пластин на основі сплайн-апроксимації [Текст] / Я.М. Григоренко, М.Н. Беренов // Доп. НАН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1987. – № 8. – С. 21–24.
 6. Григоренко, Я.М. Решение задач пластин и оболочек с применением сплайн функций [Текст] / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // (Обзор), Прикладная Механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 3–27.
 7. Крюков, Н.Н. Расчет косоугольных и трапециoidalных пластин с помощью сплайн-функций [Текст] / Н.Н. Крюков // Прикладная Механика. – 1997. – Том 23, №5. С. 77–81.
 8. Сазонов, Р.А. Некоторые задачи статического изгиба параллелограмных пластин [Текст] / Р.А. Сафонов // Математика, механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та. – 2007. – № 9. – С. 148–150.
 9. Коробко, А.В. Определение максимального прогиба методом интерполяции по коэффициенту формы при аффинном преобразовании пластинок в виде ромбов и параллелограммов с комбинированными граничными условиями [Текст] / А.В. Коробко, М.А. Фетисова // Промышленное и гражданское строительство. – Москва. – 2010. – № 1. – С. 23–24.
 10. Здолбівська, Н.В. Моделювання напружено-деформованого стану плит на пружних основах методом конструкційних елементів [Текст] / Н.В. Здолбівська, М.В. Делявський // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за галузями знань „Машинобудування та металообробка”, „Інженерна механіка”, „Металургія та матеріалознавство”). – Луцьк, 2010. – Вип. 27. – С. 105–109.
 11. Huber, M.T. Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der Eisenbetonplatten. Zeitschr. Der Österr. Ing. u. Archit. Vereins, 1914. – 557.

Отримано 12.03.11