УДК 539.3

О. Самборська
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ДОДАВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧАХ ПРО НЕСТІЙКІСТЬ РЯДУ ВОЛОКОН В ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ

Для дослідження задач про нестійкість циліндричних волокон в пружній матриці використовується тривимірна лінеаризована теорія стійкості деформівних тіл, рівняння якої отримуються шляхом лінеаризації нелінійних рівнянь теорії пружності. Ці рівняння застосовуються окремо до матриці і до волокон з врахуванням різних механічних властивостей компонентів. На міжфазних поверхнях формулюються граничні умови залежно від форми контакту між волокнами і матрицею.

Згідно із загальними розв'язками тривимірних лінеаризованих задач, складові зміщень і поверхневих сил виражаються через потенціальні функції ψ та χ, які є розв'язками рівнянь:

$$\begin{gathered}\left(\Delta + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = 0,\\ \left(\Delta^2 + \left(\xi_2^2 + \xi_3^2\right)\Delta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \xi_2^2\xi_3^2 \frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)\chi = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Розв'язки для кожного з волокон шукаються у вигляді рядів Фур'є з модифікованими функціями Бесселя, а для матриці – з функціями Макдональда, оскільки розв'язки рівнянь (1) для матриці повинні задовольняти умови згасання та «нескінченності».

Запишемо, наприклад, вирази для функції ψ для q-го волокна та матриці у випадку втрати стійкості волокон з площини волокон.

$$\begin{gathered}\psi^{(1)q} = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{I}_n\left(\zeta_1^{(1)}\gamma r_q\right)\cos n\theta q\left(A_{1n,1}^{(1)q}\sin\gamma z_q + A_{2n,1}^{(1)q}\cos\gamma z_q\right),\\ \psi = \gamma \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{K}_n\left(\zeta_1\gamma r_p\right)\cos n\theta p\left(A_{1n,1}^{p}\sin\gamma z_p + A_{2n,1}^{p}\cos\gamma z_p\right).\end{gathered} \tag{2}$$

Оскільки повинні виконуватися умови періодичності розв'язків, то достатньо задовольнити граничні умови на контурі тільки одного волокна, наприклад, при $q = 0$. Щоб представити розв'язки для матриці в місцевій системі координат $\left(r_0, \theta_0, z_0\right)$, застосуємо теорему додавання циліндричних функцій:

$$\mathrm{K}_n\left(\zeta_i\gamma r_p\right)\cos n\theta p = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{p}{|p|}\right)^{m+n}\varepsilon_m\left(\mathrm{K}_{n-m}\left(\zeta_i\gamma p\delta\right)+\right.$$

$$\left.+\mathrm{K}_{n+m}\left(\zeta_i\gamma p\delta\right)\right)\mathrm{I}_m\left(\zeta_i\gamma r_0\right)\cos m\theta_0;\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2},\ \varepsilon_m = 1 \text{ при } m \neq 0.$$

Підставляючи отримані вирази разом з розв'язками для даного волокна в граничні умови, одержимо нескінченну однорідну систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів, які входять у розв'язки.