

Міністерство освіти і науки України

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

*Кафедра технічної механіки,
сільськогосподарських машин
і транспортних технологій*

ОПР МАТЕРІАЛІВ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

до курсової роботи

для студентів напрямів підготовки:
«Інженерна механіка», «Машинобудування»,
«Зварювання», «Автомобільний транспорт»
денної та заочної форм навчання

Тернопіль
2014

УДК 620.10
ББК 34
Д 58

Д 58 Довбуш А.Д. Опір матеріалів: навчально-методичний посібник до виконання курсової роботи / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 191с.

Пропонований навчально-методичний посібник розроблено відповідно до навчальної програми і призначений для виконання курсової роботи з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів напрямів підготовки: «Інженерна механіка», «Машинобудування», «Зварювання», «Автомобільний транспорт» денної та заочної форм навчання. Рекомендований і для студентів інших напрямів підготовки.

Посібник рекомендовано також для самостійної роботи студентів, оскільки він вміщує короткі теоретичні викладки основного матеріалу дисципліни «Опір матеріалів», умови завдань, приклади їх розв'язування, необхідні довідкові дані.

Розглянуто й затверджено на засіданні кафедри технічної механіки, сільськогосподарських машин і транспортних технологій, протокол № 6 від 15.01.2014р.

Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету машинобудування та харчових технологій, протокол № 3 від 19.02.2014р.

Укладачі: старший викладач *Довбуш А.Д.*,
доцент *Хомик Н.І.*

Рецензент: **Стухляк П.Д.** доктор технічних наук, професор
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Відповідальний за випуск *Довбуш А.Д.*

ЗМІСТ

	стр.
ВСТУП.....	5
Вказівки до вибору завдання.....	6
Об'єм, структура і вказівки до виконання курсової роботи.....	6
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.....	8
2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ.....	14
Задача №1 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу і стиску.....	20
Приклад розв'язування задачі №1 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу (стиску).....	23
Задача №2 Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи.....	26
Приклад розв'язування задачі №2 Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи.....	29
3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕТИНІВ.....	32
Задача №3 Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів.....	36
Приклад розв'язування задачі №3 Визначення моментів інерції плоских перетинів.....	39
4. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ.....	41
Задача №4 Розрахунок вала на кручення.....	45
Приклад розв'язування задачі №4 Розрахунок вала на міцність і жорсткість.....	48
5. СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН.....	52
Задача №5 Аналіз напруженого стану.....	55
Приклад розв'язування задачі №5 Аналіз плоского напруженого стану.....	57
6. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН.....	61
Задача №6 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для консолі.....	72
Приклад розв'язування задачі №6 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для консолі.....	75
Задача №7 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах.....	78
Задача №8 Розрахунок на міцність при згині балок.....	81
Задача №9 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при згині балок.....	81

Приклад розв'язування задач №7 і 8 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах. Розрахунок балки на міцність.....	84
7. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ЗГІНІ.....	89
Приклад розв'язування задачі №9 методом початкових параметрів.....	103
Приклад розв'язування задачі №9 методом Мора.....	105
8. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ.....	109
Задача №10 Розрахунок статично невизначуваної рами.....	115
Приклад розв'язування задачі №10 методом сил.....	118
Приклад розв'язування задачі №10 методом мінімуму потенціальної енергії деформації.....	122
9. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ КОСОМУ ЗГІНІ.....	124
Задача №11 Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину.....	128
Приклад розв'язування задачі №11 Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину.....	131
10. СУМІСНА ДІЯ ЗГІНУ З КРУЧЕННЯМ.....	137
Задача №12 Розрахунок вала на згин з крученням.....	139
Приклад розв'язування задачі №12 Розрахунок вала на згин з крученням.....	142
11. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ.....	146
Задача №13 Розрахунок на стійкість стисненого стержня.....	152
Приклад розв'язування задачі №13 Розрахунок на стійкість стисненого стержня.....	154
12. ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ.....	157
Задача №14 Визначення максимальних динамічних напружень і переміщень при ударі.....	161
Приклад розв'язування задачі №14.1.....	164
Приклад розв'язування задачі №14.2.....	167
Перелік використаної і рекомендованої літератури.....	170
Додатки.....	172

ВСТУП

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів споруд і машин.

Елементи машинобудівних і будівельних конструкцій при експлуатації зазнають силової дії різних походжень. Ці сили або прикладені безпосередньо до елемента, або передаються через з'єднані з ним сусідні елементи. Для нормальної роботи інженерної споруди або машини кожен елемент повинен бути таких розмірів і форми, щоб витримував діючі на нього навантаження, не руйнуючись (міцність), не давав зміни розмірів (жорсткість), зберігав початкову форму (стійкість).

Опір матеріалів – теоретико-експериментальна наука. Дослід – теорія – дослід – така діалектика розвитку науки про опір твердих тіл деформуванню і руйнуванню. Однак, наука опору матеріалів не вичерпує всіх питань механіки деформівних тіл. Цим займаються інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, теорія пружності та теорія пластичності.

Опір матеріалів є загальноінженерною наукою, в якій на основі експериментальних даних про властивості матеріалів, з одного боку, та правил теоретичної механіки, фізики і вищої математики, – з другого, викладаються загальні методи розрахунку раціональних розмірів і форм елементів інженерних конструкцій з урахуванням величини і характеру діючих на них навантажень.

Задачі опору матеріалів розв'язуються доволі простими математичними методами з прийняттям ряду припущень і гіпотез, а також з використанням експериментальних даних.

Опір матеріалів має самостійне значення, як дисципліна, знання якої необхідне для всіх інженерних спеціальностей, є базою для вивчення всіх розділів будівельної механіки, основою для вивчення курсу деталей машин та ін. Опір матеріалів дає наукові основи інженерних розрахунків, без яких на сучасному етапі неможливе проектування і створення всієї різноманітності конструкцій сучасного машинобудування і будівництва.

Особливість даного навчально-методичного посібника в тому, що він призначений для виконання курсової роботи з опору матеріалів, яка включає 14 задач, що охоплюють весь курс. У посібнику стисло викладено основний матеріал до теми кожної задачі, наведено умови задач і приклади розв'язку.

У додатках наведено приклад оформлення курсової роботи (титульна сторінка, зміст, приклад розв'язання задачі) й довідкові матеріали, необхідні для її виконання. Все це сприятиме поглибленню вивчення курсу та самостійному виконанню курсової роботи.

Вказівки до вибору завдання

Завдання на курсову роботу студент вибирає за двома останніми цифрами номера залікової книжки; номер розрахункової схеми – за останньою цифрою; варіант (дані з таблиці умови задачі) – за передостанньою цифрою.

Об'єм, структура і вказівки до виконання курсової роботи

Курсова робота з опору матеріалів містить 14 задач (кількість задач може змінюватися за вказівкою викладача), які охоплюють увесь курс. Виконання її оформляти у вигляді розрахунково-пояснювальної записки на аркушах формату А4.

Титульну сторінку виконувати креслярським шрифтом або машинописним (комп'ютерним) способом на відповідному бланку.

Перша сторінка курсової роботи – титульна (*додаток 1*), друга – зміст, який включає перелік виконаних завдань (аркуш з кутовим штампом 40мм, *додаток 2*); далі – умови задач (аркуш з кутовим штампом 40мм, *додатки 3 і 6*), розв'язки задач (аркуші з кутовим штампом 15мм, *додатки 4, 5, 7, 8*) і список використаних літературних джерел (аркуш із кутовим штампом 40мм).

Умову кожної задачі з вибраними даними і схемою записувати на окремому аркуші з рамкою 40мм (*додаток 3*). Розв'язок задачі оформляти після написання умови на аркушах з рамкою 15мм (*додаток 4*).

Текст записки викладати послідовно, лаконічно, розрахунки супроводжувати короткими поясненнями з посиланням на відповідний рисунок (*додатки 5, 8*). Стиль викладу тексту записки повинен бути коротким, чітким і без двоякого змісту. Прийнята у тексті термінологія повинна відповідати встановленій у стандартах або загальноприйнятій у науково-технічній літературі.

Текст розрахунково-пояснювальної записки розміщувати з одного боку аркуша формату А4 (297х210мм). Відстань від рамки до границь тексту зліва і справа повинна бути не менше 5мм, зверху і знизу – 10мм (*додатки 2–8*). Абзаци у тексті починати відступом, що дорівнює п'яти символам основного тексту записки. Текст виконувати комп'ютерним (машинописним) способом через 1,5 інтервала чітким шрифтом висотою не менше 2,5мм (14pt, шрифт Times New Roman) або рукописним – чорним чорнилом основним креслярським шрифтом висотою букв і цифр не менше 2,5мм. Допускається пояснювальну записку виконувати чітким розбірливим рукописним текстом чорним чорнилом.

Усі сторінки записки, крім титульної, повинні мати рамки з кутовим штампом для розділів записки. У кутових штампах для змісту й умов задач (рис. 1а) записувати назву задачі, наприклад, «Аналіз напруженого стану» і позначення записки КР ОМ (курсова робота з опору матеріалів), до якого входить номер залікової книжки студента, наприклад, КР ОМ 12-109.00.00.000 ПЗ, де 12-109 – це номер залікової книжки студента, який є варіантом для виконання курсової роботи. У кутових штампах (рис. 1б) для решти сторінок записувати тільки позначення записки і нумерацію аркушів. Номер сторінки проставляти у відповідній графі штампа (рис. 1). Відлік починати з титульної сторінки, але номер її на титульній не ставити. Нумерація сторінок – наскрізна.

Формули у тексті записувати з нової стрічки у загальному вигляді, а під формулою наводити пояснення кожного символу із зазначенням величини й розмірності. Обчислення формул проводити у такій послідовності: записування шуканої величини в буквенному виразі, підстановка відповідних цифрових значень і записування кінцевого результату з проставлянням розмірностей.

Усі схеми та ескізи при виконанні курсової роботи оформляти на окремій сторінці чи двох, за необхідності, з дотриманням послідовності, передбаченої ходом розв'язування. Рисунки нумерувати відповідно до номера задачі й супроводжувати підписами (додатки 3, 5, 6, 8).

					КР ОМ 12-109.00.00.000 ПЗ				
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата	Аналіз напруженого стану	Літ.	Арк.	Аркушів	
Розроб.	Олійник В.І							2	8
Перевір.	Довбуш А.Д					МТФ, МТ-21			
Консульт.									
Н. контр.									
Затв.	Рибак Т.І.								

а)

					КР ОМ 12-109.00.00.000 ПЗ		Арк.
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата			5

б)

Рисунок 1. Приклад заповнення штампів на сторінках записки:

а) штамп для розділу (умови задачі);

б) штамп для наступних сторінок тексту

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Задачі опору матеріалів

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Конструкції – усі матеріальні об'єкти техніки, їх частини й деталі.

Міцність – здатність матеріалу чи конструкції витримувати механічне навантаження не руйнуючись

$$p_{\max} \leq [p],$$

де p_{\max} – максимальне напруження;

$[p]$ – допустиме напруження.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протидіяти пружним деформаціям, тобто здатність сприймати зовнішнє навантаження без зміни геометричних розмірів та форми

$$f_{\max} \leq [f],$$

де f_{\max} – максимальна деформація (переміщення);

$[f]$ – допустима деформація (переміщення).

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати під дією заданих сил початкову форму пружної рівноваги.

Мета курсу опір матеріалів:

а) навчитися за розрахунковою схемою вірно визначати вид деформації, на який працює деталь чи конструкція;

б) визначити найнебезпечніший перетин, попередньо побудувавши епюри внутрішніх силових факторів;

в) за відповідною умовою міцності чи жорсткості визначити розміри поперечного перетину, а в деяких задачах допустиме навантаження чи максимальні напруження, і провести перевірку міцності.

Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів

Усі елементи машинобудівних і будівельних конструкцій можна звести до таких типових спрощених елементів: бруси, оболонки, пластини, масивні тіла. Відповідно до них виконують розрахунки в опорі матеріалів.

Стержень (брус) – тіло призматичної форми, в якого один розмір (довжина) набагато перевищує два інших (поперечних) розміри.

Тонкостінні стержні (швелери, кутники, двотаври) – тіла, в яких товщина стінки значно менша за габаритні розміри поперечного перетину.

Приклади стержнів: вали, осі, балки, труби, рейки, елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки, елементи ланцюгів).

Пластина – призматичне (циліндричне) тіло, в якого один розмір (товщина) набагато менший за два інших.

Приклади пластин: плоскі дніща й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриттів.

Оболонка – тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами. Це – пластина з викривленою серединною поверхнею. Приклади: стінки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів.

Масив (масивне тіло) – тіло, розміри якого в усіх (трьох) напрямках одного порядку. Приклади: фундаменти споруд, підпірні стінки, основи потужних пресів і верстатів.

Класифікація зовнішніх навантажень

Зовнішні навантаження класифікують:

1. За характером дії – статичні, динамічні.

Статичні – це навантаження, значення, напрямок і місце прикладання яких залишаються постійними.

Динамічні – це навантаження, які характеризуються швидкими змінами їх значення в часі, напрямку чи місця прикладання.

2. За характером прикладання (рис. 1.1):

а) F, Q, R – зосереджені сили [$H, кН, МН$];

б) M, T – зосереджені моменти [$Нм, кНм, МНм$];

в) q – розподілені на лінії [$H/м, кН/м$].

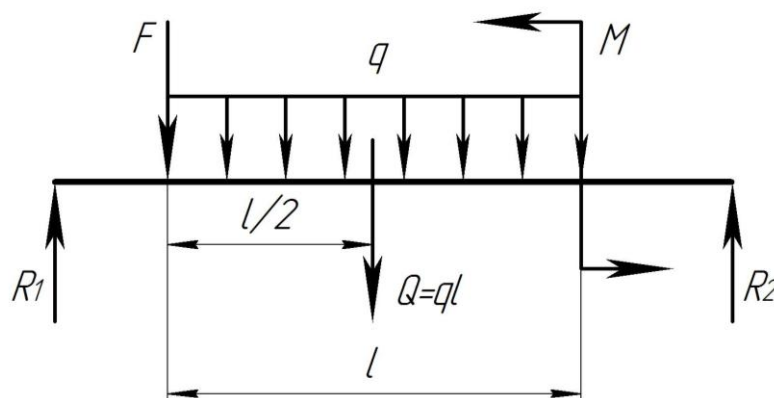


Рисунок 1.1

Розрахункова схема – це реальний об’єкт, звільнений від несуттєвих особливостей. Для одного і того ж об’єкта може бути створена не одна розрахункова схема, що залежить від особливостей навантаження і умов роботи.

Основні види деформацій

Усі існуючі тіла під впливом зовнішніх сил здатні змінювати свої розміри і форму, тобто деформуватися.

В опорі матеріалів розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення і згину. При різних видах деформації у поперечних перетинах тіла виникають різні внутрішні силові фактори.

1. **Розтяг-стиск** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах прямого бруса виникає тільки *поздовжня (осьова) сила N* .

Брус, що працює на розтяг (стиск), називають стержнем.

Розтягу зазнають такі елементи конструкцій, як канати, болти, троси, стержні ферм, штоки поршневих машин. На стиск працюють цегляна кладка будинків, фундамент, колони, пуансони штампів.

2. **Зсув (зріз)** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *поперечна (перерізуюча) сила Q* . Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

Зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань.

3. **Кручення** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *крутний момент $M_{кр}$* . Брус круглого поперечного перетину, який передає потужність під час обертального руху, називають валом. Кручення часто супроводжується згином або іншим видом деформації.

4. **Прямий поперечний згин** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникає *згинальний момент $M_{зг}$* та поперечна сила Q . Брус, який працює на згин, називають балкою.

Згину зазнають осі, балки міжповерхових перекриттів і мостів, зуби зубчастих коліс, листові ресори.

5. **Складний опір** – це поєднання двох або більше простих видів деформацій, а саме: *згин + кручення; стиск + згин* і т.д.

Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Ейлора

Внутрішні силові фактори – це внутрішні сили взаємодії між частинками тіла, які виникають при дії на тіло зовнішніх сил, і перешкоджають зміні відстаней між частинками й руйнуванню тіла. Їх називають *зусиллями*. Зовнішні силові дії, прикладені до елемента конструкції, і реакції в місцях кріплення опор, тобто активні й реактивні сили називають *навантаженнями*.

Для встановлення величини внутрішніх зусиль (силових факторів), що виникають у перетині стержнів, застосовують метод перетинів.

Перетин, перпендикулярний до осі бруса, називають *нормальним* або *поперечним*; перетин, проведений під будь-яким іншим кутом, називають *косим* або *похилим*.

Метод перетинів полягає в тому, що пружне тіло (брус), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил, уявно розрізають площиною на 2-і частини (рис. 1.2а). Будь-яку з них відкидають. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, що перебуває в рівновазі, приклавши до неї внутрішні сили взаємодії (зусилля), що виникають між обома частинами тіла під впливом зовнішніх сил (рис. 1.2б). Внутрішні сили замінюють вплив відкинutoї частини бруса на залишену. Принципово не важливо, яку із частин тіла відкинути.

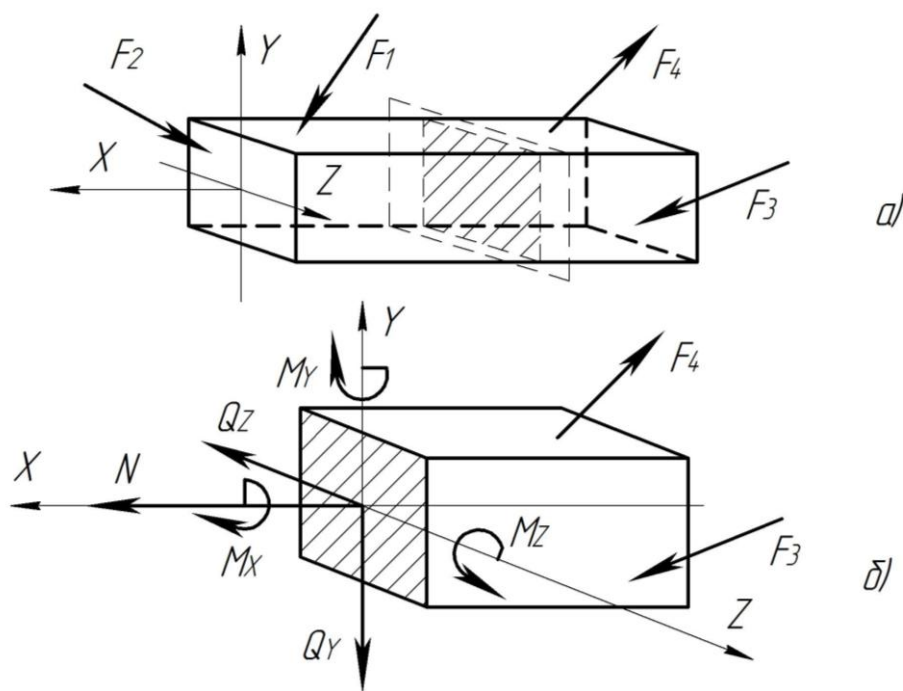


Рисунок 1.2

У загальному випадку навантаження бруса у його поперечному перетині виникає шість внутрішніх силових факторів:

N_X – поздовжня (нормальна) сила, діє вздовж осі бруса, перпендикулярна до площини перетину;

Q_Y , Q_Z – поперечні сили, дотичні до площини перетину, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої у напрямках осей OY , OZ ;

M_Y , M_Z – моменти, що повертають перетин навколо осей OY , OZ , намагаються зігнути стержень у площинах XZ та XY , тобто згинальні моменти, $M_Y = M_{зг.Y}$; $M_Z = M_{зг.Z}$;

M_X – момент, що діє у площині перетину і спричиняє поворот перетину відносно поздовжньої осі бруса OX , тобто скручує брус, називають його крутним моментом, $M_X = M_{кр}$.

Кожен із внутрішніх силових факторів пов'язаний з певним видом деформації.

Для визначення внутрішніх силових факторів у загальному вигляді, відповідно до методу перетинів, записують шість умов рівноваги сил, що діють на залишену частину бруса (використовують шість рівнянь статки). Прирівнюють до нуля алгебраїчні суми проекцій усіх сил, прикладених до цієї частини на осі OX , OY , OZ , і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно тих самих осей:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & & N_X + \sum F_{iX} = 0; \\ \sum Y = 0; & & Q_Y + \sum F_{iY} = 0; \\ \sum Z = 0; & & Q_Z + \sum F_{iZ} = 0; \\ \sum M_X = 0; & & M_{KP} + \sum M_X(F_i) = 0; \\ \sum M_Y = 0; & & M_{3\Gamma.Y} + \sum M_Y(F_i) = 0; \\ \sum M_Z = 0; & & M_{3\Gamma.Z} + \sum M_Z(F_i) = 0. \end{aligned}$$

Епюра – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень уздовж осі стержня (бруса). **Епюри штрихують лініями, перпендикулярними до осі бруса.**

Напруження

Це – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил. Повне напруження (рис. 1.3) визначають за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR – внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;

ΔA – елементарна площа перетину, на якій виникає зусилля ΔR .

Внутрішню силу ΔR можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перетину ΔN ; друга лежить у площині перетину ΔQ . Напруження, що виникають у перетині від цих складових, називають **нормальним** і **дотичним**.

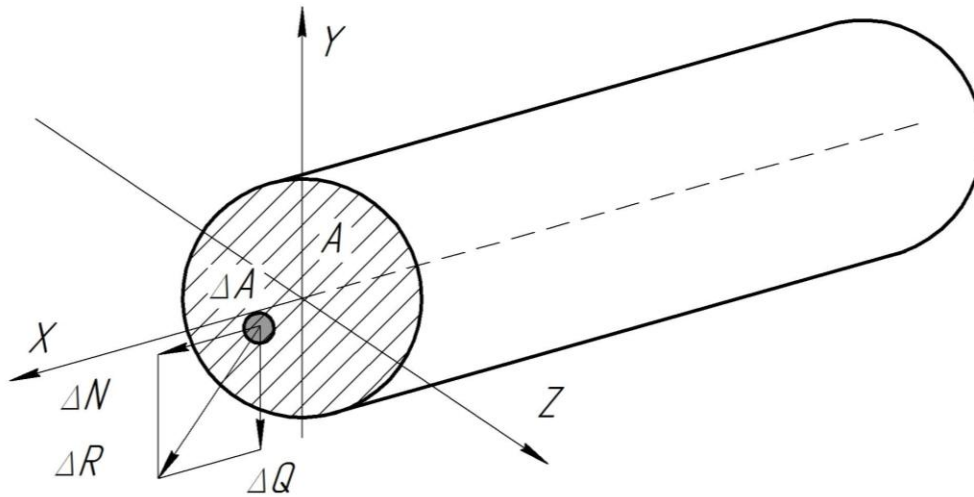


Рисунок 1.3

Дотичне напруження – це інтенсивність дотичних сил у даній точці перетину

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

Нормальне напруження – це інтенсивність нормальних сил у даній точці перетину

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

Повне напруження у точці визначають за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень $1 \text{ Па} = \text{Н} / \text{м}^2$, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н} / \text{мм}^2$.

Припущення (гіпотези) про властивості матеріалів конструктивних елементів

1. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Припускають, що матеріал суцільно заповнює об'єм тіла, спростовуючи теорію дискретної будови речовин.

2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Вважають, що у будь-якій точці тіла та у будь-якому напрямі механічні властивості матеріалу однакові.

3. Гіпотеза про ідеальну пружність та природну ненапруженість матеріалу. Припускають, що деформації, спричинені дією навантажень, після розвантаження повністю зникають, а початкові зусилля та напруження відсутні.

2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Центральний розтяг і стиск. Побудова епюр нормальних сил

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених уздовж центральної осі бруса. Напружений стан, викликаний такими силами, називають простим або лінійним.

Розтяг (стиск) – це такий вид деформації (вид опору), при якому в поперечних перетинах бруса виникає тільки **поздовжня (осьова, нормальна) сила** – N або N_x , спрямована вздовж осі бруса і прикладена в центрі ваги перетину. Визначають її з умови рівноваги, використовуючи **метод перетинів**, починаючи з вільного кінця стержня.

Поздовжня сила у довільному поперечному перетині бруса дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на його поздовжню вісь Ox усіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

При розтягу поздовжня сила направлена від перетину і вважається **додатною**, при стиску вона спрямована до перетину і вважається **від'ємною**.

Для оцінювання навантаженості бруса, у випадку, коли поздовжні сили у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, будують епюри. При побудові епюр брус розділяють на ділянки. Епюру будують для того, щоб використати її при розрахунку на міцність. Вона дає можливість визначити найбільше значення поздовжньої сили і перетин, у якому вона виникає, тобто небезпечний (щодо міцності) перетин.

Приклад. Побудувати епюру нормальних сил для бруса зображеного на рис. 2.1а (власною вагою бруса знехтувати).

Розбиваємо брус на ділянки. Границі ділянок: початок та закріплення бруса; перетини, в яких прикладені зосередженні сили.

Використовуючи метод перетинів, визначаємо значення нормальних сил на кожній ділянці, починаючи з вільного кінця.

Нормальна сила – це алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил з одного боку перетину. Запишемо їх значення (рис. 2.1б) на кожній з ділянок, розглядаючи стержень з вільного кінця:

$$N_1 = F_1 = 20 \text{кН};$$

$$N_2 = F_1 - F_2 = 20 - 50 = -30 \text{кН};$$

$$N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = -30 + 40 = 10 \text{кН}.$$

За отриманими результатами будують епюру нормальних сил N (рис. 2.1в).

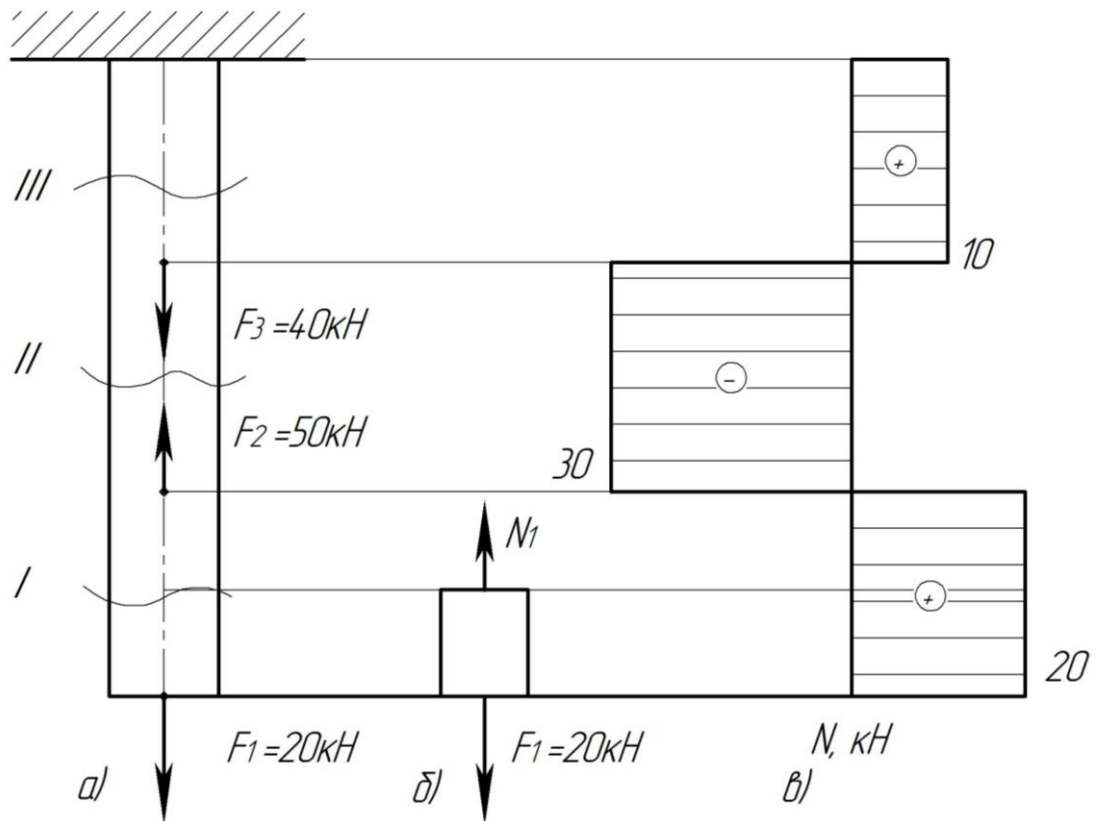


Рисунок 2.1

Напруження у поперечних перетинах стержня

При розтягу (стиску) бруса у його поперечних перетинах виникають тільки **нормальні напруження**.

При розтягу (стиску) бруса нормальні напруження на його поперечному перетині **розподілені рівномірно**.

Між поздовжньою (нормальною) силою N і нормальним напруженням σ (рис. 2.2) існує залежність

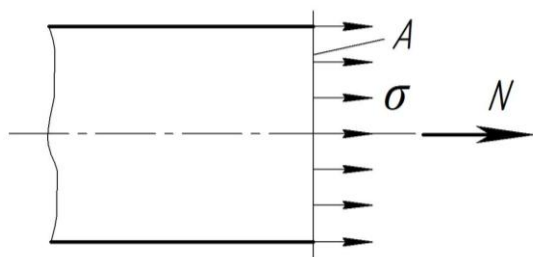


Рисунок 2.2

$$N = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Вважаємо, що $\sigma = const$, тоді

$$N = \sigma \cdot A,$$

Звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Нормальні напруження додатні, якщо розтягують матеріал стержня, від'ємні, – якщо стискають.

Якщо нормальні напруження у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, доцільно показувати закон їх зміни на довжині бруса у вигляді графіка – епюри нормальних напружень.

Дотичні напруження додатні, якщо вектор τ обходить елементи матеріалу за годинниковою стрілкою.

Поздовжні й поперечні деформації

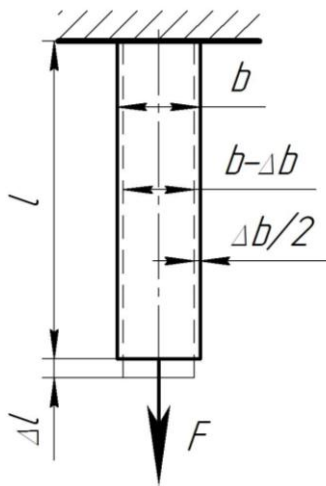
Розглянемо деформацію стержня, навантаженого осьюовою силою F (рис. 2.3):

Δl – повне поздовжнє видовження стержня (абсолютна поздовжня деформація, лінійне видовження, лінійна деформація);

Δb – абсолютна поперечна деформація (лінійна деформація);

ε – відносна поздовжня деформація, $\varepsilon = \Delta l / l$;

ε' – відносна поперечна деформація, $\varepsilon' = \Delta b / b$.



До певної величини сили деформації пружного тіла пропорційні силі. При розтягу (стиску) існує лінійна залежність між видовженням стержня і поздовжньою силою.

Експериментально доведено, що напруження у матеріалі стержня залежать від деформації й механічних характеристик матеріалу. Описується ця залежність як **закон Гука при розтягу (стиску)**

Рисунок 2.3

$$\sigma = \varepsilon \cdot E; \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де E – модуль пружності (модуль пружності I-го роду, модуль Юнга, модуль нормальної пружності, модуль поздовжньої пружності).

Експериментально встановлено, що при простому розтягу або стиску відношення поперечної деформації до поздовжньої величина постійна для даного матеріалу. Це відношення, взяте за абсолютним значенням, називають коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона

$$\mu = |\varepsilon' / \varepsilon|.$$

E , μ – механічні характеристики матеріалу, визначають його пружні властивості. Для сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

Закон Гука справедливий лише до певної величини нормального напруження, яке називають границею пропорційності даного матеріалу.

Діаграма розтягу пластичних матеріалів

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які визначають їх міцність, пластичність, а також пружні постійні E та μ , необхідні інженеру-конструктору для вибору матеріалу деталі та її розрахунку на міцність і жорсткість. Ці характеристики отримують експериментально. Для цього використовують лабораторне обладнання, на якому до взірця (рис. 2.4б) прикладають статичне навантаження на розтяг (стиск) і замірюють сили й деформації. Щоб виключити вплив абсолютних розмірів досліджуваного взірця, будують так звану умовну діаграму розтягу в координатах: відносне видовження ε , нормальне напруження σ . Для маловуглецевої сталі діаграма розтягу (стиску) зображена на рис. 2.4а.

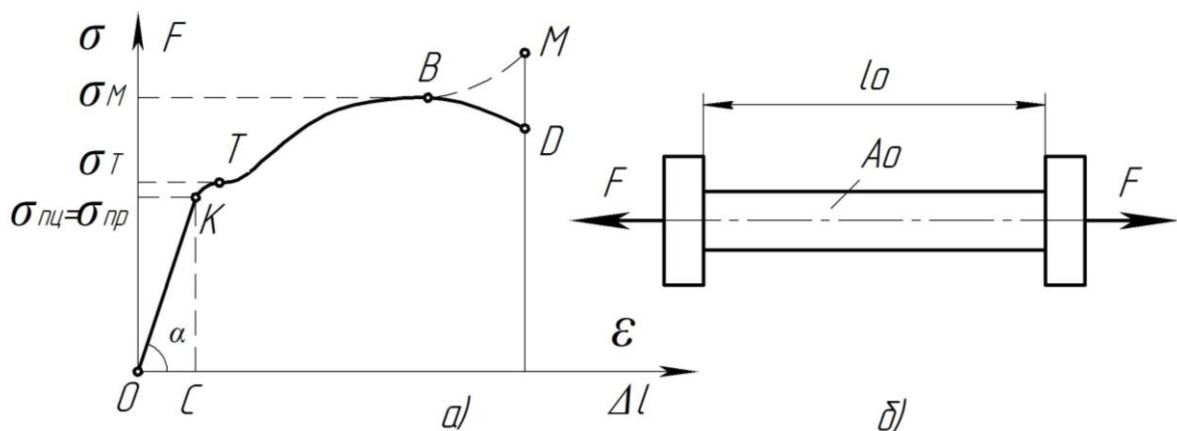


Рисунок 2.4

Позначення на діаграмі такі:

σ_{nu} – **границя пропорційності**, на даній ділянці деформація пропорційна навантаженню, найбільше напруження, при досягненні якого справедливий закон Гука, $\sigma_{nu} = F_{nu} / A_0$;

σ_{np} – **границя пружності**, до цього напруження матеріал зберігає пружні властивості (у взірці не виникає залишкових деформацій при знятті навантаження), $\sigma_{np} = F_{np} / A_0$;

σ_T – **границя текучості** – напруження, при якому відбувається ріст пластичних деформацій взірця при постійному навантаженні, це – основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів (сталей), $\sigma_T = F_T / A_0$;

σ_M – **границя міцності** – напруження, при якому відбувається руйнування матеріалу взірця, тобто умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке витримує взірець до руйнування, $\sigma_M = F_{max} / A_0$.

Тут A_0 – початкова площа поперечного перетину зразка, що піддається

розтягу; F_{nc} , F_{np} , F_T – зростання величини сили розтягу, F_{\max} – максимальна сила навантаження без врахування звуження перетину.

На ділянці ОК діаграми розтягу (див. рис. 2.4a) стверджується закон Гука $E = \sigma/\varepsilon$.

Потенціальна енергія деформацій

При статичному розтягу стержня (взірця) в межах застосування закону Гука сила F поступово збільшується від нуля до якогось значення, взірець деформується на величину Δl (див. рис. 2.3) і при цьому здійснює роботу W . Ця робота акумулюється у деформованому взірці у вигляді потенціальної енергії деформації, тобто $W=U$.

Якщо діаграма розтягу (див. рис. 2.4a) побудована в координатах (F , Δl), то робота рівна площі трикутника OSK :

$$W = U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l,$$

де $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$; $F = N$.

Тоді

$$W = U = \frac{F^2 \cdot l}{2F \cdot A} = \frac{\sigma^2 \cdot A \cdot l}{2E} = \frac{\sigma^2 \cdot V}{2E},$$

де F – сила, що розтягує взірець, $F = \sigma \cdot A$;

V – об'єм тіла, тобто взірця, $V = A \cdot l$;

A – площа поперечного перетину взірця.

Питома потенціальна енергія – це енергія деформації, яка припадає на одиницю об'єму

$$U = \frac{W}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Допустимі напруження. Розрахунок на міцність

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень: **робочі, граничні, допустимі**.

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – це ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні. Але якщо

робочі напруження дуже близькі до граничних (хоча й менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому **при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими.**

Допустимі напруження – це такі, при яких гарантована безпечна робота деталі. Позначають їх $[\sigma]$ чи $[\tau]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень, щоб гарантувати запас міцності:

а) для пластичних матеріалів (сталі)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг і стиск;

n – коефіцієнт запасу міцності;

б) для крихких матеріалів (чавуни)

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n}; \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n},$$

де $[\sigma]_P$ – допустиме напруження на розтяг;

σ_{MP} – границя міцності на розтяг;

$[\sigma]_C$ – допустиме напруження на стиск;

σ_{MC} – границя міцності на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів $n = 1,2 \dots 2,5$;
для крихких матеріалів $n = 2 \dots 5$.

Умова міцності при розтягу-стиску

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При розрахунках деталей на міцність основними є три види задач.

1. Проектний розрахунок, за яким визначають розміри поперечного перетину

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]},$$

де N_{\max} – максимальне значення поздовжньої сили, беруть з епюри N .

2. Перевірний розрахунок, за яким визначають робочі (фактичні) напруження і порівнюють з допустимим

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

3. Визначення допустимих навантажень

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A.$$

Задача №1

Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу й стиску

Для заданого прямолінійного ступінчастого сталюого стержня (рис. до задачі №1, табл. до задачі №1) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стержня; побудувати епюри робочих (фактичних) нормальних напружень і лінійних переміщень стержня, якщо $l = 8\text{м}$; $a = kl$; $b = ml$; матеріал стержня – сталь; $[\sigma] = 160\text{МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$.

План розв'язування задачі:

1. Виконати розрахункову схему.
2. Побудувати епюру поздовжніх сил.
3. Визначити, з умови міцності, діаметри стержня на всіх ділянках. Отримані величини заокруглити до розміру, кратного 2 або 5. Виконати ескіз стержня.
4. Обчислити на кожній ділянці робочі (фактичні) нормальні напруження за модулем σ_p і побудувати епюру робочих (фактичних) нормальних напружень.
5. Визначити лінійні переміщення окремих ступенів і всього стержня.
6. Побудувати епюру розподілу переміщень на довжині бруса.

Таблиця до задачі №1

№ з/п	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	k	m
1	25	30	50	0,2	0,5
2	10	40	20	0,4	0,7
3	20	10	60	0,1	0,4
4	15	20	40	0,3	0,6
5	30	25	10	0,25	0,65
6	25	50	25	0,35	0,75
7	40	15	30	0,45	0,8
8	20	30	50	0,15	0,45
9	50	20	40	0,2	0,8
0	60	10	20	0,4	0,8

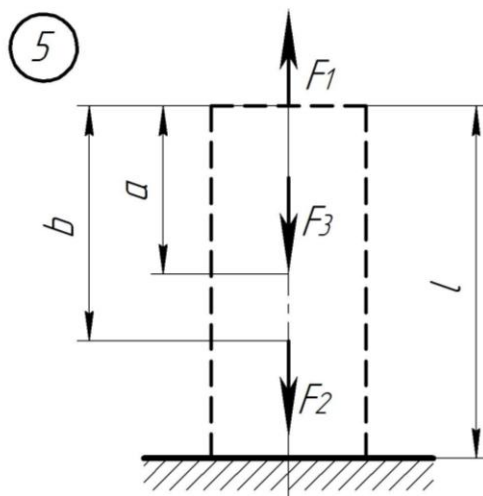
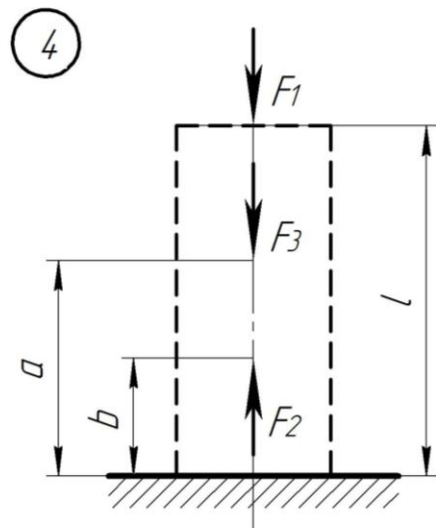
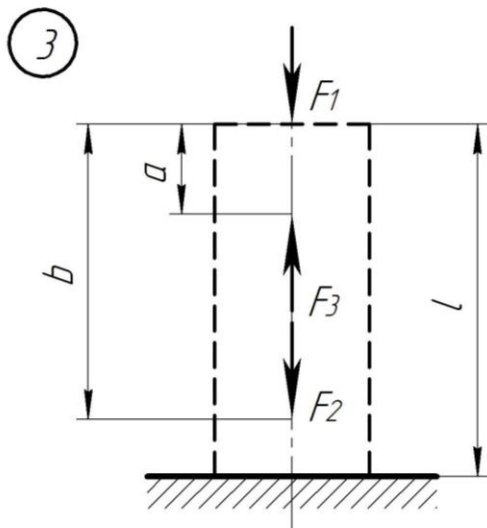
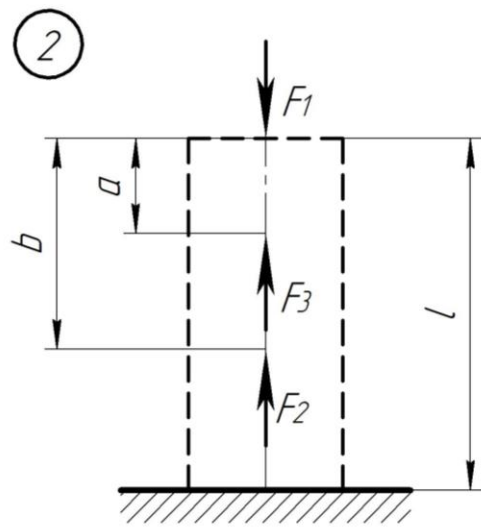
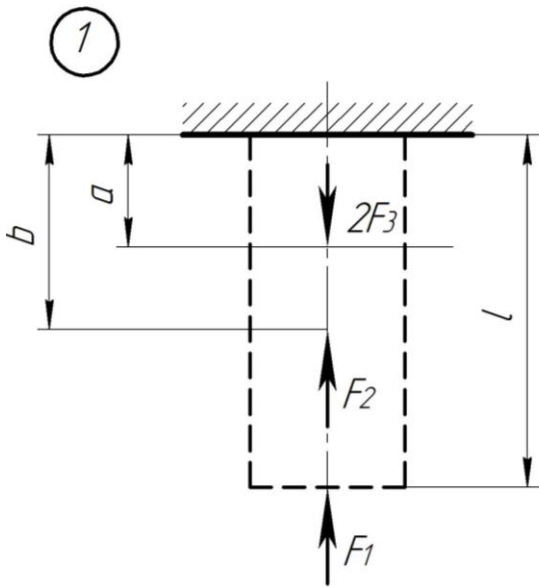
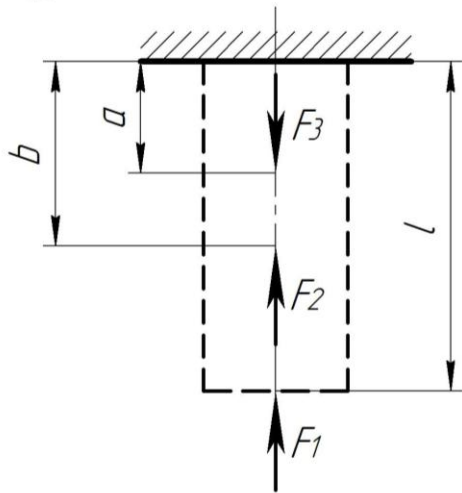
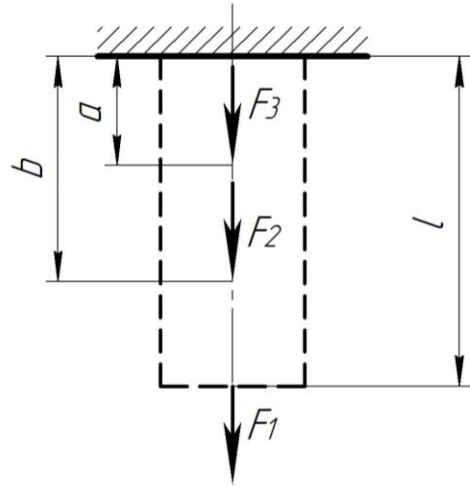


Рисунок до задачі №1

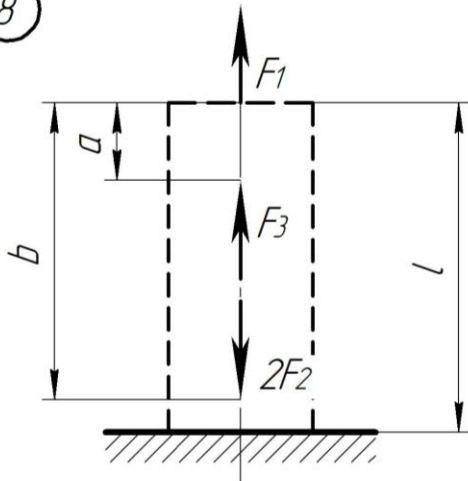
6



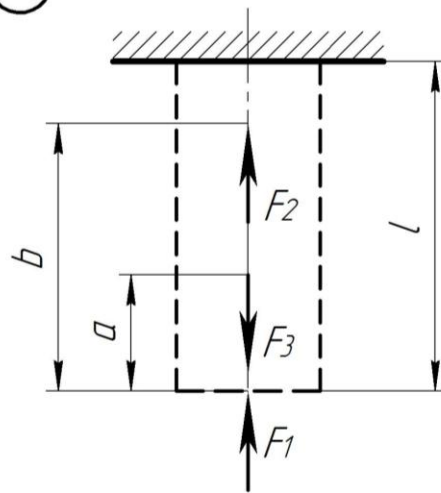
7



8



9



0

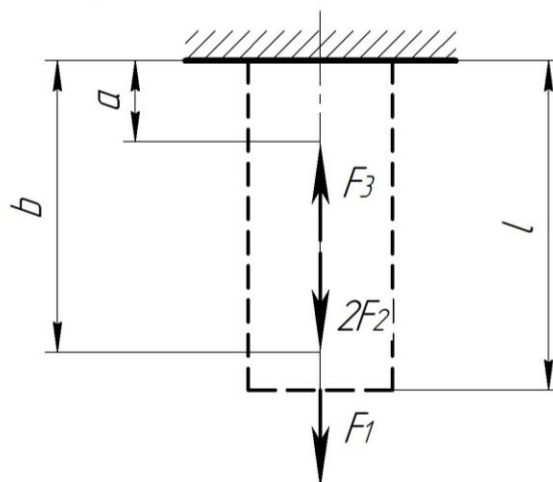


Рисунок до задачі №1 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №1
Розрахунок на міцність і визначення переміщень
при розтягу й стиску

Для заданого прямолінійного ступінчастого сталюого стержня (рис. 2.5а) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стержня; побудувати епюри робочих (фактичних) нормальних напружень і поздовжніх переміщень стержня, якщо $l = 8\text{ м}$; матеріал стержня – сталь; $[\sigma] = 160\text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

Розв'язування

Розбиваємо стержень на три ділянки (рис. 2.5а). Для кожної з ділянок визначаємо значення поздовжніх (нормальних) сил:

$$N_1 = F_1 = 10\text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 + F_2 = 10 + 20 = 30\text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 + F_2 - 2F_3 = 10 + 20 - 2 \cdot 40 = -50\text{ кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил, N (рис. 2.5б).

З умови міцності на розтяг-стиск $\sigma = N/A \leq [\sigma]$ визначаємо необхідні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{160} = 0,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{160} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Діаметри стержня визначаємо за формулою

$$A_i = \pi \cdot d_i^2 / 4, \quad \text{де } i = 1, 2, 3, 4,$$

звідки

$$d_i \geq \sqrt{4A_i / \pi}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 62,5}{3,14}} = 8,92\text{ мм};$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 187,5}{3,14}} = 15,45\text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 312,5}{3,14}} = 19,95\text{ мм}.$$

Отримані результати заокруглюємо: $d_{\partial 1} = 10\text{мм}$, $d_{\partial 2} = 16\text{мм}$, $d_{\partial 3} = 20\text{мм}$. Виконуємо ескіз стержня (рис. 2.5в).

Визначаємо дійсні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці з урахуванням заокруглення їх діаметрів за формулою

$$A_{\partial i} = \pi \cdot d_{\partial i}^2 / 4.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$A_{\partial 1} = 3,14 \cdot 10^2 / 4 = 78,5\text{мм}^2;$$

$$A_{\partial 2} = 3,14 \cdot 16^2 / 4 = 201\text{мм}^2;$$

$$A_{\partial 3} = 3,14 \cdot 20^2 / 4 = 314\text{мм}^2.$$

Визначаємо робочі (фактичні) нормальні напруження за формулою

$$\sigma_{pi} = |N_i| / A_{\partial i}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\sigma_{p1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{78,5 \cdot 10^{-6}} = 127\text{МПа};$$

$$\sigma_{p2} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{201 \cdot 10^{-6}} = 149\text{МПа};$$

$$\sigma_{p3} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{314 \cdot 10^{-6}} = 159\text{МПа}.$$

Будуємо епюру робочих (фактичних) нормальних напружень σ_p за модулем (рис. 2.5г).

Поздовжні (лінійні) деформації кожної ділянки стержня визначаємо за формулою

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot A_{\partial i}},$$

де L_i – довжина ділянки стержня, на якій діє поздовжня сила N_i .

У числовому вигляді

$$\Delta l_1 = \frac{10 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 78,5 \cdot 10^{-6}} = 1,53 \cdot 10^{-3}\text{ м} = 1,53\text{мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{30 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 201 \cdot 10^{-6}} = 1,79 \cdot 10^{-3}\text{ м} = 1,79\text{мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{-50 \cdot 3,2}{2 \cdot 10^8 \cdot 314 \cdot 10^{-6}} = -2,54 \cdot 10^{-3}\text{ м} = -2,54\text{мм}.$$

За отриманими результатами будуємо епюру лінійних переміщень перетинів стержня (рис. 2.5д). За нуль приймаємо закріплення.

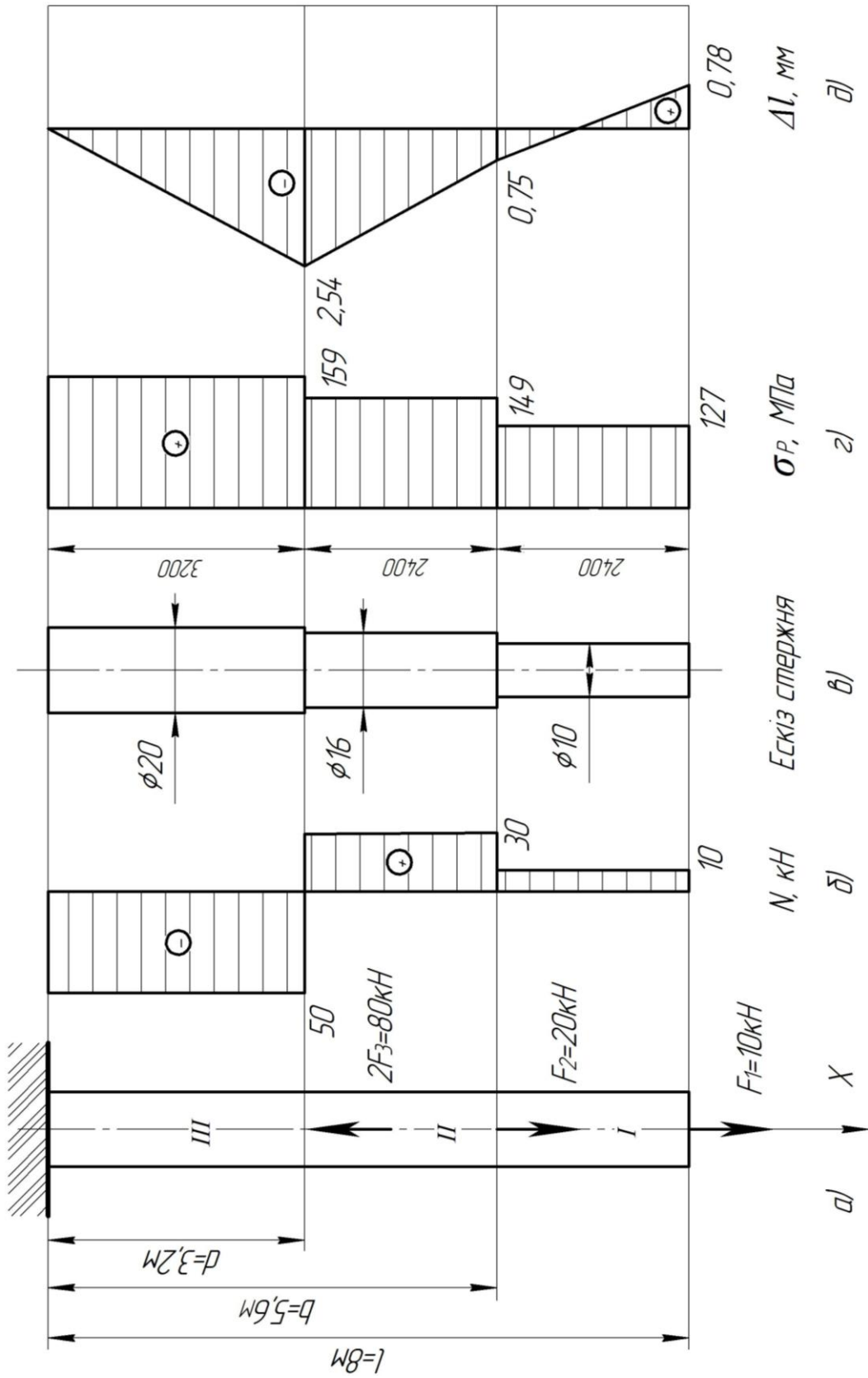


Рисунок 2.5

Задача №2

Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи при розтягу-стиску

Для заданої стержневої системи (рис. до задачі №2, табл. до задачі №2), до якої прикладена сила $F = 50кН$, визначити діаметри стержнів DE і KH , якщо відоме відношення їх площ $A_{DE} = k \cdot A_{KH}$. Матеріал стержнів – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160МН/м^2$; $a = 1м$. Брус, до якого прикладена зовнішня сила F , вважати абсолютно жорстким.

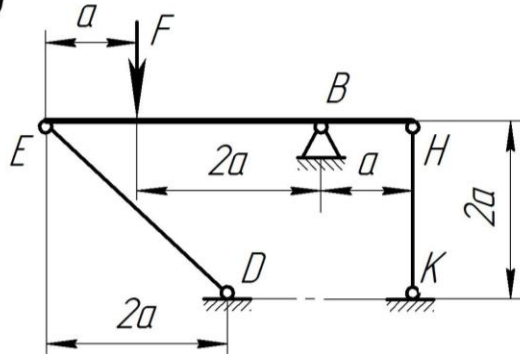
План розв'язування задачі:

1. Виконати схему стержневої системи у масштабі.
2. Встановити ступінь статичної невизначуваності системи.
3. Скласти додаткові рівняння, розглянувши деформацію системи.
4. Визначити зусилля у стержнях.
5. Підібрати площі поперечних перетинів стержнів.

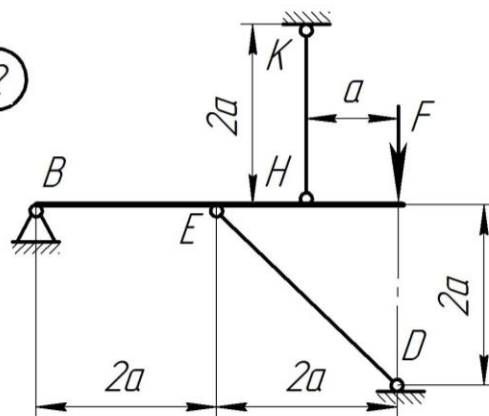
Таблиця до задачі №2

№з/П	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	0,5

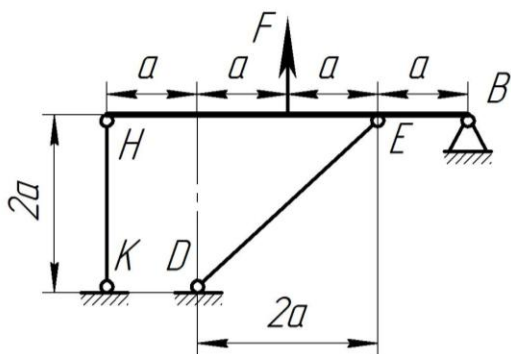
1



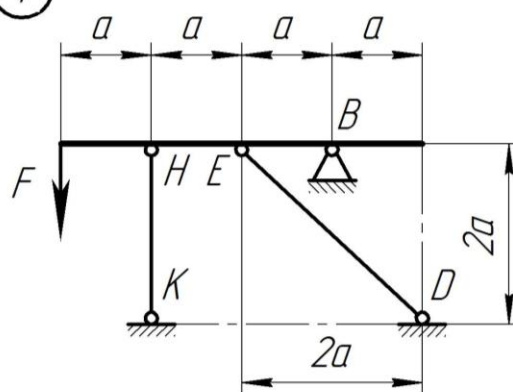
2



3



4



5

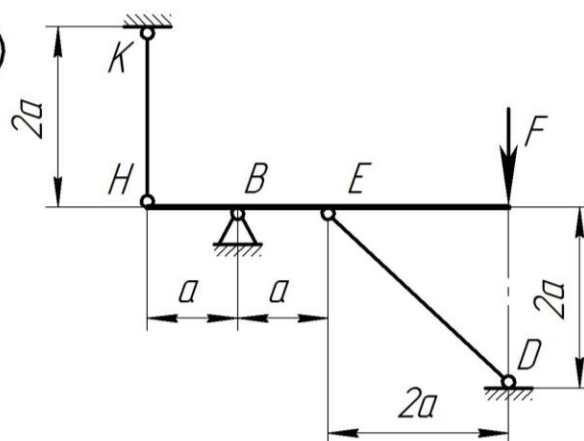
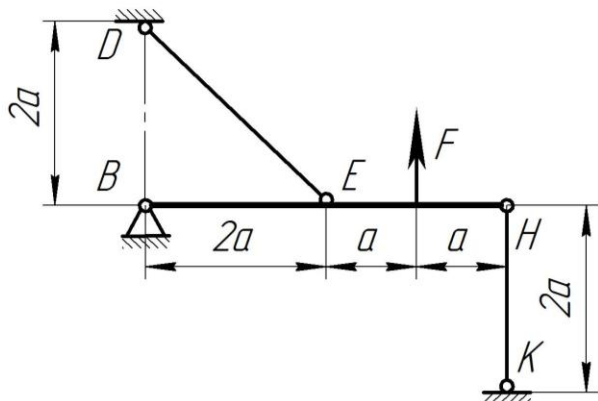
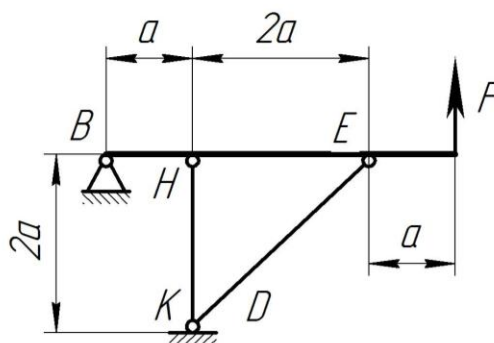


Рисунок до задачі №2

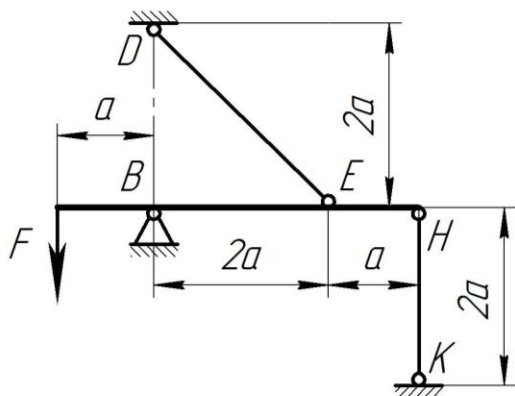
6



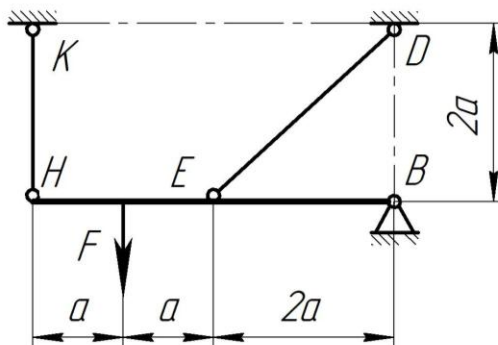
7



8



9



0

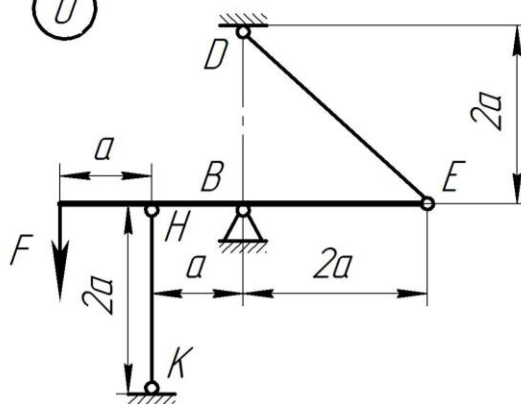


Рисунок до задачі №2 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №2
Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи
при розтягу-стиску

Для заданої стержневої системи (рис. 2.6а), до якої прикладена сила $F = 50\text{кН}$, визначити діаметри стержнів DE і KH , якщо відоме відношення їх площ $A_{DE} = k \cdot A_{KH}$, $k = 3$. Брус, до якого прикладена зовнішня сила F , вважати абсолютно жорстким. Матеріал стержнів і бруса – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160\text{МПа}$; $a = 1\text{м}$.

Розв'язування

При навантаженні системи силою F у стержнях DE і KH виникають нормальні зусилля, в даному випадку – стискаючі. Площі поперечних перетинів стержнів при стиску визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск

$$\sigma = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma], \quad \text{звідки} \quad A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}. \quad (1.1)$$

Для визначення зусиль у стержнях DE і KH складаємо рівняння рівноваги бруса (рис. 2.6б):

$$\sum X = 0; \quad -N_{DE} \cdot \cos\alpha + B_X = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum Y = 0; \quad -F + N_{DE} \cdot \sin\alpha + B_Y - N_{KH} = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 3a - N_{DE} \cdot 2a \cdot \sin\alpha - N_{KH} \cdot a = 0, \quad (1.4)$$

де N_{DE} , N_{KH} – нормальні сили, що виникають в стержнях DE і KH ;

B_X , B_Y – складові сили реакції опори B .

У системі є чотири невідомі зусилля та реакції (N_{DE} , N_{KH} , B_X , B_Y), а рівнянь рівноваги – три. Отже, система $4-3=1$ раз статично невизначена.

Складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності переміщень (деформацій).

Після прикладання сили F стержні DE і KH деформуються, і система займе положення, яке показане на рис. 2.6в. З подібності трикутників DD_1B і KK_1B випливає, що

$$\frac{DD_1}{KK_1} = \frac{DB}{KB} = \frac{2a}{a} = 2. \quad (1.5)$$

У даному випадку

$$DD_1 = \frac{\Delta L_{DE}}{\sin\alpha}; \quad KK_1 = \Delta L_{KH}, \quad (1.6)$$

де ΔL_{KH} , ΔL_{DE} – абсолютні деформації стержнів KH і DE .

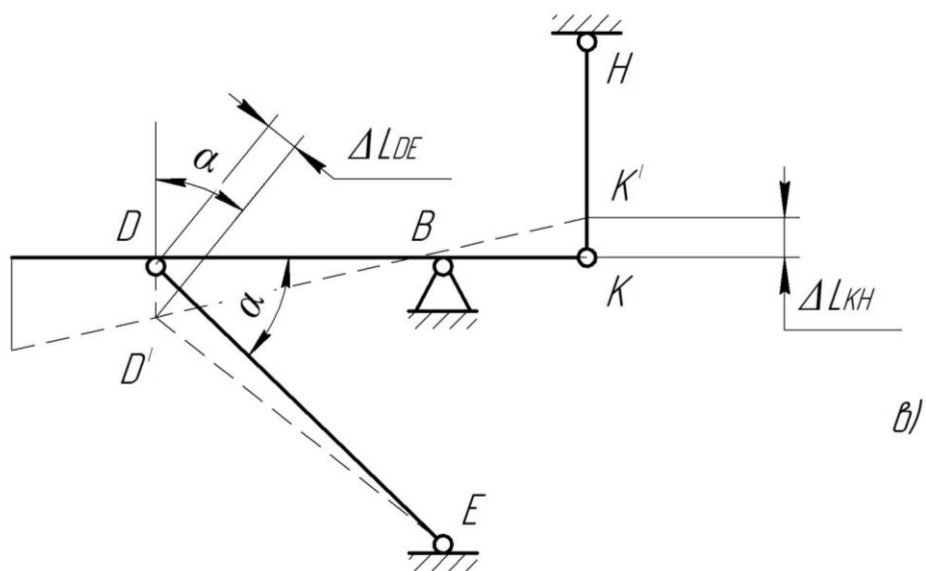
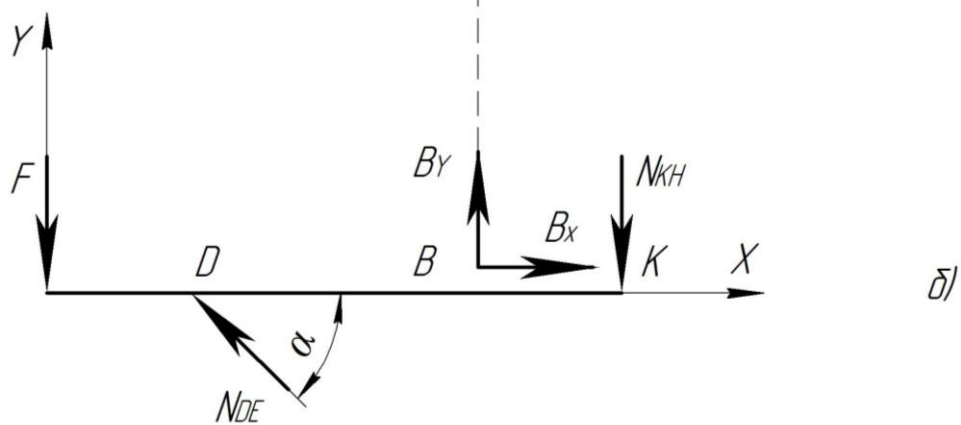
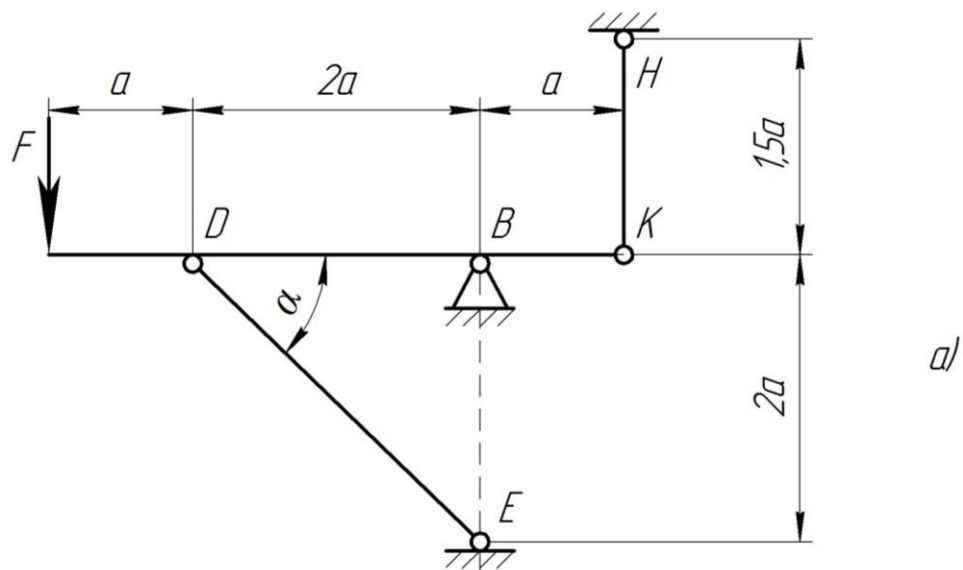


Рисунок 2.6

Деформації стержнів запишемо через закон Гука у вигляді:

$$\Delta L_{KH} = \frac{N_{KH} \cdot 1,5a}{E \cdot A_{KH}}; \quad \Delta L_{DE} = \frac{N_{DE} \cdot 2a}{E \cdot A_{DE} \cdot \sin \alpha}.$$

Підставивши значення ΔL_{KH} і ΔL_{DE} у вирази (1.5) і (1.6), отримаємо

$$\frac{N_{DE} \cdot 2a \cdot E \cdot A_{KH}}{N_{KH} \cdot 1,5a \cdot E \cdot A_{DE} \cdot \sin^2 \alpha} = 2.$$

Врахувавши, що $A_{DE} = 3A_{KH}$, отримаємо

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 \alpha.$$

У даному випадку $\alpha = 45^\circ$ (див. рис. 2.6a), тоді

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 45^\circ = 2,25N_{KH}. \quad (1.7)$$

Розв'язуючи рівняння (1.4) і (1.7), визначаємо невідомі зусилля в стержнях

$$\begin{cases} 3F - 2N_{DE} \cdot \sin 45^\circ - N_{KH} = 0; \\ N_{DE} = 2,25N_{KH}, \end{cases}$$

звідки

$$N_{KH} = \frac{3F}{4,5 \sin 45^\circ + 1} = \frac{3 \cdot 50}{4,5 \cdot 0,7 + 1} = 35,9 \text{ кН},$$

відповідно

$$N_{DE} = 2,25 \cdot 35,9 = 80,8 \text{ кН}.$$

Надалі рівняння (1.2) і (1.3) при розв'язуванні задачі не використовуємо, так як невідомі зусилля в стержнях визначені, а за умовою задачі непотрібно визначати реакцію в опорі B .

Площу поперечного перетину стержня KH визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск (1.1)

$$A_{KH} \geq \frac{N_{KH}}{[\sigma]} = \frac{35,9 \cdot 10^{-3}}{160} = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

площу поперечного перетину стержня DE – зі співвідношення

$$A_{DE} = 3A_{KH} = 3 \cdot 2,24 \cdot 10^{-4} = 6,72 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Перевіряємо стержень DE на міцність

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{A_{DE}} = \frac{80,8 \cdot 10^{-3}}{6,72 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності забезпечена. В іншому випадку площу поперечного перетину стержня DE необхідно було б визначити з умови міцності, а стержня KH – зі співвідношення.

3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

Моменти інерції та центр ваги

Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі.

Статичні моменти площі перетину довільної форми (рис. 3.1) визначають за формулами

$$S_X = \int_A y dA; \quad S_Y = \int_A x dA;$$

$$S_X = y_C \cdot A; \quad S_Y = x_C \cdot A,$$

де x, y – координати (відстані), що визначають положення елемента площі dA ;

y_C, x_C – координати центра ваги площі перетину;

A – площа перетину;

dA – елемент площі (елементарна площадка).

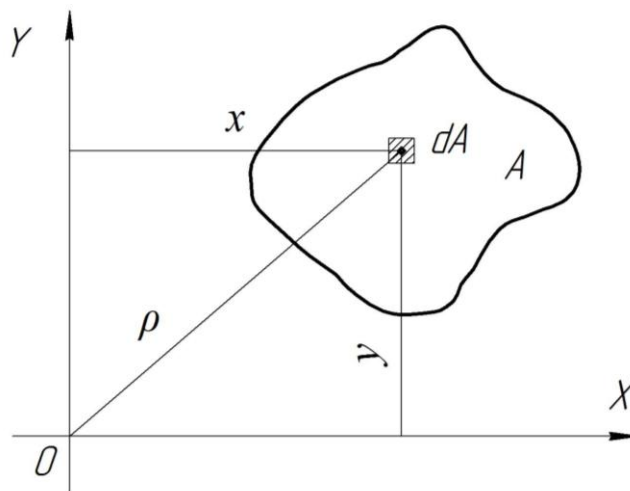


Рисунок 3.1

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її до центра ваги від цієї осі.

Статичний момент площі фігури – момент першого порядку, розмірність його m^3 . Він може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю (відносно осі симетрії фігури або відносно центральної осі, тобто осі, що проходить через центр ваги перетину).

Для визначення **центра ваги** складних фігур застосовують **метод розбиття**, статичний момент площі всієї фігури визначають як алгебраїчну суму статичних моментів окремих її частин. Координати центра ваги складного перетину визначають за формулами

$$x_C = \frac{\sum S_Y}{\sum A}; \quad y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A},$$

де $\sum S_Y$, $\sum S_X$ – сума статичних моментів окремих площ;
 $\sum A$ – сума окремих площ.

Осі, що проходять через центр ваги перетину, називають **центральною осями**. Статичний момент площі відносно центральної осі дорівнює нулю.

Полярний момент інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, – це взята на всій площині сума добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса.

Полярний момент площі перетину довільної форми відносно полюса O (див. рис. 3.1) визначають за інтегралом

$$I_P = \int_A \rho^2 dA,$$

де ρ – відстань від центра елементарної площадки (елемента площі) dA до осі, перпендикулярної до площини перетину, що проходить через точку O (полюс),

$$\rho^2 = y^2 + x^2.$$

Осьовий момент інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі.

Осьові моменти інерції площі перетину довільної форми (див. рис. 3.1) відносно осей OX та OY визначають за інтегралами

$$I_X = \int_A y^2 dA; \quad I_Y = \int_A x^2 dA.$$

Полярний та осьові моменти інерції площі перетину величини завжди додатні і не дорівнюють нулю.

Залежність між осьовими та полярним моментами інерції

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = I_X + I_Y.$$

Моменти інерції фігури – моменти другого порядку, розмірність m^4 .

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетину цих осей (початку координат).

Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей

$$I_{X_1} = I_X + A \cdot a^2.$$

Осьовий момент інерції відносно будь-якої осі X_1 дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі X , яка паралельна осі X_1 , плюс добуток площі на квадрат відстані між осями (a – відстань між осями).

Головні осі та головні моменти інерції

Центральні осі – осі, які проходять через центр ваги плоскої фігури.

Центральні моменти інерції плоскої фігури (перетину) – моменти інерції відносно центральних осей.

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції перетину залишиться постійним, а осьові моменти інерції будуть змінюватися, причому

$$I_X + I_Y = I_P = const.$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні один із осьових моментів досягає максимального, а другий – мінімального значень.

Головні осі інерції – осі, відносно яких осьові моменти інерції перетину (плоскої фігури) досягають максимальних і мінімальних значень.

Головні моменти інерції перетину – це осьові моменти інерції відносно головних осей.

Головні центральні осі – це головні осі, які проходять через центр ваги перетину (плоскої фігури). Якщо фігура має хоча б одну вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

Головні центральні моменти інерції перетину (плоскої фігури) – це моменти інерції відносно головних центральних осей.

В інженерних розрахунках важливе значення мають **головні центральні моменти інерції**.

Моменти інерції перетинів є геометричними характеристиками, які дають змогу порівняти жорсткість брусів із заданого матеріалу з їхнім опором зовнішнім силам.

Осьові та полярні моменти інерції набувають лише додатних значень.

Опір бруса згину та крученню характеризують також моментами опору перетинів: осьовими та полярним.

Осьові моменти опору перетинів визначають за формулами

$$W_X = \frac{I_X}{|y_{\max}|}; \quad W_Y = \frac{I_Y}{|x_{\max}|},$$

де y_{\max} , x_{\max} – координати точок поперечного перетину максимально віддалених від осей OX та OY .

Полярний момент опору перетину відповідно

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\max}},$$

де ρ_{\max} – координата точки перетину, максимально віддаленої від полюса.

Полярні моменти інерції та полярні моменти опору для поперечних перетинів:

- круг (рис. 3.2а)

$$I_P = \pi \cdot D^4 / 32; \quad W_P = \pi \cdot D^3 / 16;$$

- кільце (рис. 3.2б)

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - \alpha^4), \quad \text{де } \alpha = d/D.$$

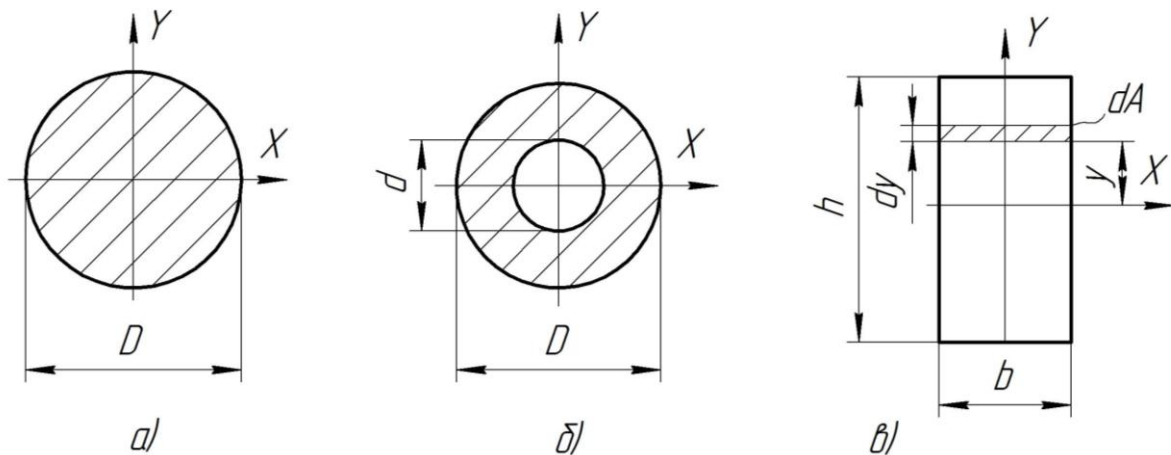


Рисунок 3.2

Осьові моменти інерції та осьові моменти опору для поперечних перетинів:

- круг (див. рис. 3.2а)

$$I_X = I_Y = I_0 = \pi \cdot D^4 / 64; \quad W_X = W_Y = W_0 = \pi \cdot D^3 / 32;$$

- прямокутник (рис. 3.2в)

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

Задача №3

Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів

Для заданого перетину (рис. до задачі №3, табл. до задачі №3) визначити положення головних центральних осей; головні центральні моменти інерції та осьові моменти опору відносно головних центральних осей.

План розв'язування задачі:

1. Виписати необхідні для розв'язування задачі дані з таблиць сортаменту (*додатки 9, 10*).
2. Визначити геометричні характеристики полоси (полос).
3. Накреслити перетин у масштабі 1:1 або 1:2. Усі розміри, використані у розрахунках, позначити на кресленні.
4. Вибрати раціональне розміщення допоміжних координатних осей.
5. Визначити положення центра ваги перетину.
6. Провести паралельно допоміжним осям головні центральні осі й визначити величини головних центральних моментів інерції перетину.
7. Визначити осьові моменти опору перетину відносно головних центральних осей.

Таблиця до задачі №3

№ з/п	Розміри швелера (двотавра)	№ з/п	Розміри швелера (двотавра)
1	12	6	22
2	14	7	24
3	16	8	27
4	18	9	30
5	20	0	10

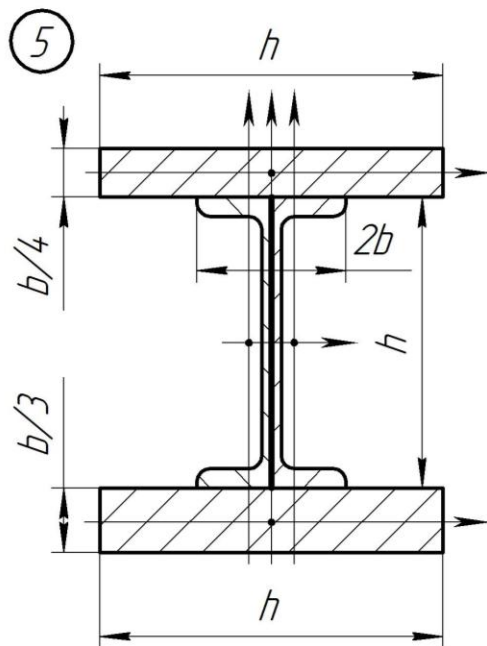
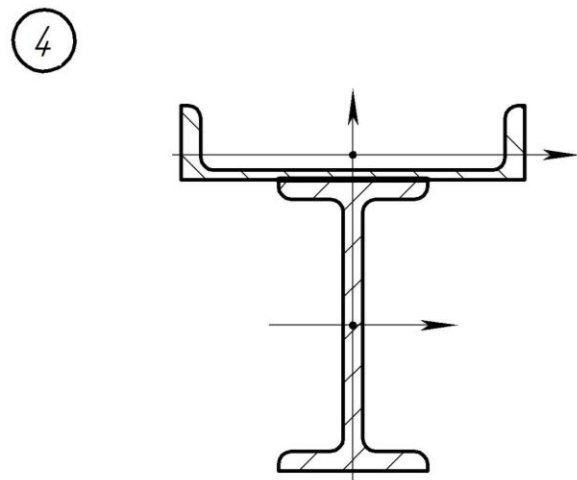
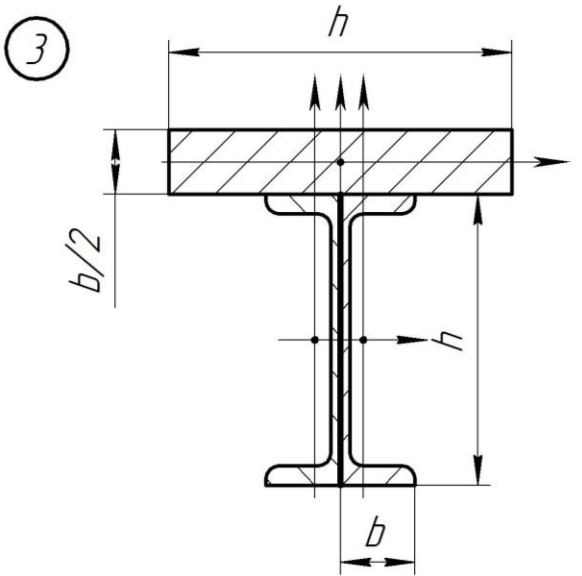
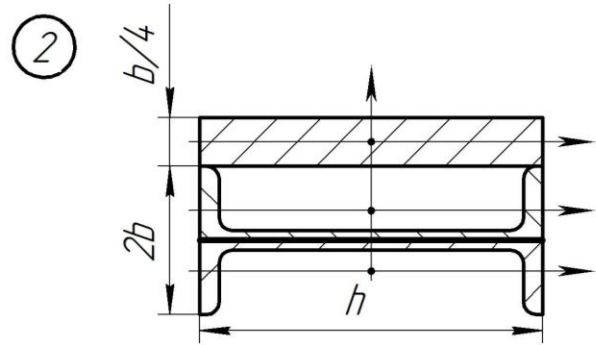
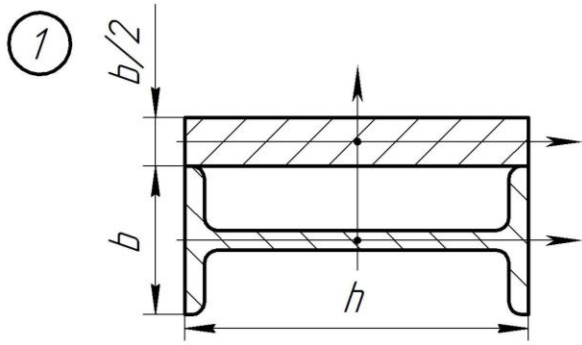


Рисунок до задачі №3

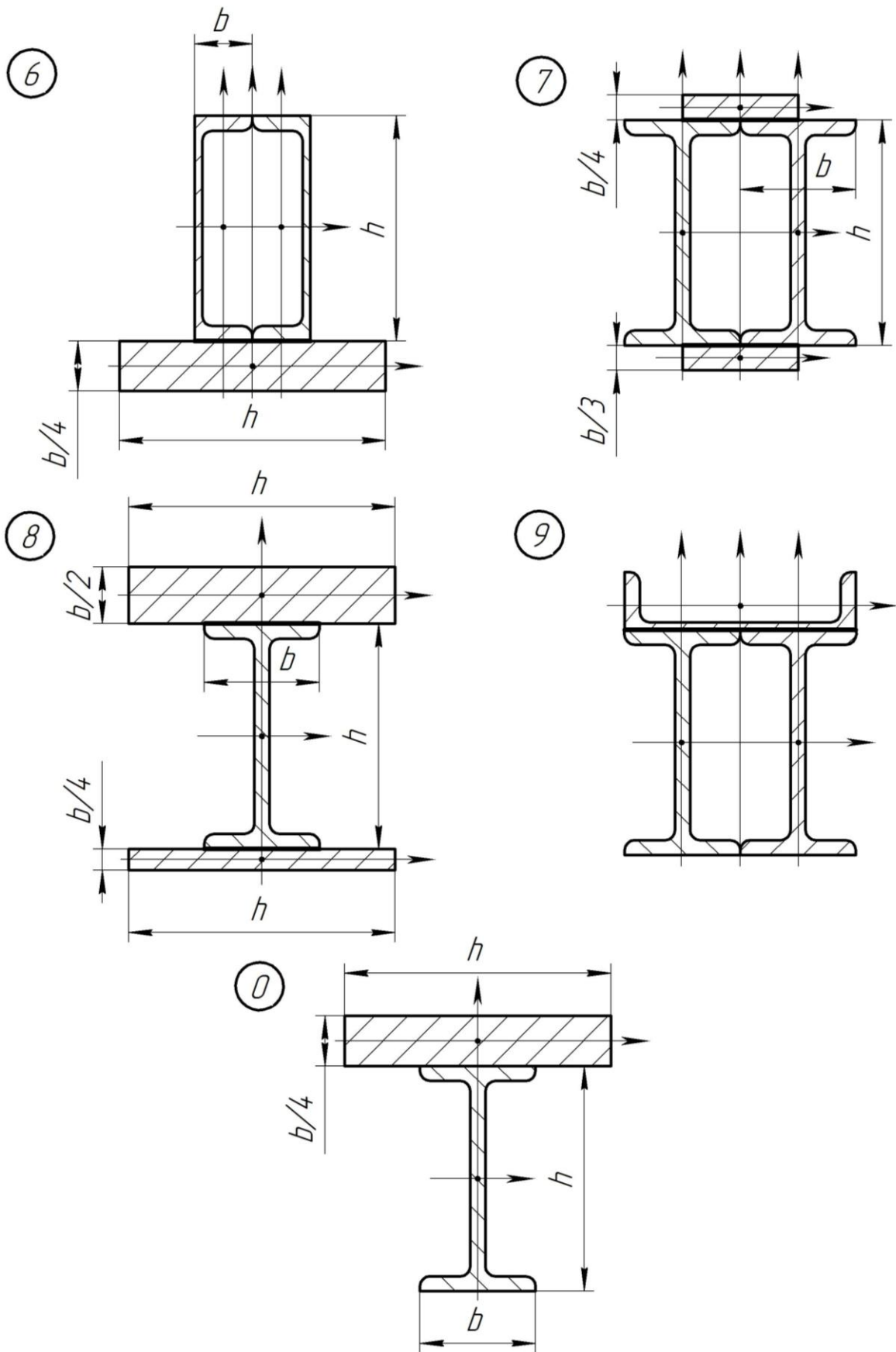


Рисунок до задачі №3 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №3

Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів

Для заданого перетину (рис. 3.3) визначити положення головних центральних осей; головні центральні моменти інерції та осьові моменти опору відносно головних центральних осей, якщо двотавр №33.

Розв'язування

Геометричні характеристики вказаного прокатного профілю виписуємо з таблиць сортаменту ГОСТ 8239-89 (додаток 9). Для двотавра № 33 позначаємо їх індексом 1.

$$h_1 = 330 \text{ мм}; b_1 = 140 \text{ мм}; d_1 = 7,0 \text{ мм}; t_1 = 11,2 \text{ мм}; A_1 = 53,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{X1} = 419 \text{ см}^4; I_{Y1} = 9840 \text{ см}^4.$$

Визначаємо геометричні характеристики полоси, позначимо їх індексом 2. Розміри полоси

$$b_2 = h_1/4 = 330/4 = 82,5 \text{ мм}; \quad a_2 = h_1 = 330 \text{ мм}.$$

Площа поперечного перетину полоси

$$A_2 = b_2 \cdot a_2 = 8,25 \cdot 33 = 272 \text{ см}^2.$$

Осьові моменти інерції полоси

$$I_{X2} = \frac{a_2 \cdot b_2^3}{12} = \frac{33 \cdot 8,25^3}{12} = 1544 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y2} = \frac{b_2 \cdot a_2^3}{12} = \frac{8,25 \cdot 33^3}{12} = 24706 \text{ см}^4.$$

Викреслюємо перетин у масштабі (див. рис. 3.3).

Координати центра ваги перетину в системі координат X_1Y_1 :

$$x_C = 0, \quad \text{тому, що вісь } Y \text{ є віссю симетрії};$$

$$y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}}{A_1 + A_2},$$

де y_{C1} – відстань (координата) від центра ваги площі першої фігури перетину (двотавра) до осі X_1 , $y_{C1} = 0$;

y_{C2} – відстань (координата) від центра ваги площі другої фігури перетину (полоси) до осі X_1

$$y_{C2} = \frac{140}{2} + \frac{82,5}{2} = 111,25 \text{ мм}.$$

Підставимо значення й отримаємо

$$y_C = \frac{0 + 272 \cdot 111,25}{53,8 + 272} = 92,9 \text{ мм}.$$

Проводимо через точку C головні центральні осі XU (див. рис. 3.3).

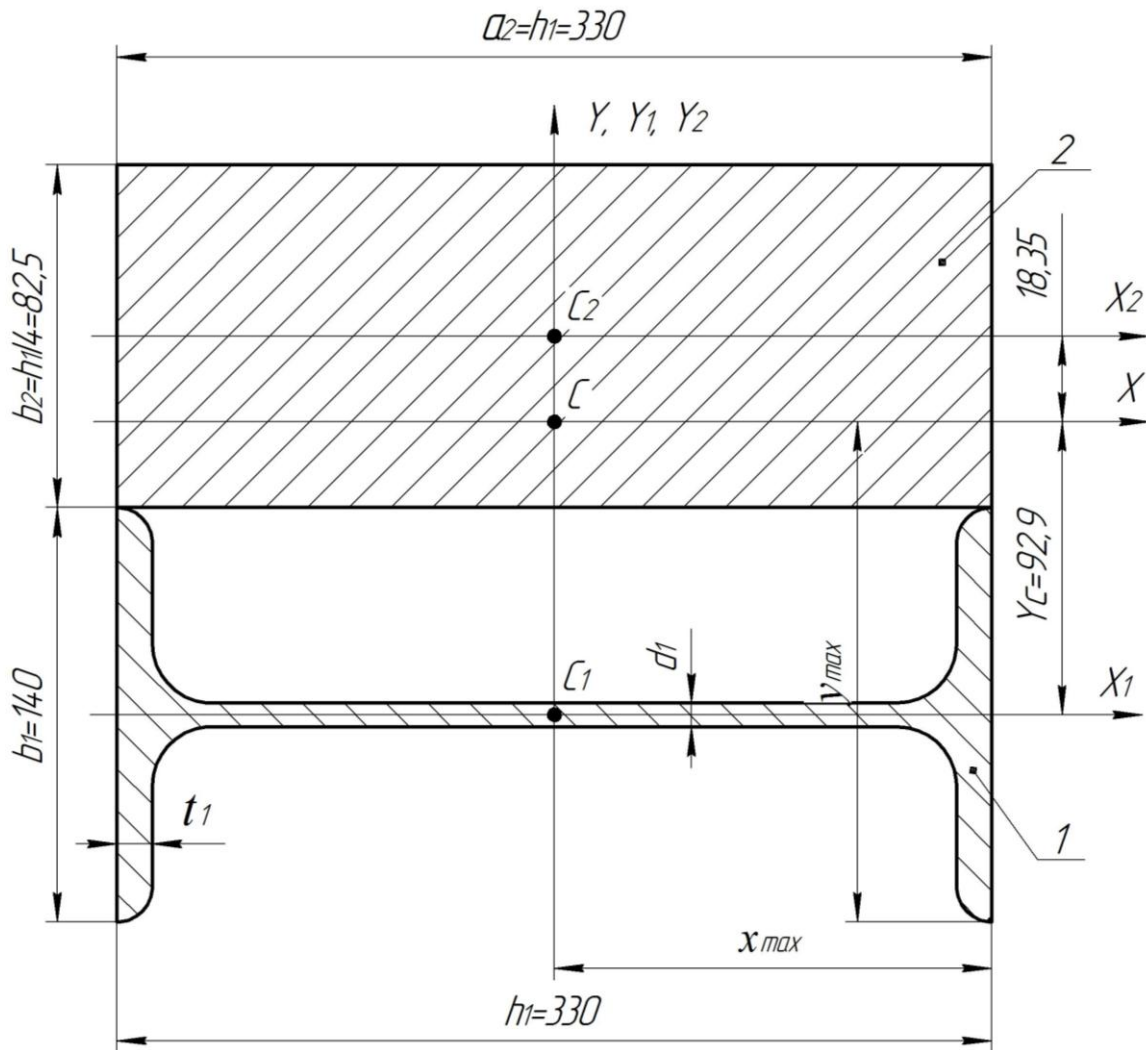


Рисунок 3.3

Визначаємо осьові моменти інерції відносно головних центральних осей, тобто головні центральні моменти інерції заданого перетину

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} = 9840 + 24706 \approx 34600 \text{ см}^4;$$

$$I_X = I_{X1} + A_1 \cdot (-9,29)^2 + I_{X2} + A_2 \cdot (1,835)^2 = \\ = 419 + 53,8 \cdot (-9,29)^2 + 1544 + 272 \cdot 1,835^2 \approx 5980 \text{ см}^4.$$

Визначаємо осьові моменти опору відносно головних центральних осей

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{5980}{16,29} = 367 \text{ см}^3;$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{x_{\max}} = \frac{34600}{16,5} = 2097 \text{ см}^3;$$

де x_{\max} , y_{\max} – координати точок заданого перетину, максимально віддалених від осей X та Y (див. рис. 3.3):

$$y_{\max} = 9,29 + 7 = 16,29 \text{ см};$$

$$x_{\max} = 16,5 \text{ см}.$$

4. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ

Зсув. Напруження, деформації і закон Гука при зсуві

Зсув (зріз) – це такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса діє тільки поперечна (перерізуюча) сила Q (рис. 4.1а). Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – **зріз**.

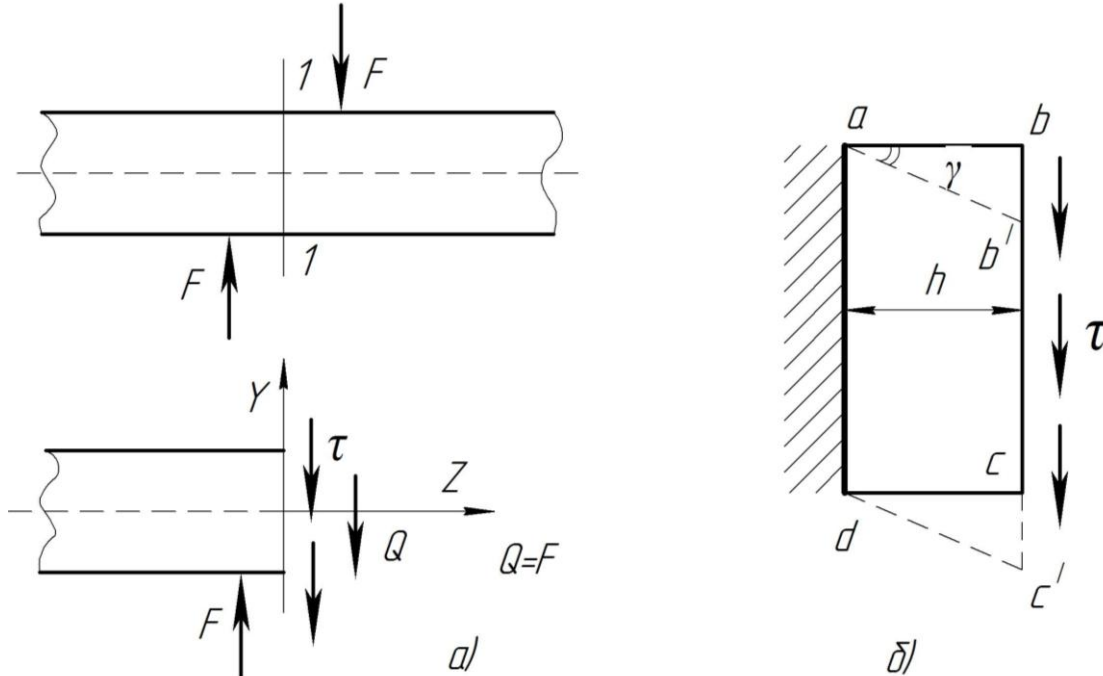


Рисунок 4.1

Вважаємо, що дотичні напруження, які виникають у поперечному перетині бруса при зсуві, $\tau = const$, тоді перерізуюча сила

$$Q = A \cdot \tau, \quad \text{тобто напруження } \tau = Q/A.$$

Умова міцності на зріз

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]_{ЗР},$$

де $[\tau]_{ЗР}$ – допустиме дотичне напруження на зріз, $[\tau]_{ЗР} = (0,25...0,35) \sigma_T$.

Деформація зсуву визначається кутом зсуву – γ . Абсолютний зсув бруса (рис. 4.1б) – bb' , cc' .

Закон Гука при зсуві

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

де G – модуль зсуву, або модуль пружності II-го роду, характеризує жорсткість матеріалу.

Залежність між пружними характеристиками пластичного матеріалу (сталі) E , G , μ

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Кручення

Кручення – вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса виникає *тільки крутний момент*, M_{KP} .

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса у площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил M (рис. 4.2). Моменти цих пар називають *обертаючими* (якщо брус обертається), позначають їх T , і *скручувальними* (якщо брус не обертається), позначають їх M .

Брус круглого поперечного перетину, що працює на деформацію кручення, називають **валом**. Кручення зазнають вали двигунів та верстатів, інші металоконструкції. На кручення працюють також стержні з перетинами інших форм.

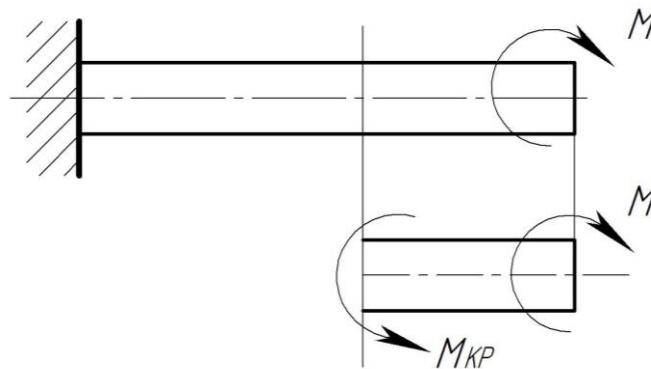


Рисунок 4.2

Крутний момент M_{KP} у будь-якому перетині вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх скручувальних моментів, прикладених до бруса справа чи зліва від перетину.

Для розрахунку бруса на міцність при крученні, так як і при розтягу (стиску) необхідно визначити **небезпечний перетин**. У випадку, якщо розміри поперечного перетину на довжині бруса постійні, то небезпечними будуть перетини, у яких крутні моменти максимальні. Графік, який показує закон зміни крутних моментів на довжині бруса, називають **епюрою крутних моментів**. Будують її аналогічно епюрі поздовжніх сил.

При крученні бруса у його поперечних перетинах виникають тільки дотичні напруження. Для круглого стержня (вала) дотичні напруження визначають за формулою

$$\tau = \frac{M_{KP}}{I_P} \cdot \rho,$$

де ρ – відстань від центра (полюса) круглого перетину до точки, в якій визначають дотичні напруження (рис. 4.3а).

Епюра розподілу дотичних напружень за висотою поперечного перетину зображена на рис. 4.3б. Дотичні напруження змінюються вздовж радіуса перетину за лінійним законом.

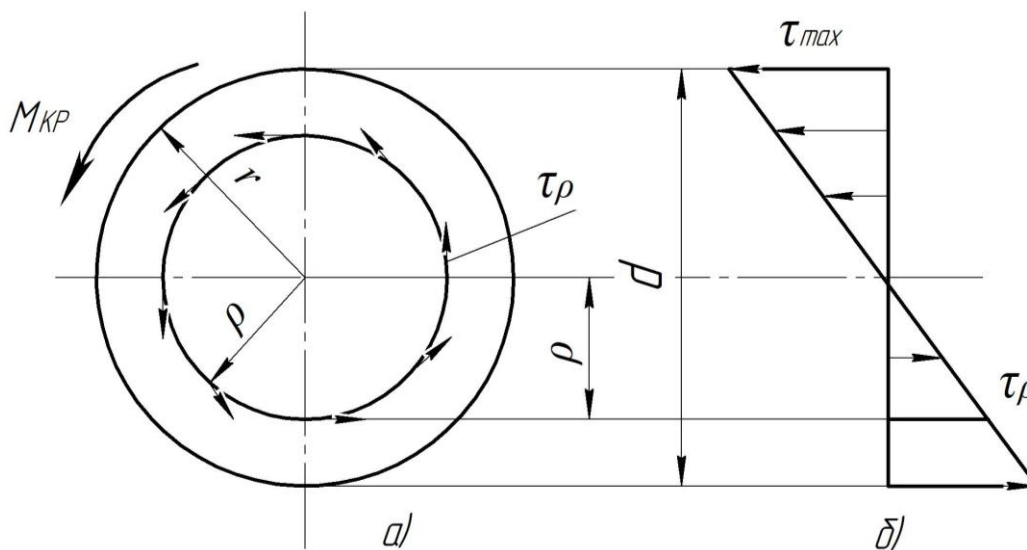


Рисунок 4.3

Дотичні напруження дорівнюють нулю в центрі перетину, $\rho = 0$ і досягають максимального значення у точках контура, $\rho = d/2$. У проміжних точках перетину дотичні напруження лінійно залежать від відстані ρ (див. рис. 4.3б). Оскільки

$$\frac{I_P}{(d/2)} = W_P, \quad \text{то} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P}.$$

Умова міцності при крученні. Міцність вала забезпечується, якщо максимальне дотичне напруження не перевищує допустимого

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження при крученні, визначають залежно від допустимого напруження розтягу $[\sigma]_P$:

для сталей $[\tau] = (0,55 \dots 0,6) [\sigma]_P$;

для чавунів $[\tau] = (1 \dots 1,2) [\sigma]_P$.

З допомогою умови міцності вала при крученні розв'язують три типи задач.

1. **Добір поперечного перетину** (проектний розрахунок), тобто визначення потрібних його розмірів з розрахунку полярного моменту опору

$$W_P \geq M_{KP} / [\tau], \text{ для круглого перетину } d = \sqrt[3]{16 W_P / \pi}.$$

2. **Перевірка міцності** (перевірний розрахунок), зводиться до порівняння фактичного (дійсного) та допустимого дотичних напружень за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau].$$

3. **Визначення найбільшого допустимого крутного моменту**

$$[M_{KP}] \leq [\tau] \cdot W_P.$$

Деформація при крученні характеризується поворотом поперечних перетинів вала один відносно одного на деякий кут φ – **кут закручування**. Для вала постійної жорсткості $G \cdot I_P$ довжиною l при постійному значенні крутного моменту M_{KP} кут закручування (повний кут закручування) визначають за формулами:

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} [\text{рад}]; \quad \varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} [\text{град}].$$

Ці співвідношення називають **законом Гука при крученні**. Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться розмірами поперечного перетину, величиною крутного моменту, матеріалом, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок $\varphi = \sum \varphi_i$.

Повний кут закручування вала не повністю характеризує деформацію кручення, оскільки залежить від довжини вала. Жорсткість вала оцінюють **відносним кутом закручування**, який визначають за формулами

$$\theta = \varphi / l; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \left[\frac{\text{град}}{\text{м}} \right].$$

Умова жорсткості вала при крученні. Жорсткість вала достатня, якщо найбільший відносний кут закручування не перевищує допустимого його значення

$$\theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

де $[\theta]$ – допустимий кут закручування вала.

З допомогою умови жорсткості (як і умови міцності) виконують три види розрахунків конструкцій: **проектний, перевірний і визначення допустимого навантаження**.

Задача №4

Розрахунок вала на кручення

На вал (рис. до задачі №4, табл. до задачі №4) насаджено 5 шківів, які передають потужності P_1, P_2, P_3, P_4, P_0 . Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta]=2\text{град}/\text{м}$. Частота обертання вала ω , відстань $a=0,4\text{м}$. Матеріал – сталь 45; $[\tau]=60\text{МПа}$; $G=8\cdot 10^4\text{МПа}$.

План розв'язування задачі:

1. Визначити, нехтуючи тертям у підшипниках, потужність на шківі « P_0 ».
2. Знайти скручувальні моменти, що передаються кожним шківом.
3. Визначити крутні моменти M_{KR} на кожній ділянці вала. Побудувати епюру крутних моментів.
4. З умови міцності на кручення визначити діаметри вала на окремих його ділянках. Заокруглити отримані величини до розміру кратного 2 або 5.
5. Виконати ескіз ступінчастого вала (з позначенням діаметрів і довжин окремих ділянок).
6. Визначити величини кутів закручування на окремих ділянках і побудувати епюру кутів закручування для всього вала, приймаючи за нерухомий перетин один з кінців вала або перетин, де діє P_0 .
7. Провести перевірку вала на жорсткість.

Таблиця до задачі №4

№ з/п	$P_1, \text{кВт}$	$P_2, \text{кВт}$	$P_3, \text{кВт}$	$P_4, \text{кВт}$	$\omega, \text{рад/сек}$
1	11	12	13	14	10
2	12	13	14	11	20
3	13	14	11	12	30
4	14	13	12	11	40
5	11	12	13	14	50
6	12	13	14	11	60
7	13	14	11	12	70
8	14	11	12	13	80
9	16	17	13	15	90
0	15	16	14	13	100

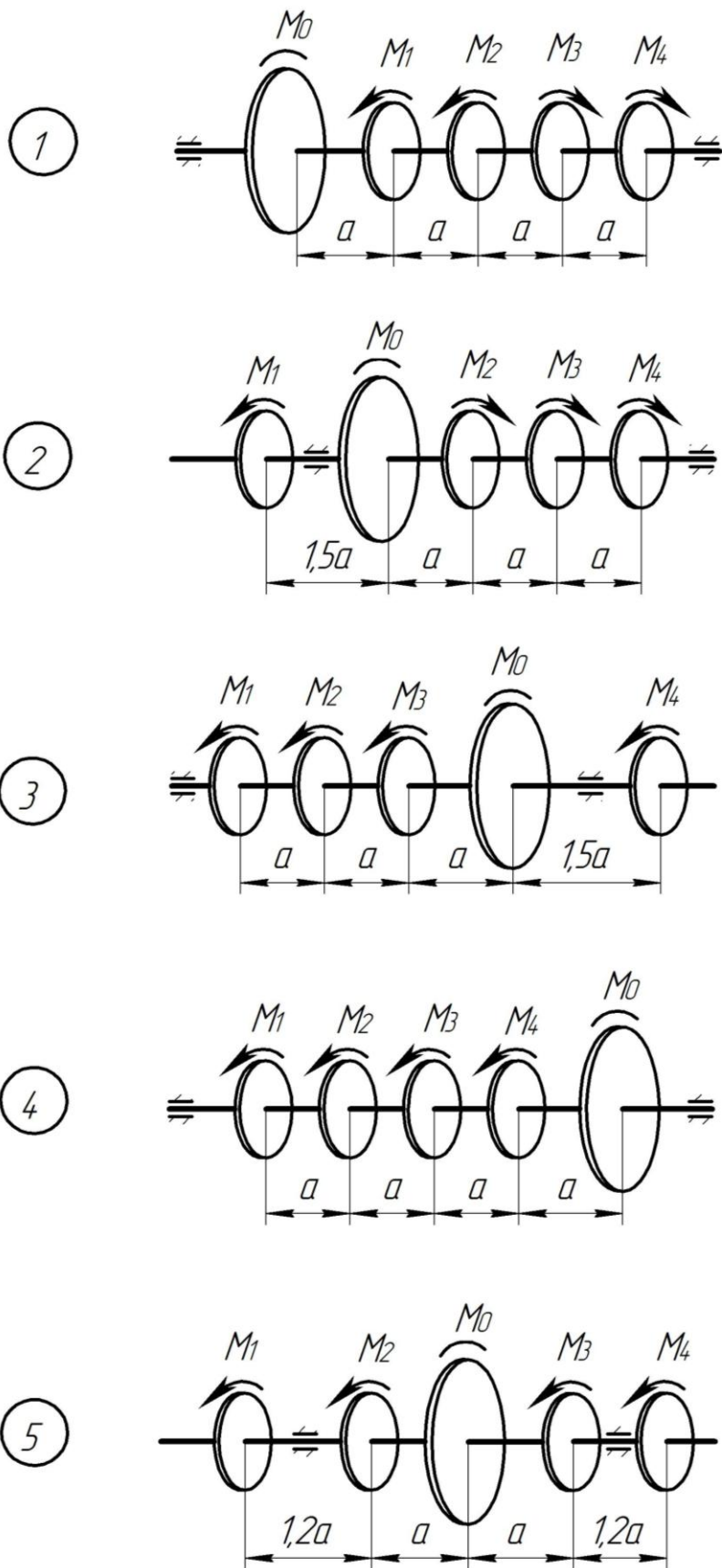


Рисунок до задачі №4

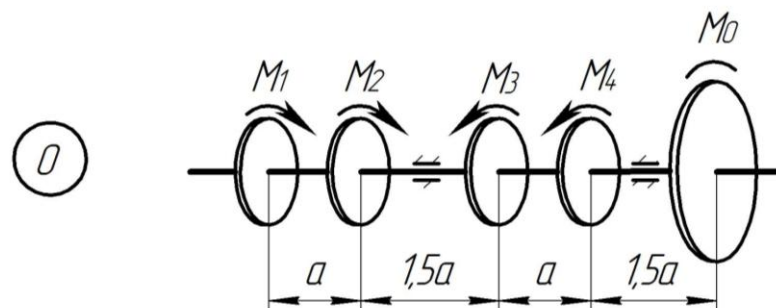
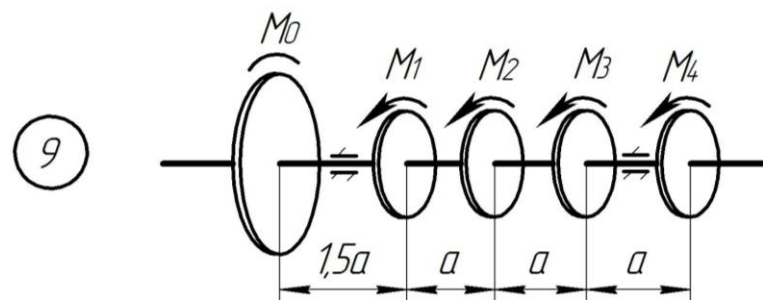
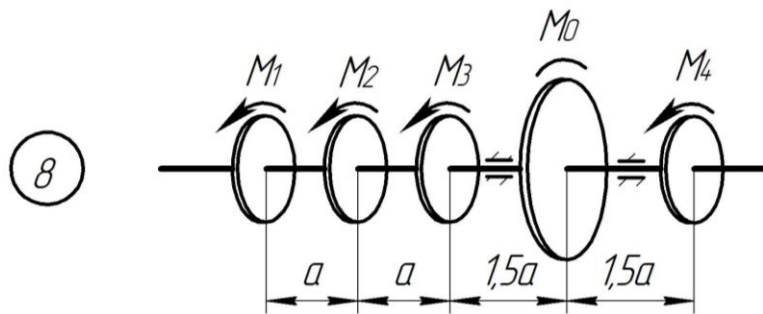
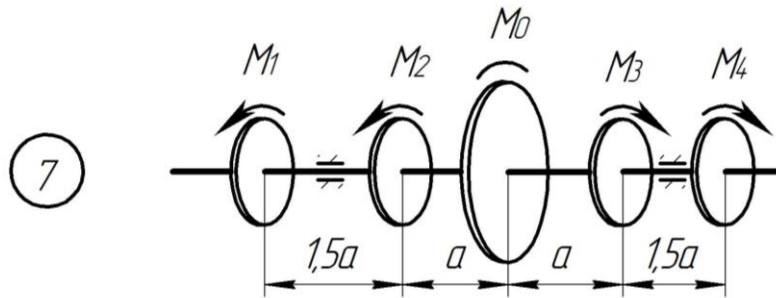
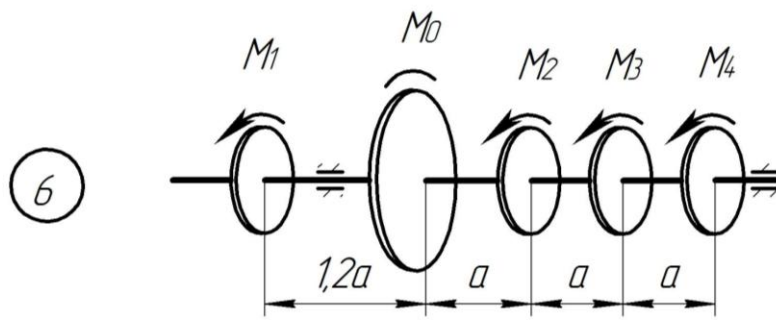


Рисунок до задачі №4 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №4

Розрахунок вала на міцність і жорсткість

На вал (рис. 4.4а) насаджено 5 шківів, які передають потужності $P_1 = 10 \text{кВт}$; $P_2 = 50 \text{кВт}$; $P_3 = 48 \text{кВт}$; $P_4 = 80 \text{кВт}$. Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta] = 2 \text{град/м}$. Частота обертання вала $\omega = 40 \text{с}^{-1}$; відстань $a = 0,4 \text{м}$; матеріал – сталь 45; $[\tau] = 50 \text{МПа}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{МПа}$.

Розв'язування

Значення потужності P_0 визначаємо на основі рівняння балансу потужностей, записаного з урахуванням напрямку дії зосереджених моментів (тертям в опорах нехтуємо),

$$-P_0 + P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 0,$$

звідки

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 10 + 50 + 48 - 80 = 28 \text{кВт}.$$

Скручувальні моменти M_i , які передаються кожним шківом, визначаємо за формулою

$$M_i = \frac{P_i}{\omega}, \quad \text{де } i=0, 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$M_0 = \frac{28}{40} = 0,7 \text{кНм}; \quad M_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \text{кНм}; \quad M_2 = \frac{50}{40} = 1,25 \text{кНм};$$

$$M_3 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{кНм}; \quad M_4 = \frac{80}{40} = 2,0 \text{кНм}.$$

Крутні моменти M_{KP_i} ($i=1, 2, 3, 4$) на кожній ділянці вала визначаємо, розглядаючи ділянки зліва і справа, (рис. 4.4б):

$$M_{KP1} = -M_0 = -0,7 \text{кНм};$$

$$M_{KP2} = -M_0 + M_1 = -0,7 + 0,25 = -0,45 \text{кНм};$$

$$M_{KP3} = M_4 = 2,0 \text{кНм};$$

$$M_{KP4} = M_4 - M_3 = 2,0 - 1,2 = 0,8 \text{кНм}.$$

За отриманими значеннями будемо епюру крутних моментів (рис. 4.4в).

З умови міцності на кручення $\tau_{\max} = M_{KP}/W_P \leq [\tau]$, враховуючи, що момент опору круглого поперечного перетину $W_P = \pi \cdot d^3/16 \approx 0,2d^3$, визначаємо діаметр вала на кожній ділянці за формулою

$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{M_{KPi}}{0,2 [\tau]}}$$

Підставивши значення крутних моментів, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 41,0 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{0,45}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 35,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 42,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{2,0}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 58,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо діаметри ділянок вала

$$d_{1\partial} = 42 \text{ мм}; \quad d_{2\partial} = 36 \text{ мм}; \quad d_{3\partial} = 44 \text{ мм}; \quad d_{4\partial} = 58 \text{ мм}.$$

За отриманими значення виконуємо ескіз вала (рис. 4.4з).

Кути закручування окремих ділянок вала визначимо за формулою

$$\varphi_i = \frac{M_{KPi} \cdot l_i}{G \cdot I_{Pi}}; \quad i=1, 2, 3, 4,$$

де l_i – довжина ділянки вала;

G – модуль зсуву, $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$;

I_{Pi} – полярний момент інерції поперечного перетину вала

$$I_{Pi} = \frac{\pi \cdot d_{i\partial}^4}{32} \cong 0,1 d_{i\partial}^4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\varphi_1 = \frac{-0,7 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,042)^4} = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-0,45 \cdot 0,6}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,036)^4} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{0,8 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,044)^4} = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{2,0 \cdot 0,5}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,058)^4} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

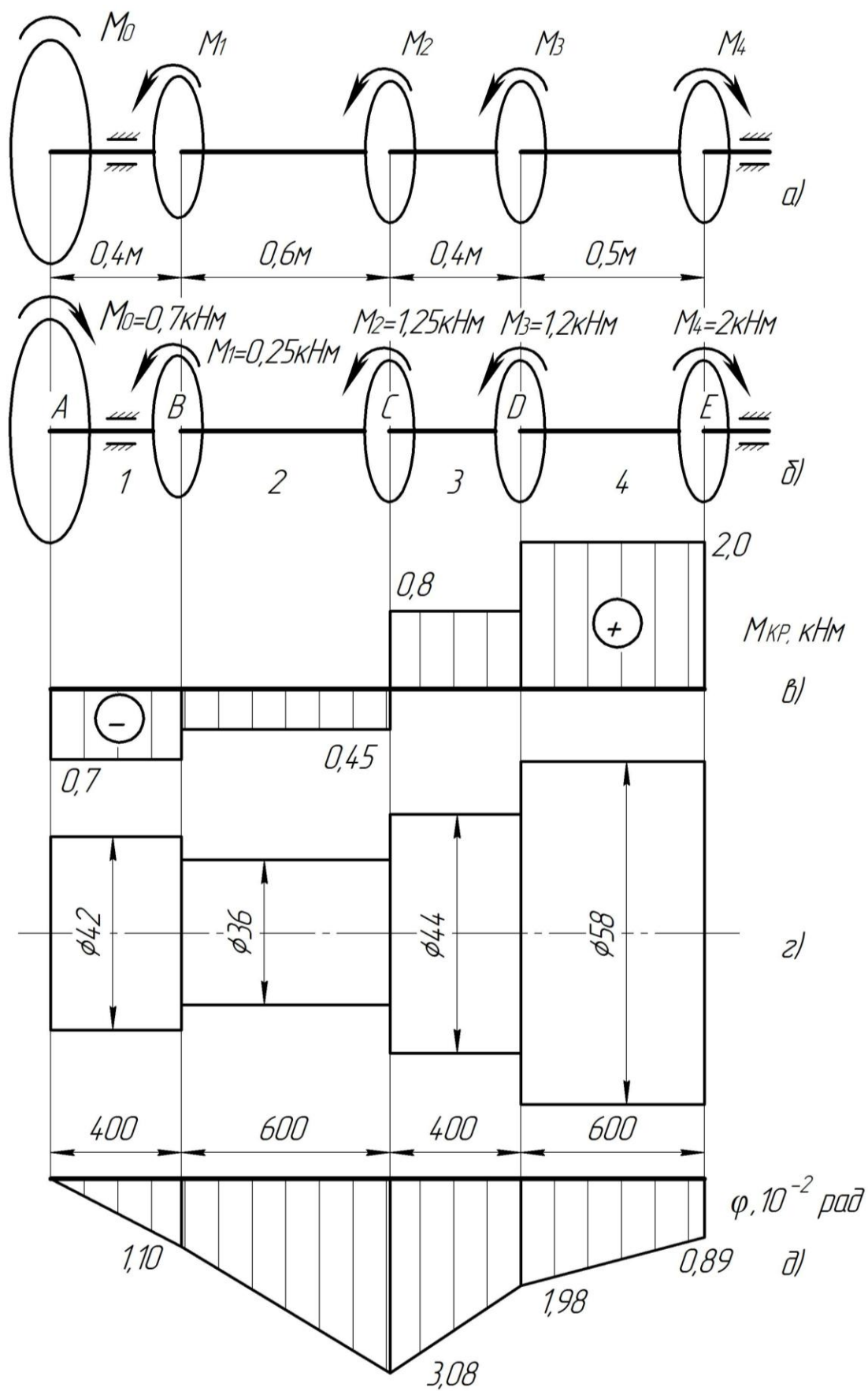


Рисунок 4.4

Визначаємо кути закручування перетинів вала B , C , D , E відносно перетину A

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,10 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,08 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,08 + 1,10) \cdot 10^{-2} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-1,98 + 1,09) \cdot 10^{-2} = -0,89 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Будуємо епюру кутів закручування вала (рис. 4.4д), прийнявши за початок відліку перетин A .

Перевірку на жорсткість вала виконаємо за умовою жорсткості

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де θ_{\max} – максимальний відносний кут закручування вала.

Визначимо відносні кути закручування на кожній ділянці вала за формулою

$$\theta_i = \frac{\varphi_i}{l_i}, \text{ де } i = 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\theta_1 = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{1,09 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо, що

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Отже, умову жорсткості забезпечено.

5. СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Через будь-яку точку деформованого масивного тіла можна провести безліч по-різному орієнтованих січних площин (площадок). Сукупність нормальних і дотичних напружень, які виникають на площадках, що проходять через дану точку, характеризують напружений стан тіла у даній точці.

Нормальні напруження σ вважаємо додатними якщо вони розтягують матеріал елемента. Дотичні напруження – додатні, коли вони утворюють пару сил відносно центра елемента, яка хоче повернути його за годинниковою стрілкою (рис. 5.1).

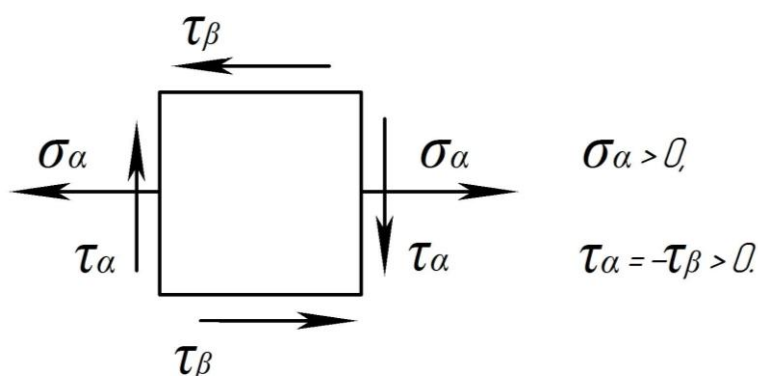


Рисунок 5.1

Дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках рівні між собою, але протилежні за знаком. (Закон парності дотичних напружень).

Через кожну точку тіла можна провести три взаємно-перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Такі площадки називають **головними площадками**, а напруження, що діють на них – **головними напруженнями**. Позначають їх $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, до того ж $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Головні напруження в даній точці масивного тіла досягають екстремальних значень для заданого напруженого стану.

Є три види напруженого стану (рис. 5.2–5.4).

1. Лінійний

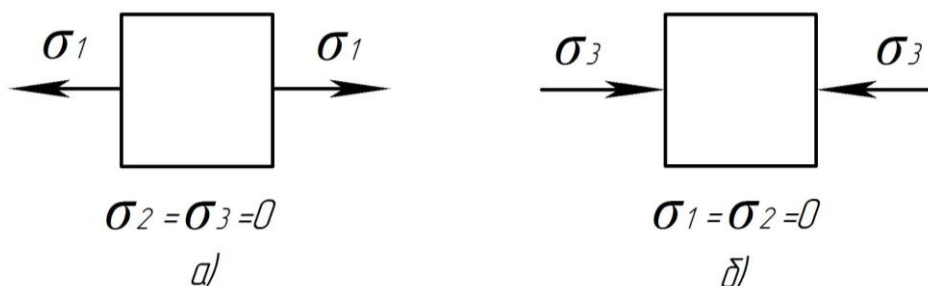


Рисунок 5.2

2. Плоский

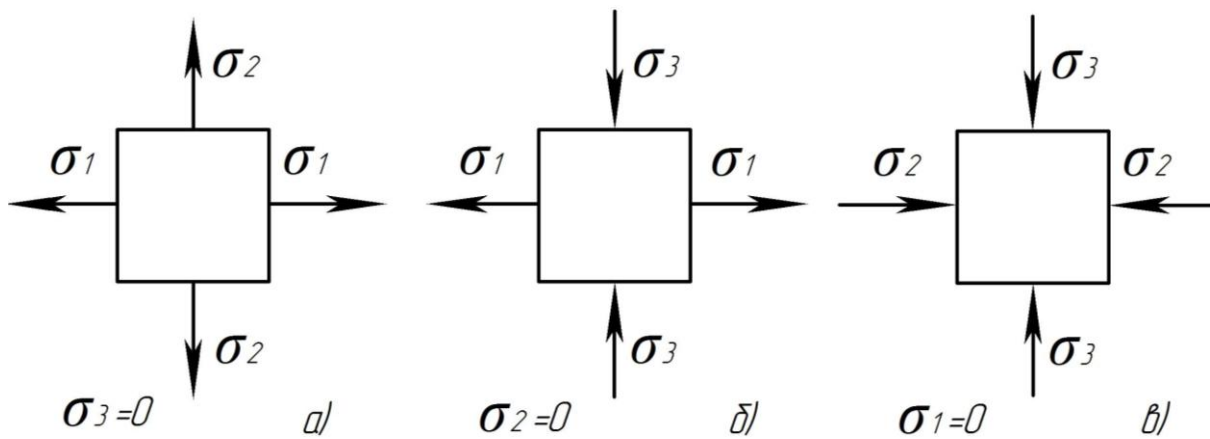


Рисунок 5.3

3. Об'ємний

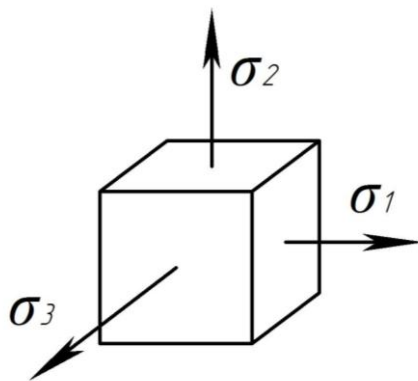


Рисунок 5.4

Надалі розглядаємо лінійний та плоский напружені стани.

Більшість задач складного напруженого стану полягає у визначенні головних напружень за відомими нормальними та дотичними напруженнями на площадках.

Головні напруження – це екстремальні (максимальні і мінімальні) напруження, за якими можна оцінювати міцність матеріалу конструкції.

У загальному випадку, для плоского напруженого стану відомі нормальні σ_α , σ_β та дотичні $\tau_\alpha = -\tau_\beta$ напруження, що діють на взаємно перпендикулярних площадках. Вважаємо, що $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$. Тому розрахункову схему можна прийняти такою, як зображено на рис. 5.5.

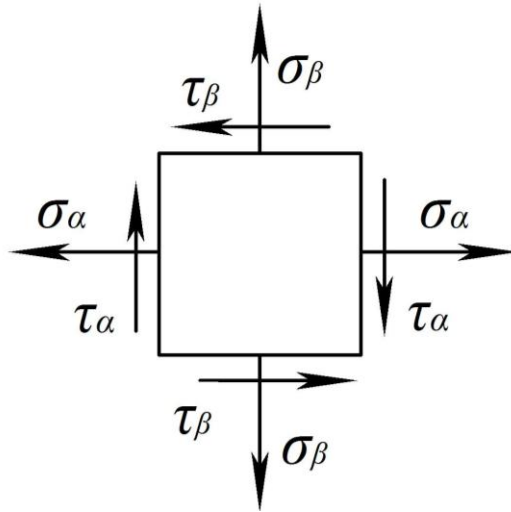


Рисунок 5.5

Величину та напрям головних напружень визначають за формулами

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} \pm \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} \right];$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}},$$

де σ_{\max} – більше головне напруження, $\sigma_{\max} = \sigma_1$ (рис. 5.3а,б),

$\sigma_{\max} = \sigma_2$ (рис. 5.3в);

σ_{\min} – менше головне напруження, $\sigma_{\min} = \sigma_2$ (рис. 5.3а),

$\sigma_{\min} = \sigma_3$ (рис. 5.3б,в);

α – кут, на який необхідно повернути вектор σ_{α} , щоб визначити напрям більшого головного напруження (якщо кут додатній, то повертати потрібно проти ходу стрілки годинника).

Значення головних напружень та їх напрям можна визначити графічно з допомогою кола Мора. Цей метод описаний в прикладі розв'язку задачі №5.

Задача №5

Аналіз напруженого стану

Для заданого елемента (рис. до задачі №5, табл. до задачі №5) визначити: положення головних площадок (графічно й аналітично), величину і напрям головних напружень, лінійні деформації у напрямі всіх головних напружень, відносну зміну об'єму, питому потенціальну енергію деформації. Перевірити елемент на міцність за відповідними для заданих матеріалів теоріями міцності.

План розв'язування задачі:

1. Визначити величини і напрями σ_α , σ_β , τ_α , τ_β (індекси «В» і «Г» на схемі означають «вертикальний» і «горизонтальний», замінити їх на α і β згідно з величиною і знаком σ), зобразити заданий елемент.
2. Визначити графічно величину і напрям головних напружень. В середині заданого елемента зобразити «головний елемент», обмежений головними площадками.
3. Визначити величину τ_{\max} і на тому ж самому рисунку показати положення площадки, на якій діє τ_{\max} .
4. Перевірити отримані результати аналітично.
5. Визначити відносні деформації у напрямках всіх трьох головних напружень.
6. Визначити відносну зміну об'єму і питому потенціальну енергію деформації.
7. Визначити розрахункове напруження за однією з відповідних заданому матеріалу теорій міцності (за вибором студента) і порівняти його з допустимим, приймаючи запас міцності $n_T = 1,5$; $n_M = 2,5$.

Таблиця до задачі №5

№ з/п	$\sigma_B, \text{МН/м}^2$	$\sigma_G, \text{МН/м}^2$	$\tau, \text{МН/м}^2$	Матеріал	
				Чавун	Сталь
1	100	50	10	СЧ12-28	Ст. 1
2	0	60	20	СЧ15-32	Ст. 2
3	20	0	30	СЧ18-36	Ст. 3
4	30	80	40	СЧ21-40	Ст. 4
5	40	90	50	СЧ24-44	Ст. 5
6	50	0	25	СЧ28-48	Ст. 6
7	60	10	15	СЧ32-52	Ст. 1
8	0	20	45	СЧ35-56	Ст. 2
9	80	30	35	СЧ38-60	Ст. 3
0	90	40	10	СЧ18-36	Ст. 4

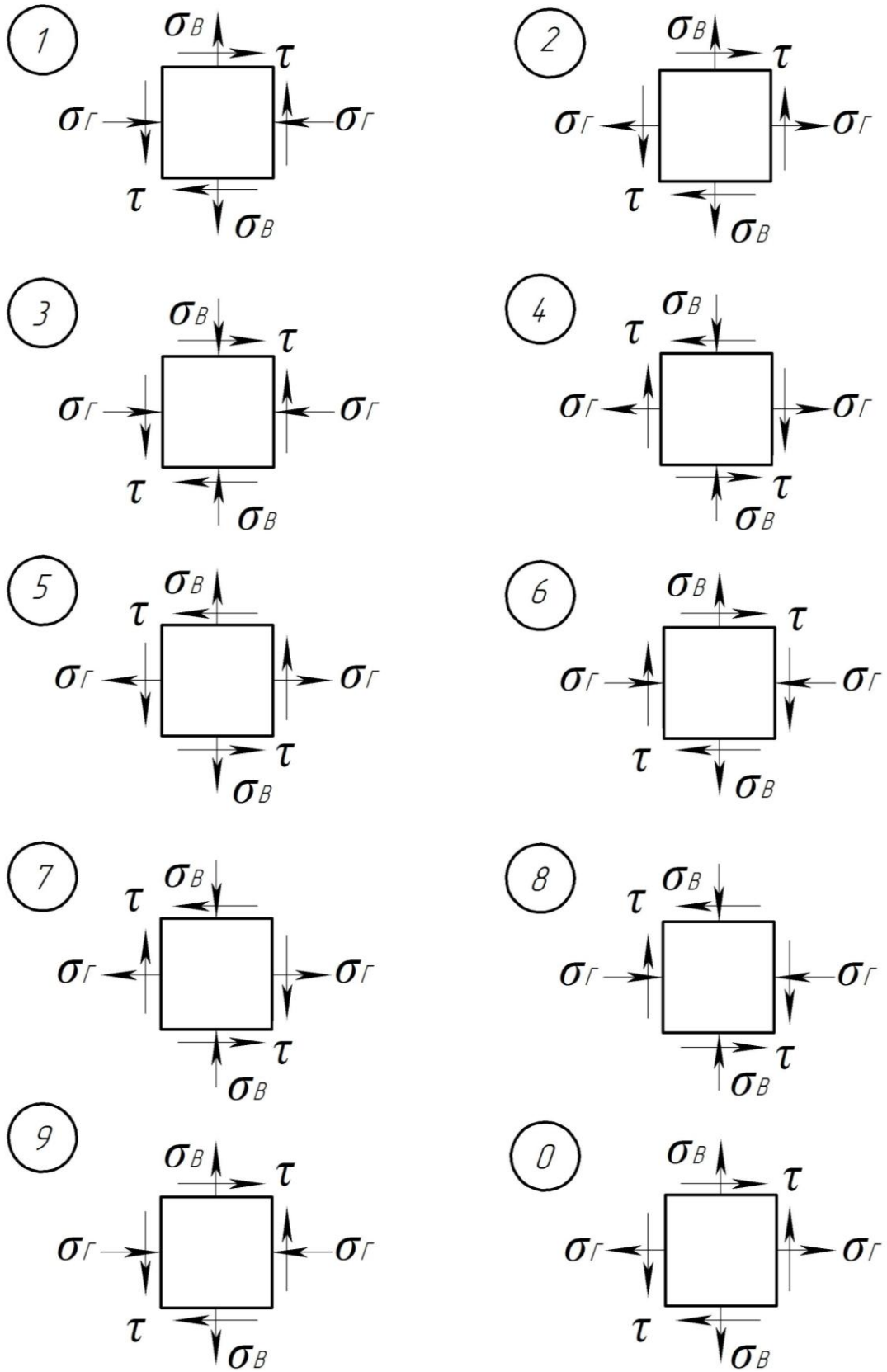


Рисунок до задачі №5

Приклад розв'язування задачі №5 Аналіз плоского напруженого стану

На елемент, зображений на рис. 5.6, діють: $\sigma_B = 0$; $\sigma_G = 60 \text{ МПа}$;
 $\tau = 100 \text{ МПа}$. Необхідно:

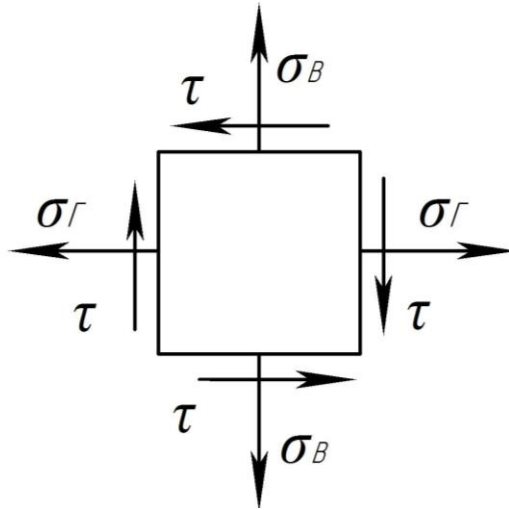


Рисунок 5.6

1. Визначити величини і напрями σ_α , σ_β , τ_α , τ_β (індекси «В» і «Г» на схемі означають «вертикальний» і «горизонтальний», замінити їх на α і β згідно з величиною і знаком σ), зобразити заданий елемент.

2. Визначити графічно величину і напрям головних напружень. В середині заданого елемента зобразити «головний елемент», обмежений головними площадками.

3. Визначити величину τ_{\max} і на тому ж самому рисунку показати положення площадки, на якій діє τ_{\max} .

4. Перевірити отримані результати аналітично.

5. Визначити відносні деформації у напрямках всіх трьох головних напружень.

6. Визначити відносну зміну об'єму і питому потенціальну енергію деформації.

7. Визначити розрахункові напруження за однією з відповідних заданому матеріалу теорій міцності для матеріалів сталь Ст.3 і чавун СЧ18-36. Порівняти їх значення з допустимими напруженнями, прийнявши коефіцієнти запасу міцності $n_T = 1,5$; $n_M = 2,5$.

Розв'язування

Замінімо індекси напружень, що діють на елемент, відповідно до даних та розрахункової схеми (рис. 5.7а)

$$\sigma_\alpha = \sigma_G = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_\beta = \sigma_B = 0; \quad \sigma_\alpha > \sigma_\beta.$$

На площадці α дотичні напруження $\tau_\alpha = 100 \text{ МПа}$. За законом парності дотичних напружень

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = 100 \text{ МПа}.$$

Викреслюємо прямокутну систему координат σ, τ . Вісь σ проводимо паралельно більшому нормальному напруженню σ_α (рис. 5.7б). У цій системі координат визначаємо точки, які відповідають напруженням на площадках α і β – це точки D_α і D_β . Так як ці точки відображають напруження, які діють на двох взаємноперпендикулярних площадках, то відрізок $D_\alpha D_\beta$ є діаметром кола напружень. Точка перетину цього діаметра з віссю σ дає центр кола – точку C . Точки A і B , в яких коло перетинає вісь σ ($\tau = 0$), визначають величини головних нормальних напружень:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = 135 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = \overline{OB} = -75 \text{ МПа}.$$

Напрямок напруження σ_1 визначають вектором BD'_α , $\sigma_\beta = 0$; $\sigma_2 = 0$.

Кут між нормальними напруженнями σ_α і σ_1 становить $\alpha = -37^\circ$. Знак мінус вказує на те, що його відкладають від осі σ за годинниковою стрілкою.

Максимальне дотичне напруження τ_{\max} рівне радіусу кола Мора

$$\tau_{\max} = CT = 105 \text{ МПа}.$$

Кут між напруженням σ_α і більшим головним напруженням визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = -\frac{2 \cdot 100}{60 - 0} = -3,33;$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(3,33) = -37^\circ.$$

Максимальне дотичне напруження рівне

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{135 - (-75)}{2} = 105 \text{ МПа}.$$

Вектори напружень $\sigma_1, \sigma_3, \tau_{\max}$ і площадки, на яких вони діють, зображаємо на рис. 5.7а.

Відносні деформації в напрямі головних напружень для сталюого елемента визначаємо за формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [135 - 0,3 \cdot (-75)] = 78,8 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0,3 \cdot (135 - 75)] = -9,00 \cdot 10^{-5};$$

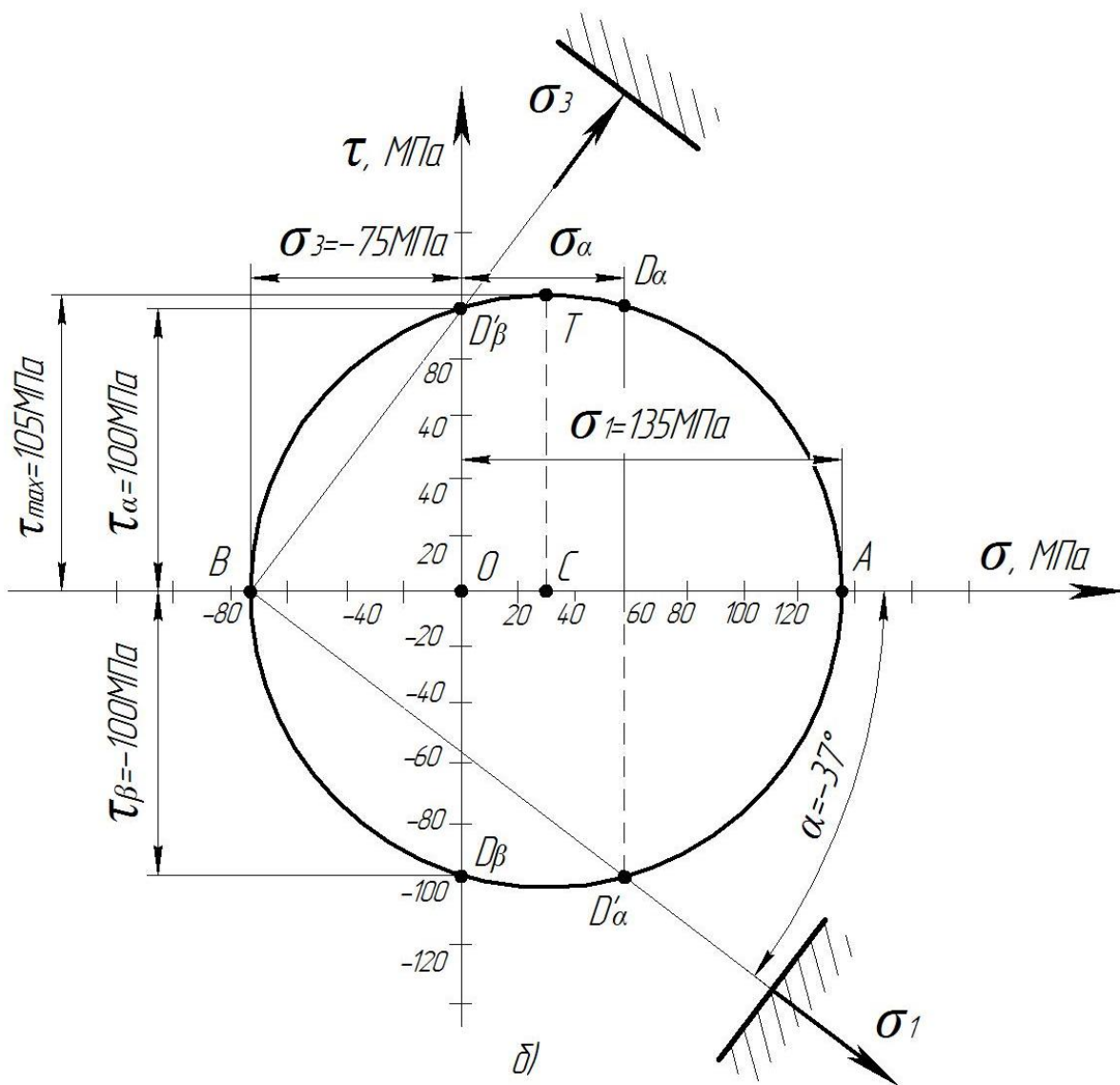
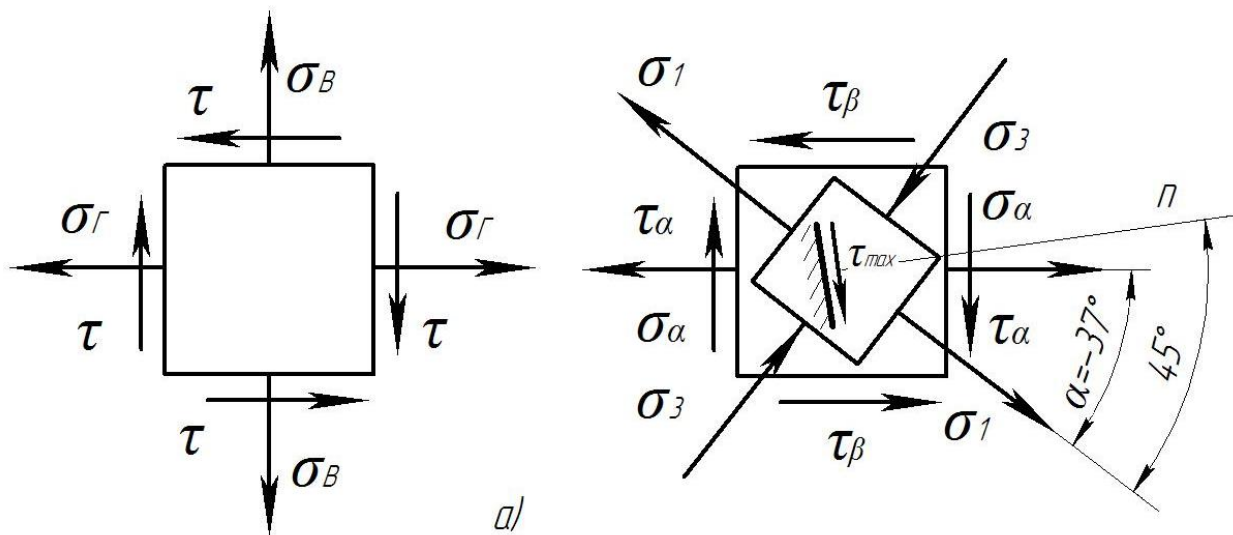


Рисунок 5.7

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-75 - 0,3 \cdot 135] = -57,8 \cdot 10^{-5}.$$

Визначаємо відносну зміну об'єму

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (78,8 - 9,00 - 57,8) \cdot 10^{-5} = 12 \cdot 10^{-5}.$$

Визначаємо питому потенціальну енергію деформації сталюого елемента

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) = \\ = \frac{1}{2}(78,8 \cdot 135 + 0 + 57,8 \cdot 75) \cdot 10^{-5} = 74,9 \cdot 10^{-3} \text{ МНм/м}^3.$$

Визначаємо допустимі напруження:

а) для сталі Ст.3

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{220}{1,5} = 147 \text{ МПа},$$

де σ_T – границя текучості, для сталі Ст.3 $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$;

б) для чавуну СЧ18-36:

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n_M} = \frac{180}{2,5} = 72 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n_M} = \frac{700}{2,5} = 280 \text{ МПа},$$

де σ_{MP} , σ_{MC} – границі міцності на розтяг і стиск для крихкого матеріалу, для СЧ18-36 $\sigma_{MP} = 180 \text{ МПа}$, $\sigma_{MC} = 700 \text{ МПа}$.

Для сталі Ст.3, яка є пластичним матеріалом, перевірку на міцність можна проводити за третьою або четвертою теорією міцності. За третьою теорією міцності

$$\sigma_{P3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 135 - (-75) = 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P3} = 210 \text{ МПа} > [\sigma] = 147 \text{ МПа}.$$

Умову міцності не забезпечено.

Для чавуна СЧ18-36, який є крихким матеріалом, застосовуємо теорію міцності Мора, оскільки досліджуваний напружений стан матеріалу знаходиться між простим розтягом і простим стиском

$$\sigma_P = \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_3 = 135 - 0,257 \cdot (-75) = 154 \text{ МПа};$$

$$\sigma_P = 154 \text{ МПа} > [\sigma]_P = 72 \text{ МПа},$$

де

$$\nu = \frac{[\sigma]_P}{[\sigma]_C} = \frac{72}{280} = 0,257.$$

Умову міцності для чавуну теж не забезпечено.

6. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН

Прямий поперечний згин. Внутрішні силові фактори.

Правило знаків

Згин – це стан опору бруса, в якому відбувається викривлення або зміна кривизни його осі. Брус, що працює на згин, називають *балкою*.

На згин працюють багато конструктивних елементів: осі залізничних вагонів, вали, панелі перекриттів, прольотні споруди мостів, стріли кранів, плоскі ресори автомобілів і т. д.

Плоский, або прямий, згин – це такий випадок згину, при якому викривлення осі балки відбувається у напрямі дії зовнішніх сил та навантажень, тобто в одній площині із зовнішніми силами.

Прямий поперечний згин – це такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникають **поперечна сила Q** та **згинальний момент $M_{зг}$** (рис. 6.1а). Якщо поперечна сила не виникає, то це – **чистий згин** (рис. 6.1б).

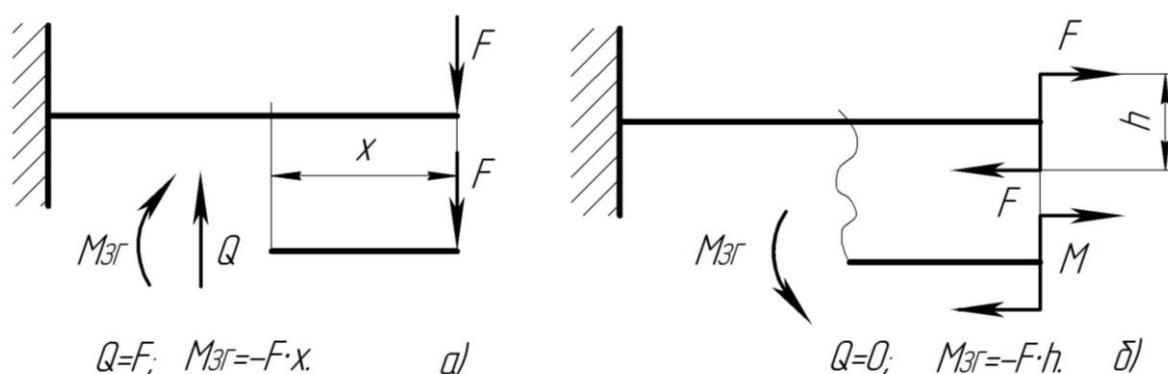


Рисунок 6.1

Поперечна сила у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі проекцій усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину на вісь, перпендикулярну до осі балки, тобто

$$Q = \sum F_{iY}.$$

Згинальний момент у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину відносно центра ваги перетину.

$$M_{зг} = \sum M(F_i).$$

Для балки, яка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Отже, **сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перетину, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перетину.**

Правила знаків статичи непридатні для встановлення знаків поперечної сили Q і згинального моменту $M_{зг}$.

Правило знаків можна зобразити графічно – поперечної сили (рис. 6.2) та згинального моменту (рис. 6.3).

Якщо сума зовнішніх сил, які діють зліва від перетину, дає рівнодійну, направлену вгору, то **поперечну силу** в перетині вважають **додатною**. І навпаки: для частини балки, розміщеної справа від перетину, знаки поперечної сили будуть протилежними (див. рис. 6.2). Або поперечні сили додатні, якщо вони намагаються повернути елемент балки за годинниковою стрілкою.

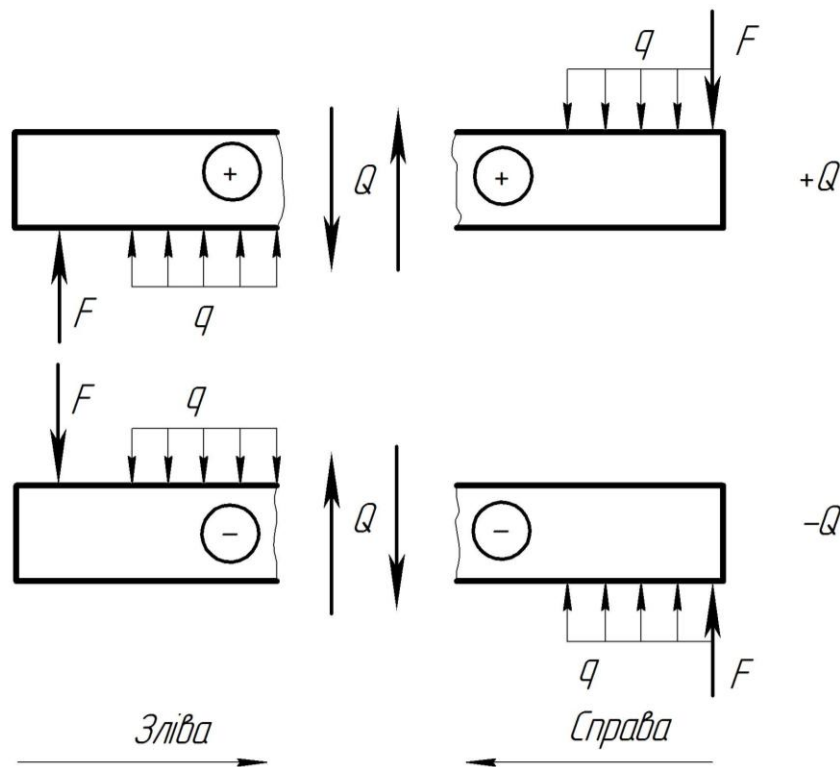


Рисунок 6.2

Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз (розтягуються нижні волокна), то **згинальний момент** у перетині вважають **додатним**, і навпаки (див. рис. 6.3).

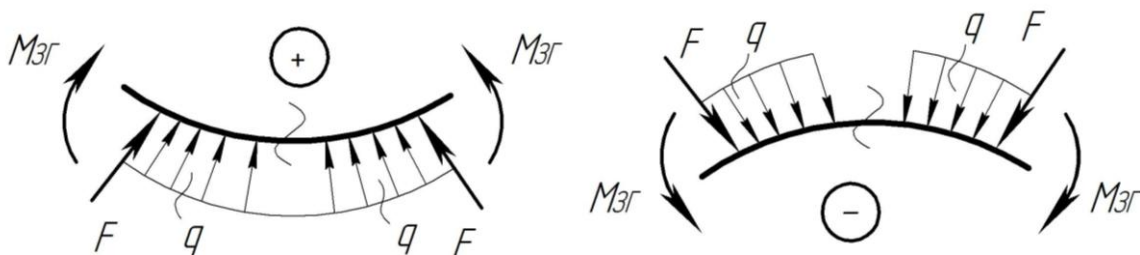


Рисунок 6.3

Користуючись цими правилами, треба уявити мислено **перетин балки жорстко закріпленням**, а в'язі – відкинутими і заміненими реакціями.

Для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статички; для визначення знаків згинального моменту і перерізуючої сили – правилами опору матеріалів.

Усі сили, активні та реактивні, – це навантаження балки.

Спрощене уявлення реальних опорних елементів, тобто схематизація їх, що використовується для побудови розрахункових схем балок у стані плоского згину, дає змогу виділити три основні типи опор: шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома та затиснення (жорстке закріплення). Кожну з них моделюють у вигляді стержнів (рис. 6.4).

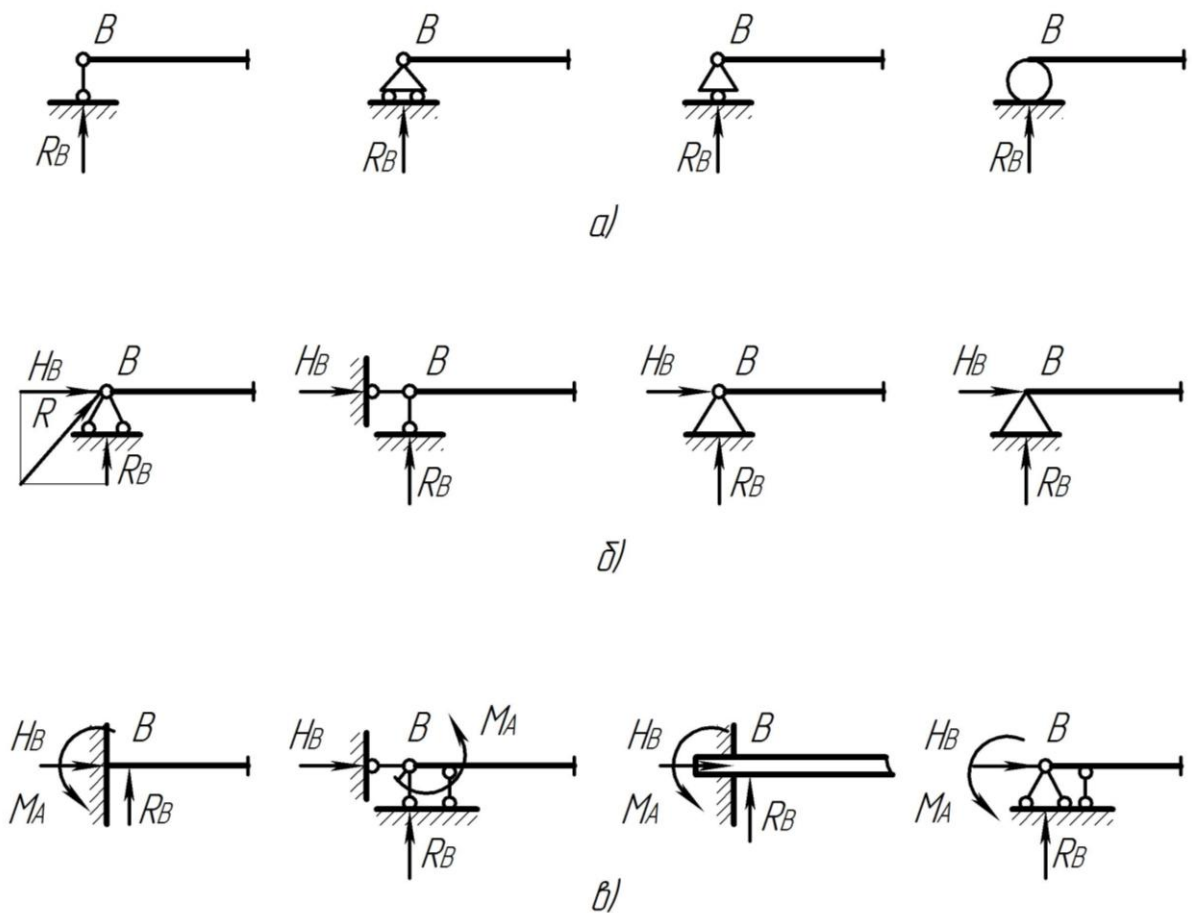


Рисунок 6.4. Схеми опор балок:

а) шарнірно-рухома; б) шарнірно-нерухома; в) жорстке закріплення

Диференціальні залежності при прямому поперечному згині

Між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить **теорема Журавського: поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту за абсцисою перетину балки.**

Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x).$$

Друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перетину балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Епюри поперечних сил та згинальних моментів

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинальних моментів будують епюри, які дають змогу визначити *можливий небезпечний перетин балки*, встановити значення поперечної сили і згинального моменту в цьому перетині. Епюри поперечних сил та згинальних моментів можна будувати двома способами.

Перший спосіб. Записують аналітичні вирази поперечних сил і згинальних моментів для кожної ділянки як функції поточної координати x поперечного перетину

$$Q = f_1(x), \quad M_{зГ} = f_2(x).$$

Потім за отриманими рівняннями будують епюри.

Другий спосіб. Будують епюри за характерними точками і значеннями поперечних сил і згинальних моментів на межах ділянок. Застосовуючи цей спосіб, у більшості випадків можна обійтися без складання рівнянь поперечних сил і згинальних моментів.

Побудову епюр внутрішніх силових факторів при згині покажемо на прикладах.

Приклад 1 (рис. 6.5).

Визначаємо опорні реакції балки (рис. 6.5а)

$$\sum M_C = 0; \quad R_B(a+b) - F \cdot b = 0,$$

звідки $R_B = \frac{F \cdot b}{a+b};$

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_B = R_C(a+b) - F \cdot a = 0,$$

звідки $R_C = \frac{F \cdot a}{a+b}.$

Проводимо перевірку правильності визначення опорних реакцій балки

$$\sum Y = R_B - F + R_C = \frac{F \cdot b}{a+b} - F + \frac{F \cdot a}{a+b} = 0.$$

Опорні реакції балки визначено вірно.

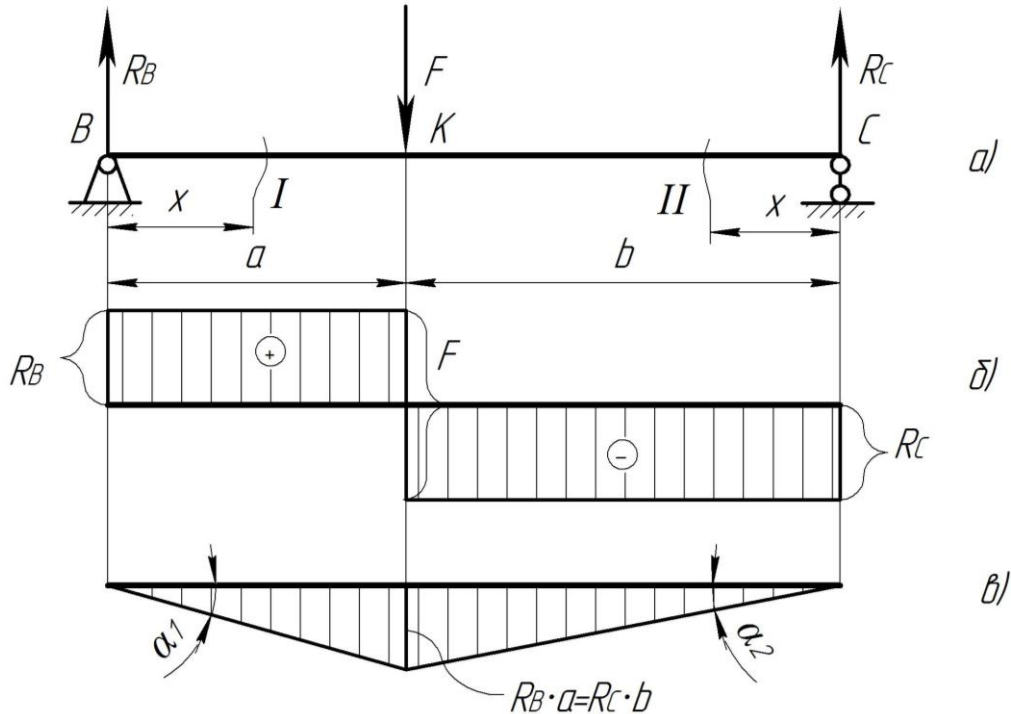


Рисунок 6.5

Використаємо перший спосіб побудови епюр. Розбиваємо балку на ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції $Q(x)$, $M_{3\Gamma}(x)$, а також границі, в яких ці функції справедливі (рис. 6.5а):

ділянка I, $0 \leq x \leq a$ (зліва)

$$Q(x) = R_B = \frac{F \cdot b}{a+b}; \quad Q(0) = Q(a) = \frac{F \cdot b}{a+b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_B \cdot x = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(a) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b};$$

ділянка II, $0 \leq x \leq b$ (справа)

$$Q(x) = -R_C = -\frac{F \cdot a}{a+b}; \quad Q(0) = Q(b) = -\frac{F \cdot a}{a+b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_C \cdot x = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(b) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b}.$$

За отриманими результатами будуємо епюри Q і $M_{3\Gamma}$ (рис. 6.5б,в).

З епюри $M_{3\Gamma}$ (див. рис. 6.5в) визначаємо небезпечний перетин, тобто перетин, в якому діє максимальний згинальний момент, – це перетин K

$$M_{3\Gamma \max} = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b}.$$

Визначаємо значення поперечних сил, використовуючи диференціальні залежності (для перевірки):

- на першій ділянці

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_1 = Q_1 = \frac{M_{3\Gamma \max}}{a} = R_B;$$

- на другій ділянці

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = -\operatorname{tg} \alpha_2 = Q_2 = -\frac{M_{3\Gamma \max}}{b} = -R_C.$$

Приклад 2 (рис. 6.6). Використаємо другий спосіб побудови епюр Q , $M_{3\Gamma}$.

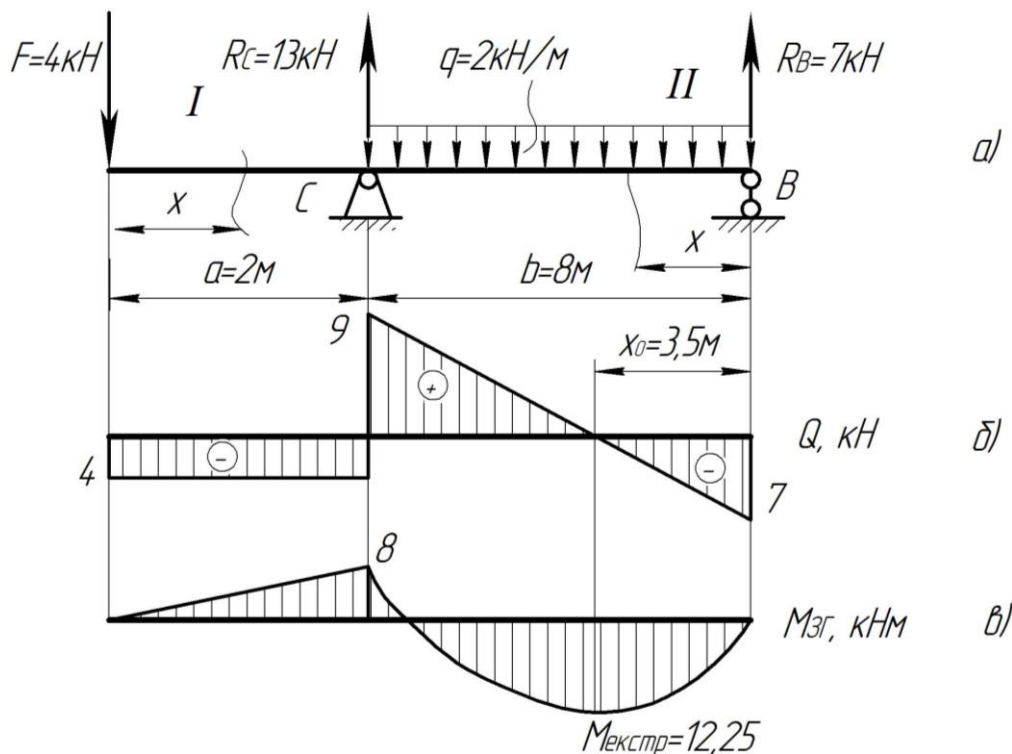


Рисунок 6.6

Аналітично визначимо величину екстремального моменту, у даному випадку – це небезпечний перетин балки.

Координата $x_0 = R_B / q = 7 / 2 = 3,5 \text{ м}$.

$$M_{3\Gamma}(x_0) = R_B \cdot x_0 - q \cdot x_0^2 / 2 = 7 \cdot 3,5 - 2 \cdot 3,5^2 / 2 = 12,25 \text{ кНм}.$$

I. Контроль правильності побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів за розрахунковою схемою балки

Для епюри поперечних сил:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра поперечних сил зображується прямою, нахиленою до осі балки.

2. На ділянці балки, вільній від q , епюра поперечних сил зображується прямою, паралельною осі балки.

3. Під перетином балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі поперечних сил є «стрибок», що дорівнює величині прикладеної сили.

4. У перетині, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), епюра поперечних сил не змінює свого значення.

Для епюри згинальних моментів:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра згинальних моментів зображується квадратичною параболою.

2. На ділянках балки, вільних від q , епюра згинальних моментів зображується прямою лінією, нахиленою до осі балки.

3. Згинальний момент досягає екстремальних значень у перетинах, де поперечні сили дорівнюють нулю.

4. Під перетином балки, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), на епюрі згинальних моментів є «стрибок», що дорівнює величині зосередженого моменту.

5. На ділянках балки, де поперечна сила дорівнює нулю, балка зазнає чистого згину, епюра згинальних моментів – пряма, паралельна осі балки.

II. Перевірка епюри згинальних моментів із використанням диференціальної залежності при згині (за епюрою Q).

Виконують перевірку за епюрою поперечних сил, використовуючи залежність

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = Q(x),$$

враховуючи, що епюра Q – це графічне зображення похідної від згинального моменту $M_{зГ}$:

1. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ зростає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – додатна.

2. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ спадає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – від'ємна.

3. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ досягає екстремального значення у точці, де її похідна $Q(x)$ дорівнює нулю. Функцію у цьому перетині обов'язково необхідно досліджувати на екстремум.

Напруження при згині. Розрахунок на міцність

Руйнівним внутрішнім силовим фактором при прямому поперечному згині є згинальний момент. Від дії згинального моменту у поперечному перетині балки виникають нормальні напруження, які визначають за формулою

$$\sigma = \frac{M_{зГ}}{I_X} \cdot y,$$

де y – відстань (координата) від осі X (нейтральної осі) до точок поперечного перетину, в яких визначають нормальне напруження (рис. 6.7а).

Аналізуючи цю формулу, отримують епюру розподілу нормальних напружень за висотою перетину (рис. 6.7б).

Максимальні нормальні напруження та умова міцності при згині за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{I_X} \cdot y_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

де $M_{зГ.\max}$ – максимальний згинальний момент, визначають з епюри $M_{зГ}$;
 W_X – осьовий момент опору поперечного перетину (див. тему 3).

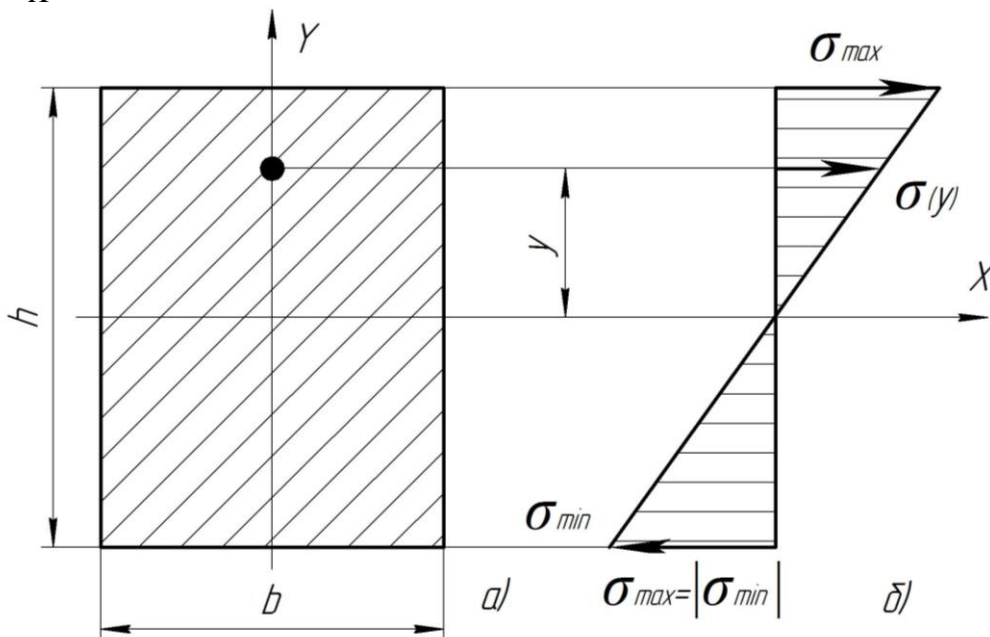


Рисунок 6.7

У поперечних перетинах балки при деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруження в результаті дії поперечної сили Q , які спричиняють деформацію зсуву. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруження виникають і в поздовжніх перетинах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напружень у поздовжніх перетинах при поперечному згині підтверджується появою в дерев'яних балках поздовжніх тріщин.

Значення дотичних напружень визначають за формулою Д.І. Журавського

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot I_X},$$

де τ – дотичне напруження в розглядуваній точці поперечного перетину;

Q_y – абсолютне значення поперечної сили в розглядуваному перетині;

$S_x(y)$ – абсолютне значення статичного момента частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки;

$b(y)$ – ширина перетину балки на рівні, де визначають дотичні напруження;

I_X – момент інерції всього перетину відносно його центральної вісі X .

Абсолютне значення статичного момента частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки визначають за формулою

$$S_x(y) = A_{відс} \cdot y^*,$$

тут $A_{відс}$ – площа відсіченої частини перетину;

y^* – віддалення (координата) центра ваги C_B площі відсіченої частини відносно центральної вісі.

Для поперечного перетину значення Q_y та I_X є сталі величини.

Залежно від форми поперечного перетину бруса ширина $b(y)$ перетину може бути змінною величиною (при наявності форми перетину функція $b(y)$ – відома). На відміну від Q_y та I_X значення статичного момента $S_x(y)$ відсіченої частини перетину має змінну величину, яка залежить від y^* .

Для балки прямокутного поперечного перетину зі сторонами b і h (рис. 6.8а)

- площа частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваного шару волокон mn

$$A_{\text{відс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right);$$

- статичний момент цієї площі (тобто на рівні mn)

$$S_{\text{адце}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Осьовий момент інерції прямокутного поперечного перетину

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

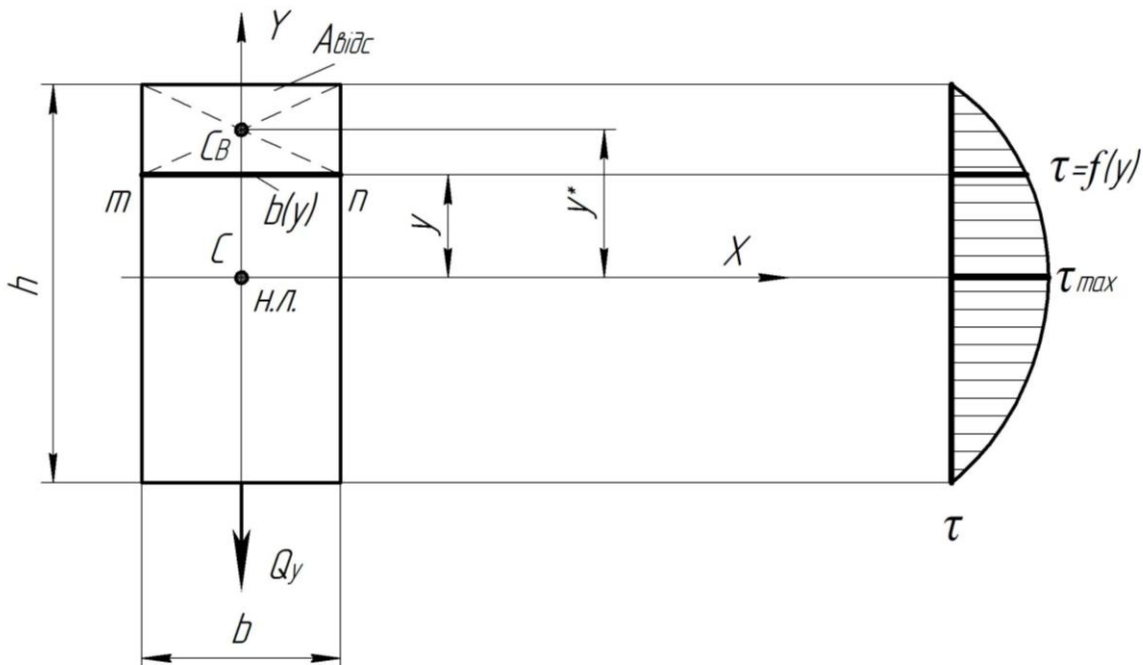


Рисунок 6.8

Визначимо закон розподілу дотичних напружень для балки прямокутного поперечного перетину. Виконаємо це для шару волокон на рівні mn (див. рис. 6.8а)

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{\text{відс}}}{b \cdot I_X} = \frac{Q \cdot (b/2) \cdot (h^2/4 - y^2)}{b \cdot b \cdot h^3/12} = \frac{6Q(h^2/4 - y^2)}{b \cdot h^3};$$

коли $y = \pm h/2$, то $\tau = 0$;

$$\text{коли } y = 0, \text{ то } \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2b \cdot h} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3}{2} \tau,$$

де τ – дотичні напруження зсуву.

Епюра дотичних напружень по висоті прямокутного перетину окреслюється **квадратичною параболою** (рис. 6.8б). Тобто у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруження дорівнюють нулю, а у волокнах нейтрального шару вони досягають максимального значення.

Отже, при згині **дотичні напруження** у балках **відповідають деформації зсуву**, у результаті чого плоскі поперечні перетини при прямому поперечному згині не залишаються плоскими, як при чистому згині, а викривляються.

Більшість балок при згині розраховують тільки за нормальними напруженнями. **За дотичними напруженнями перевіряють три види балок:**

- 1) дерев'яні балки, бо дерево погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки, наприклад, двотаврові, бо максимальні дотичні напруження обернено пропорційні ширині нейтрального шару;
- 3) короткі балки, бо при відносно невеликих згинаючому моменті і нормальних напруженнях у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруження.

Умова міцності при згині за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} \cdot S_X(y)_{\max}}{b(y) \cdot I_X} \leq [\tau],$$

де Q_{\max} – максимальна поперечна сила, визначають з епюри Q ;

$S_X(y)_{\max}$ – максимальний статичний момент площі поперечного перетину;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau] \approx 0,5 [\sigma]$.

Задача №6
Побудова епюр поперечних сил і
згинальних моментів для консольної балки

Для заданої консольної балки (рис. до задачі №6, табл. до задачі № 6) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, якщо $a = 3\text{ м}$.

План розв'язування задачі:

1. Записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках консолі.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Таблиця до задачі №6

№ з/п	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$
1	2	$1,5qa$	$0,5qa^2$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
2	3	qa	qa^2	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
3	6	$0,5qa$	$1,2qa^2$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
4	2	qa	qa^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
5	4	$2qa$	$1,5qa^2$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
6	6	qa	qa^2	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
7	2	$0,5qa$	$1,5qa^2$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
8	5	$1,5qa$	qa^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
9	6	qa	qa^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
0	3	$2qa$	$0,2qa^2$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$

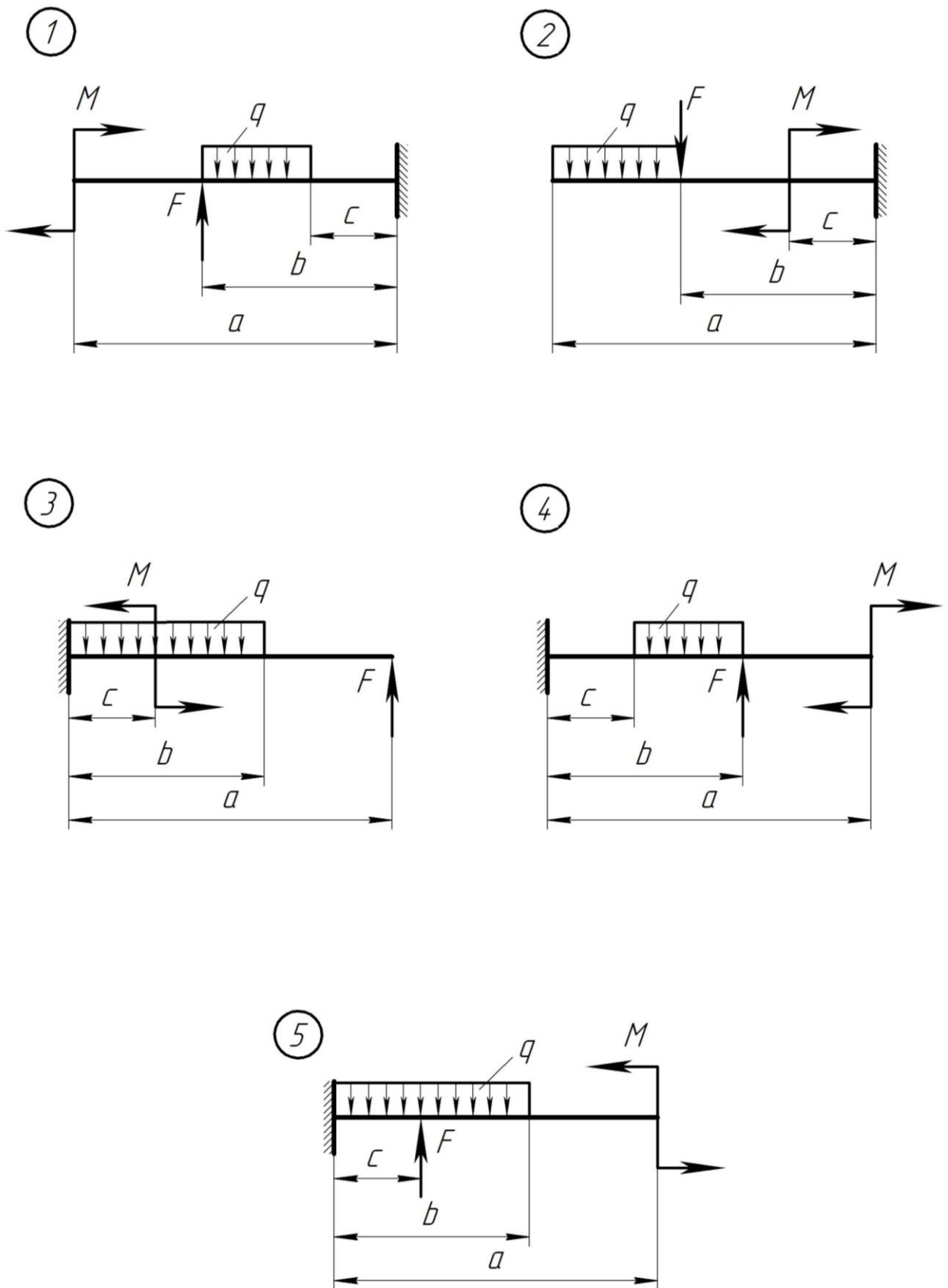
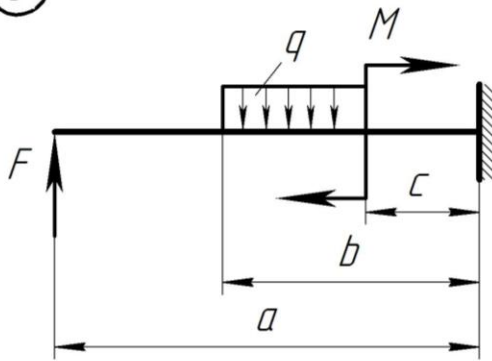
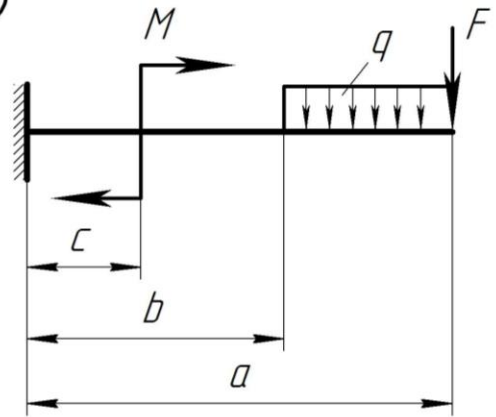


Рисунок до задачі №6

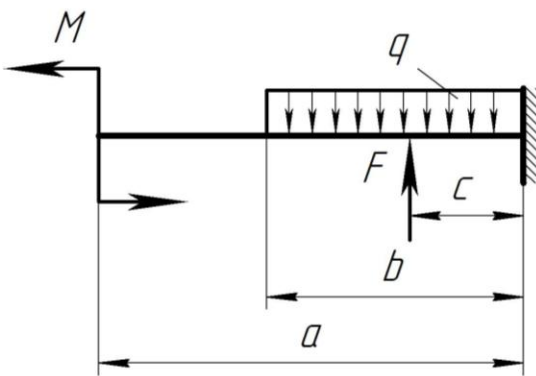
6



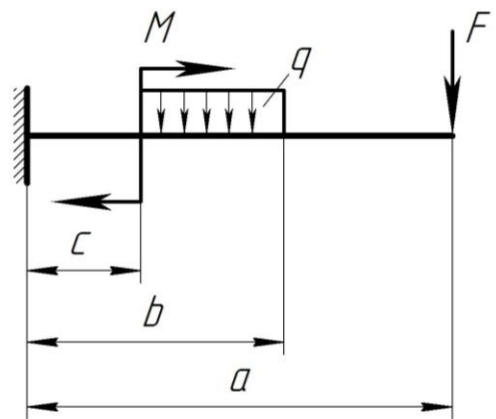
7



8



9



0

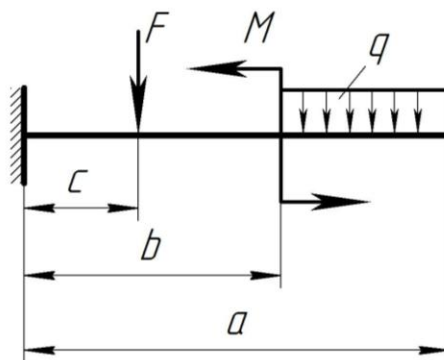


Рисунок до задачі №6 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №6
Побудова епюр поперечних сил і
згинальних моментів для консолі

Для заданої консольної балки (рис. 6.9а) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Розв'язування

Розбиваємо балку на три ділянки. Границями ділянок є перетини, де прикладені зосереджені сили й згинальні моменти, та перетини, де починається і закінчується розподілене навантаження.

При прямому поперечному згині в перетинах виникають такі внутрішні силові фактори – згинальний момент $M_{зГ}(x)$ і поперечна сила $Q(x)$. Для їх визначення використовуємо метод перетинів.

На кожній ділянці балки (для консольної балки розглядаємо ділянки з вільного кінця) робимо умовні перетини, відкидаємо ліву частину балки і розглядаємо рівновагу правої. Сили взаємодії частин балки замінюємо внутрішніми зусиллями $Q(x)$ і $M_{зГ}(x)$ (рис. 6.9б). Визначаємо їх як функції поточної координати x на основі рівнянь рівноваги $\sum Y = 0$; $\sum M_0 = 0$, використовуючи правило знаків.

Визначаємо поперечні сили і згинальні моменти на кожній ділянці консолі:

ділянка I, $0 \leq x \leq 1,3\text{м}$ (справа),

$$Q(x) = -F = -19\text{кН};$$

$$M(x) = F \cdot x;$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(1,3) = 19 \cdot 1,3 = 24,7\text{кНм};$$

ділянка II, $1,3\text{м} \leq x \leq 3,2\text{м}$ (справа),

$$Q(x) = -F + q \cdot (x - 1,3);$$

$$Q(1,3) = -19\text{кН};$$

$$Q(3,2) = -19 + 13 \cdot (3,2 - 1,3) = 5,7\text{кН};$$

$$M(x) = F \cdot x - q \cdot \frac{(x - 1,3)^2}{2};$$

$$M(1,3) = 19 \cdot 1,3 = 24,7\text{кНм};$$

$$M(3,2) = 19 \cdot 3,2 - 13 \cdot \frac{(3,2 - 1,3)^2}{2} = 37,3 \text{кНм}.$$

Досліджуємо функцію $M(x)$ на екстремум

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = F - q \cdot (x - 1,3) = 0;$$

$$x = \frac{F + 1,3 \cdot q}{q} = \frac{19 + 1,3 \cdot 13}{13} = 2,76 \text{м};$$

тоді

$$M(2,76) = M_{3Г \max} = 19 \cdot 2,76 - 13 \cdot \frac{(2,76 - 1,3)^2}{2} = 38,6 \text{кНм}.$$

Зазначимо, що необхідною умовою екстремума функції $M(x)$ на ділянці є нульове значення на цій ділянці $Q(x)$.

Ділянка III, $3,2 \text{м} \leq x \leq 4,8 \text{м}$ (справа),

$$Q(x) = -F + q \cdot (x - 1,3);$$

$$Q(3,2) = -19 + 13 \cdot (3,2 - 1,3) = 5,7 \text{кН};$$

$$Q(4,8) = -19 + 13 \cdot (4,8 - 1,3) = 26,5 \text{кН};$$

$$M(x) = F \cdot x - q \cdot \frac{(x - 1,3)^2}{2} - M;$$

$$M(3,2) = 19 \cdot 3,2 - 13 \cdot \frac{(3,2 - 1,3)^2}{2} - 16 = 21,3 \text{кНм};$$

$$M(4,8) = 19 \cdot 4,8 - 13 \cdot \frac{(4,8 - 1,3)^2}{2} - 16 = -4,43 \text{кНм}.$$

За отриманими результатами будуюмо епюри Q і $M_{3Г}$ (рис. 6.9в,г). Епюру згинальних моментів будуюмо зі сторони розтягнутих волокон, тобто додатні значення згинальних моментів відкладаємо вниз від осі, а від'ємні – вверху.

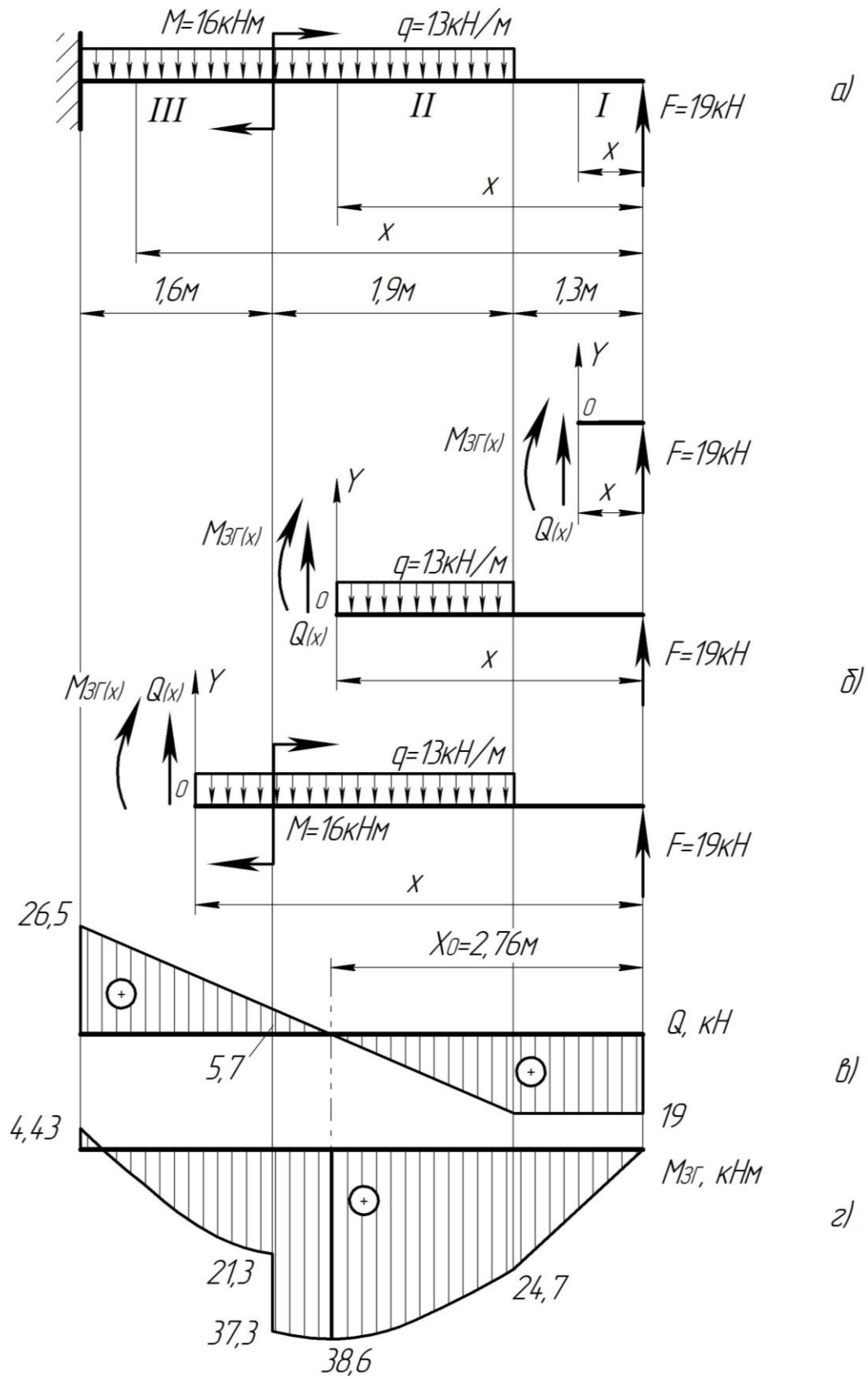


Рисунок 6.9

Задача №7
Побудова епюр поперечних сил і
згинальних моментів для балки на двох опорах

Для заданої балки (рис. до задачі №7, табл. до задачі № 7) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

План розв'язування задачі:

1. Визначити опорні реакції, записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках балки.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Таблиця до задачі №7

№ з/п	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$	№ з/п	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$
1	4	6	8	3	6	3	3	7	3
2	5	7	9	2	7	2	2	4	5
3	3	3	5	4	8	3	4	5	4
4	2	4	6	5	9	5	8	7	3
5	3	5	4	4	0	4	9	8	2

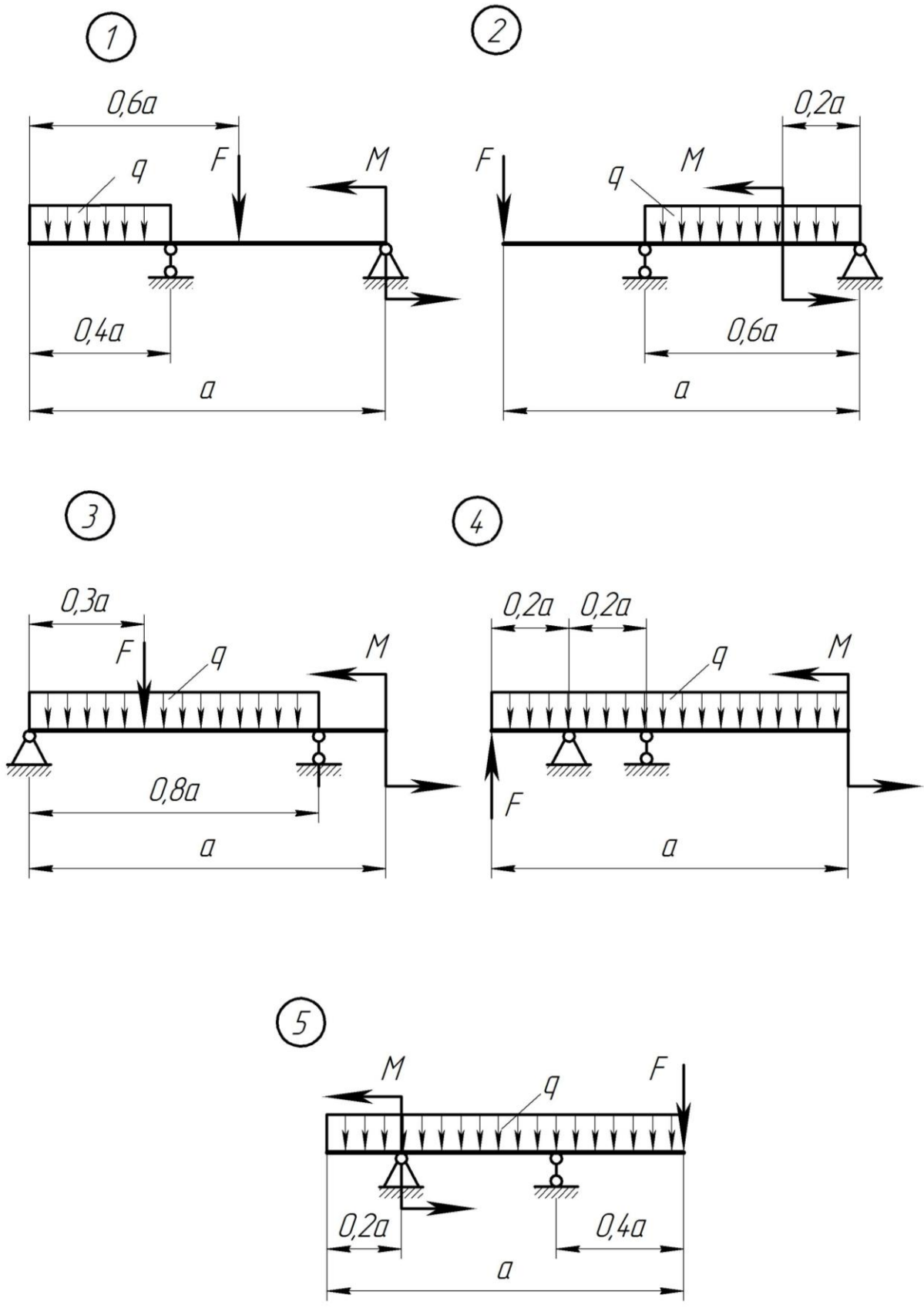
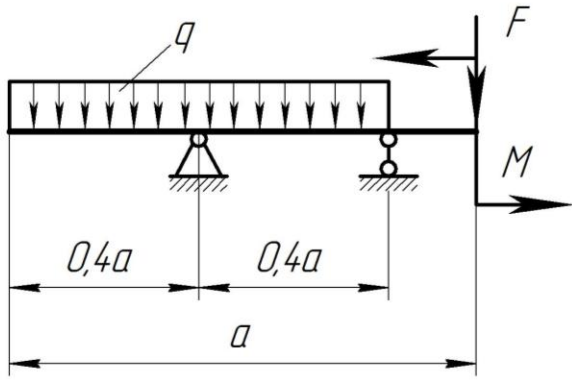
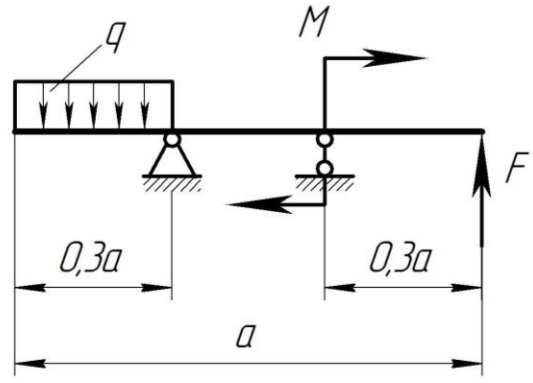


Рисунок до задачі №7

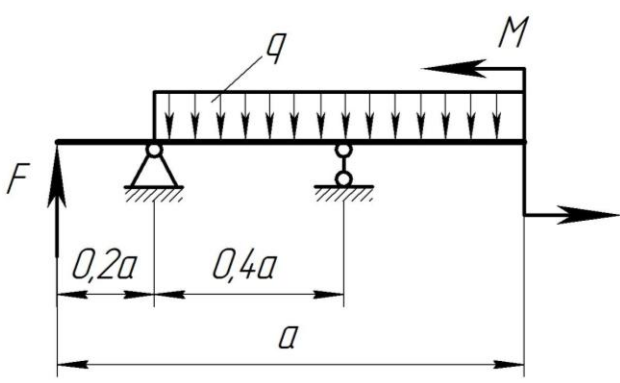
6



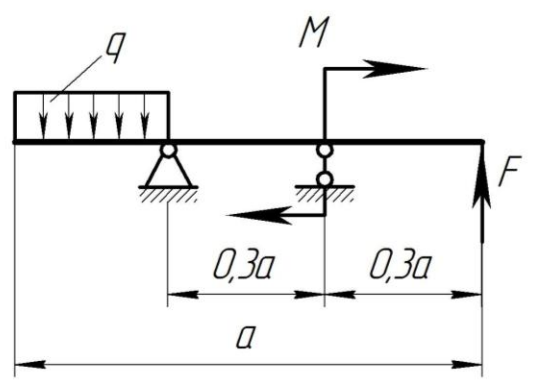
7



8



9



0

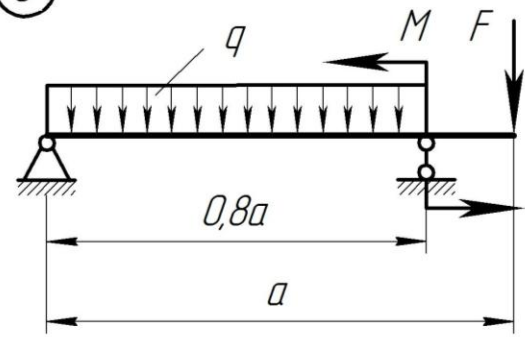


Рисунок до задачі №7 (закінчення)

Задача №8

Розрахунок на міцність при згині балок

Для заданої балки (рис. до задачі №8, табл. до задачі №8) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, підібрати двотавровий, круглий і прямокутний перетини (поклавши для прямокутного перетину відношення висоти до ширини $h/b = 2$) і порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю. Для двотаврової балки провести перевірку міцності за дотичними напруженнями і повну перевірку за головними напруженнями. Матеріал балок – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

План розв'язування задачі:

1. Визначити опорні реакції, записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках балки.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити перетин, в якому діє максимальний згинальний момент і максимальна поперечна сила.
3. Підібрати розміри перетинів (двотаврового, круглого, прямокутного) з умови міцності за нормальними напруженнями.
4. Порівняти вагу балок, прийнявши вагу двотаврової балки за 100%.
5. Перевірити міцність вибраної двотаврової балки за дотичними напруженнями.
6. Визначити перетин, в якому виникають найбільші головні напруження. Провести повну перевірку міцності двотаврової балки у небезпечній точці цього перетину.

Таблиця до задачі №8

№ з/п	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$	№ з/п	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$
1	2	3	9	8	6	2	3,5	5,5	10
2	3	4	5	7	7	3	4,5	7,5	8
3	4	5	8	9	8	2	2,5	4,5	9
4	1	2	4	10	9	5	6,5	9,5	8
5	4	6	7	7	0	4	5,5	8,5	6

Задача №9

Розрахунок на міцність і визначення переміщень при згині балок

Для заданої балки (див. рис. до задачі №8, табл. до задачі №8) підібрати двотавровий перетин. Визначити прогин балки у перетині А методом початкових параметрів. Отриманий результат перевірити методом Мора.

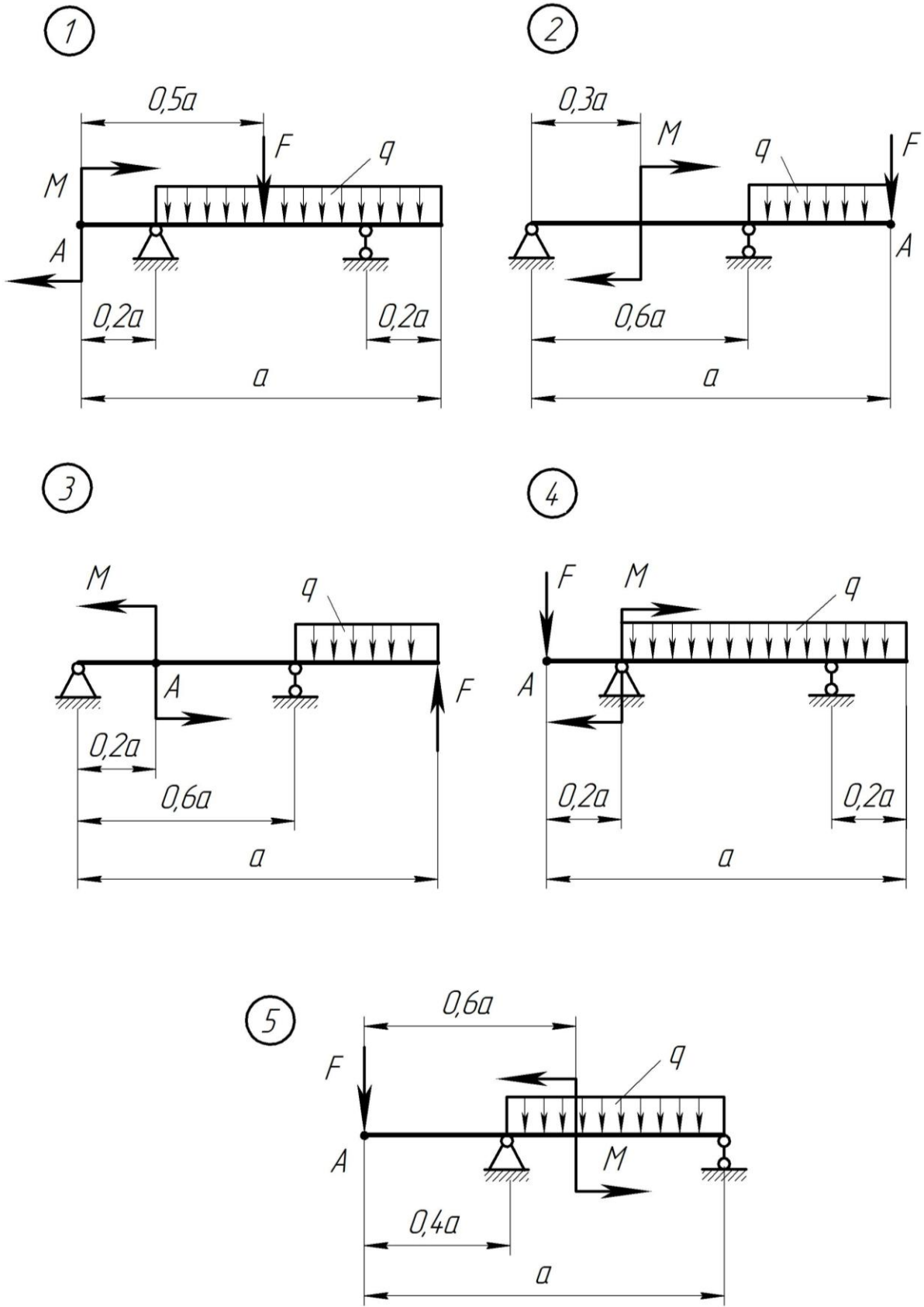


Рисунок до задачі №8

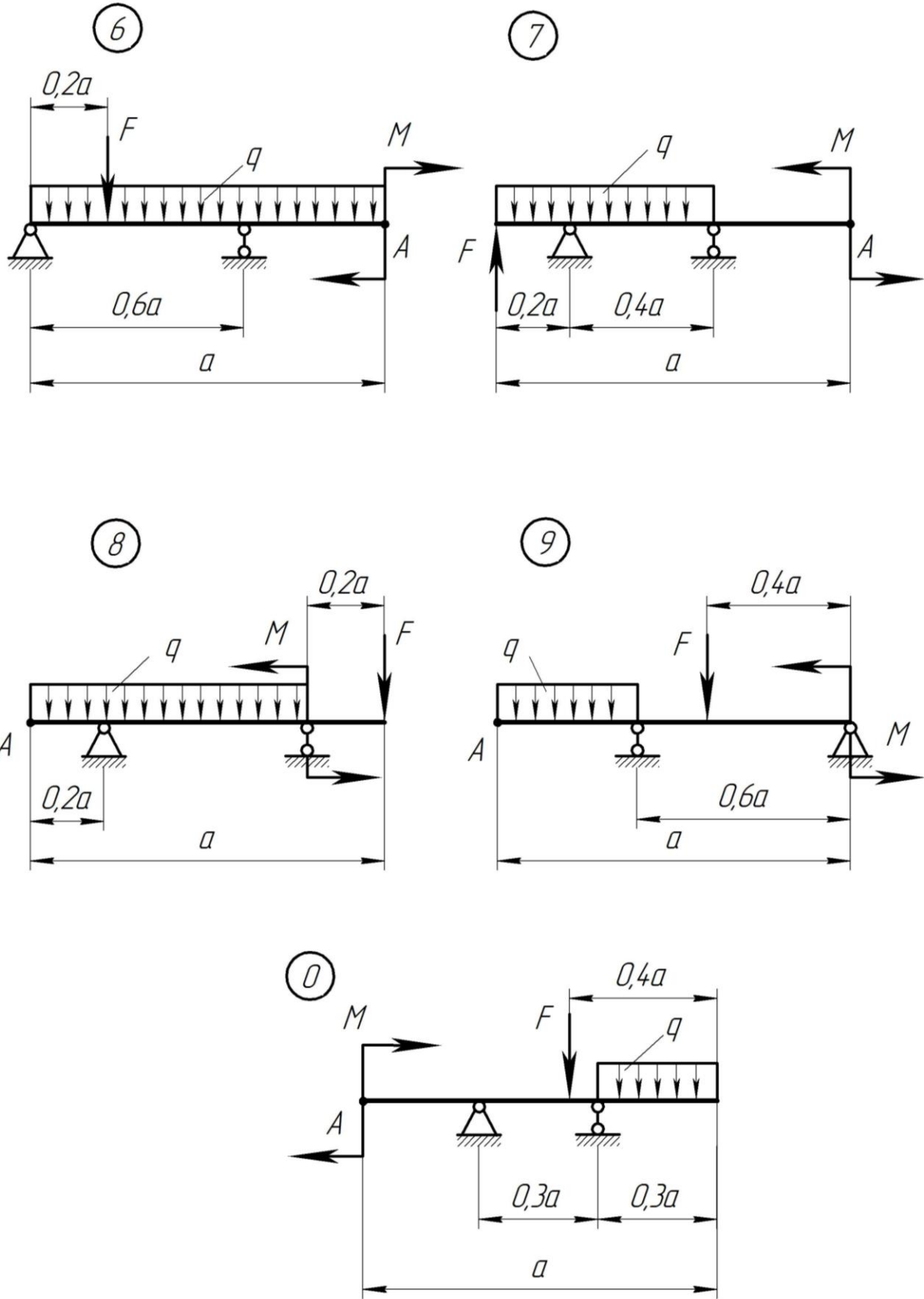


Рисунок до задачі №8 (закінчення)

Приклад розв'язування задач №7 і 8

Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах. Розрахунок балки на міцність

Для заданої сталюї балки (рис. 6.10а) необхідно побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів; з умови міцності за нормальними напруженнями підібрати двотавровий, круглий і прямокутний ($h/b = 2$) перетини балок та порівняти їх вагу. Для двотаврової балки провести повну перевірку міцності та перевірку міцності за дотичними напруженнями. Матеріал балки – сталь 45; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язування

Використовуючи рівняння статичної рівноваги для заданої схеми балки (рис. 6.10б) визначаємо вертикальні складові сил реакцій:

$$\sum M_B = 0; \quad -M + A_Y \cdot 1,5 + q \cdot 1,5 \cdot 0,75 - F \cdot 2,0 = 0;$$

$$A_Y = \frac{16 - 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 2,0}{1,5} = 15,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 + B_Y \cdot 1,5 - F \cdot 3,5 = 0;$$

$$B_Y = \frac{16 + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 3,5}{1,5} = 60,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = -A_Y - q \cdot 1,5 + B_Y - F = -15,7 - 20 \cdot 1,5 + 60,7 - 15 = 0.$$

Висновок – опорні реакції визначені правильно.

Розбиваємо балку на три ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M_{зГ}(x)$:

ділянка I, $0 \leq x \leq 1,6 \text{ м}$ (зліва),

$$Q(x) = 0; \quad M_{зГ}(x) = M;$$

$$M_{зГ}(0) = M_{зГ}(1,6) = 16 \text{ кНм}.$$

ділянка II, $1,6 \text{ м} \leq x \leq 3,1 \text{ м}$ (зліва),

$$Q(x) = -A_Y - q \cdot (x - 1,6);$$

$$Q(1,6) = -15,7 \text{ кН};$$

$$Q(3,1) = -15,7 - 20 \cdot (3,1 - 1,6) = -47,5 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = M - A_Y \cdot (x - 1,6) - q \cdot \frac{(x - 1,6)^2}{2};$$

$$M_{3\Gamma}(1,6) = 16 \text{ кНм};$$

$$M_{3\Gamma}(3,1) = 16 - 15,7 \cdot (3,1 - 1,6) - 10 \cdot (3,1 - 1,6)^2 = -30 \text{ кНм};$$

ділянка III, $0 \leq x \leq 2,0 \text{ м}$ (справа),

$$Q(x) = F = 15 \text{ кН}; \quad Q(0) = Q(2,0) = 15 \text{ кНм};$$

$$M(x) = -F \cdot x; \quad M(0) = 0; \quad M(2,0) = -15 \cdot 2,0 = -30 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри Q і $M_{3\Gamma}$ (рис. 6.10в,г).

З умови міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \max}}{W_0} \leq [\sigma],$$

визначаємо необхідний осьовий момент опору перетину

$$W_0 \geq \frac{M_{3\Gamma \max}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 188 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

де $M_{3\Gamma \max} = 30 \text{ кНм}$ – максимальний згинальний момент, що діє на балку.

Для заданої балки підбираємо вказані поперечні перетини:

а) двотавровий №20а (ГОСТ 8239-56)

$$W_{\text{дв}} = 203 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad A_{\text{дв}} = 28,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

б) прямокутний

$$W_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{3 \cdot 188 \cdot 10^{-6} / 2} = 65,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $b = 70 \text{ мм}$, тоді $h = 2 \cdot 70 = 140 \text{ мм}$,

відповідно $A_{\text{пр}} = b \cdot h = 70 \cdot 140 \cdot 10^{-6} = 98 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

в) круглий

$$W_{\text{кр}} = \pi \cdot d^3 / 32;$$

$$d \geq \sqrt[3]{32 \cdot 188 \cdot 10^{-6} / 3,14} = 124 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $d = 125 \text{ мм}$, тоді

$$A_{\text{кр}} = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 125^2 \cdot 10^{-6} / 4 = 123 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

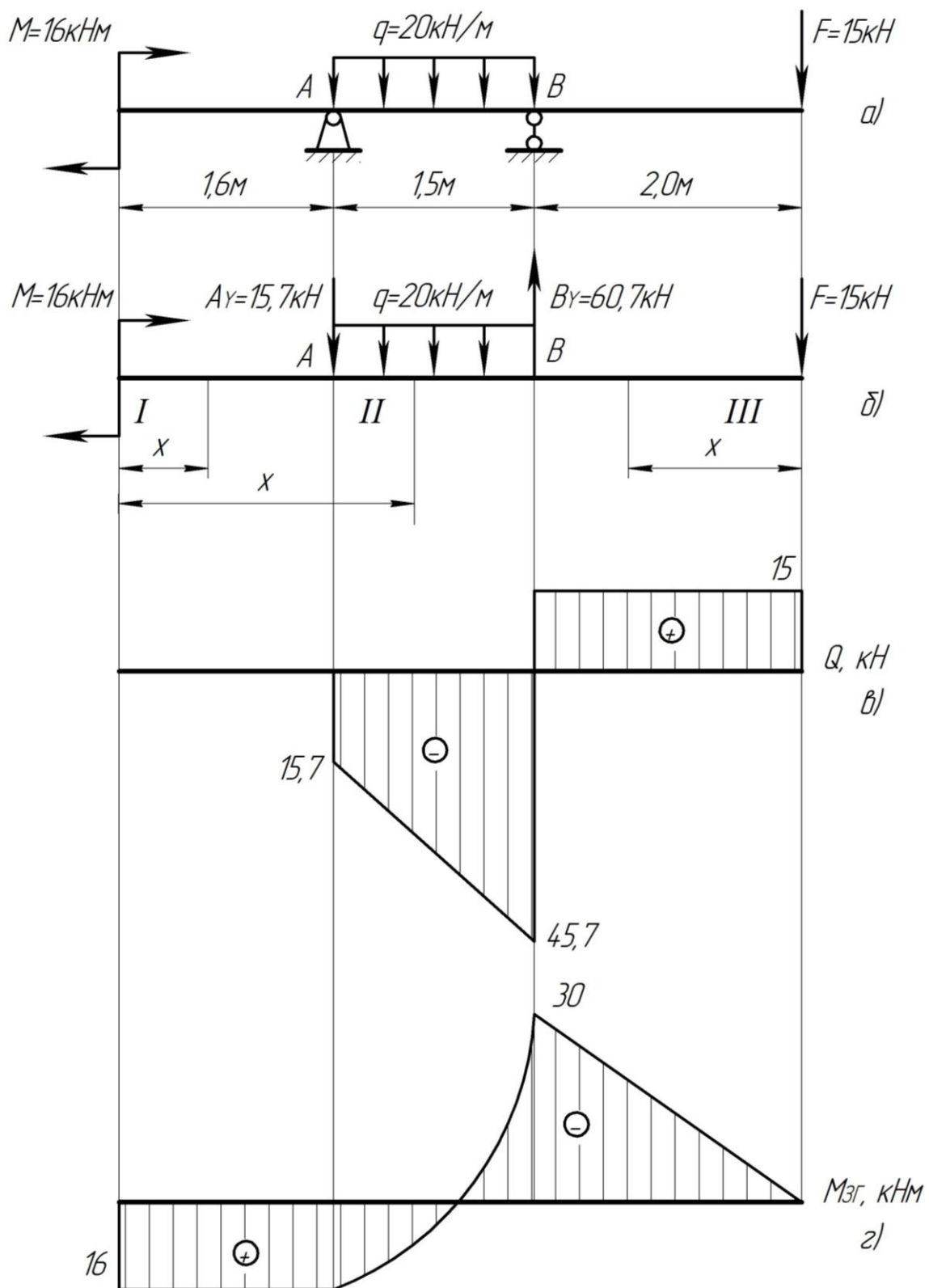


Рисунок 6.10

Порівняємо вагу балок

$$Q_{дв} : Q_{пр} : Q_{кр} = A_{дв} : A_{пр} : A_{кр} = 28,9 : 98 : 123 = 1 : 3,39 : 4,26.$$

Проводимо перевірку міцності двотаврової балки.

Враховуючи те, що розміри поперечного перетину двотаврової балки були визначені лише з умови міцності за нормальними напруженнями, то необхідно провести перевірку міцності балки за дотичними та головними напруженнями.

З таблиць сортаменту для двотавра №20а за ГОСТ 8239-72 виписуємо необхідні для розрахунку дані:

$$h_{дв} = 200\text{мм}; \quad b_{дв} = 110\text{мм}; \quad d_{дв} = 5,2\text{мм}; \quad t_{дв} = 8,6\text{мм};$$

$$I_X = 2030\text{см}^4; \quad S_X = 114\text{см}^3.$$

Викреслюємо спрощений перетин двотавра (рис. 6.11а).

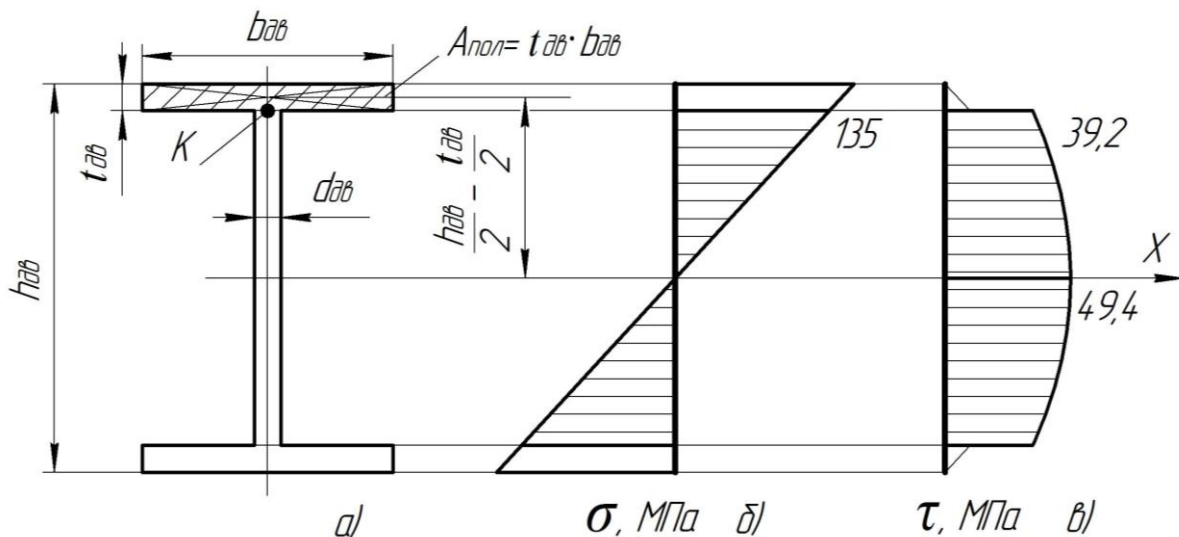


Рисунок 6.11

Небезпечний перетин при перевірці на міцність за дотичним напруженням – перетин, у якому поперечна сила має максимальне значення $Q_{\max} = 45,7\text{кН}$ (перетин у точці В (див. рис. 6.10в)).

Найбільші дотичні напруження виникають у точках перетину, що співпадають з нейтральною віссю (вісь X, див. рис. 6.11).

Умова міцності за дотичним напруженням

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_X}{d_{дв} \cdot I_X} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau] \approx 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80\text{МПа}$.

Після підстановки значень, отримаємо

$$\tau_{\max} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 49,4 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Небезпечний перетин при перевірці за головними напруженнями – перетин, у якому згинальний момент і поперечна сила набувають максимальних значень або близькі до них (перетин у точці *B*, $M_{3\Gamma \max} = 30 \text{ кНм}$, $Q_{\max} = 45,7 \text{ кН}$, див. рис. 6.10в,г).

Визначаємо нормальне і дотичне напруження в небезпечному перетині двотаврової балки (точка *K*, рис. 6.11а):

$$\sigma = \frac{M_{3\Gamma \max}}{I_X} \cdot \left(\frac{h_{\partial\partial}}{2} - t_{\partial\partial} \right) = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2030 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{200}{2} - 8,6 \right) \cdot 10^{-3} = 135 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{X_{\text{пол}}}}{d_{\partial\partial} \cdot I_X} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 90,5 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 39,2 \text{ МПа},$$

де $S_{X_{\text{пол}}}$ – статичний момент площі перетину полицки двотавра відносно осі *X*, визначаємо за формулою

$$S_{X_{\text{пол}}} = A_{\text{пол}} \cdot \left(\frac{h_{\partial\partial}}{2} - \frac{t_{\partial\partial}}{2} \right) = \frac{b_{\partial\partial} \cdot t_{\partial\partial} \cdot (h_{\partial\partial} - t_{\partial\partial})}{2}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$S_{X_{\text{пол}}} = \frac{110 \cdot 8,6 \cdot (200 - 8,6) \cdot 10^{-9}}{2} = 90,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Тут $A_{\text{пол}}$ – площа полицки двотавра, $A_{\text{пол}} = t_{\partial\partial} \cdot b_{\partial\partial}$.

Будуємо епюри нормальних і дотичних напружень для двотаврового перетину (рис. 6.11а,б,в).

Визначаємо розрахункове напруження за третьою теорією міцності та проводимо перевірку на міцність матеріалу за головним напруженням:

$$\sigma_{P3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{135^2 + 4 \cdot 39,2^2} = 156 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P3} = 156 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Отже, міцність балки за головним і дотичним напруженнями забезпечена.

7. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ЗГИНІ

Стержні, які зазнають деформації згину, повинні мати не тільки відповідну міцність, але й достатню жорсткість. Під дією зовнішніх навантажень переміщення їх перетинів не повинні перевищувати встановлених нормами допустимих значень.

Для виконання розрахунку на жорсткість на практиці необхідно вміти обчислювати відповідні переміщення перетинів. Розглянемо переміщення перетинів при згині консольної балки (рис. 7.1).

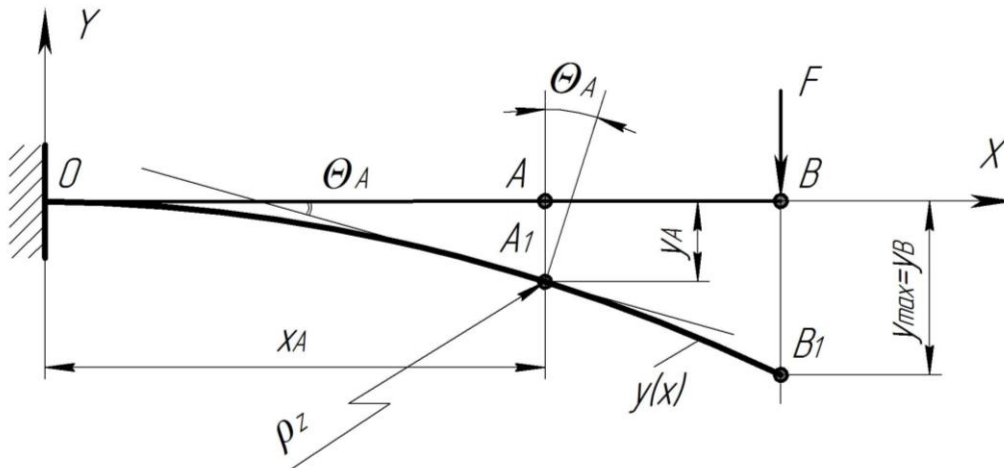


Рисунок 7.1

На рис. 7.1. використані позначення: OB – недеформована вісь балки; OB_1 – зігнута вісь балки; Θ_A – кутове переміщення перетину A ; y_A – лінійне переміщення перетину; ρ_Z – кривизна вісі балки.

При плоскому поперечному згині **зігнута вісь** балки лежить у силевій площині і збігається з головною площиною. Викривлену вісь балки називають **зігнутою віссю** або **пружною лінією**.

Положення поперечного перетину балки при згині визначається двома переміщеннями (рис. 7.1):

1. **Лінійне переміщення** $y_A = y(x_A)$ **центра ваги перетину в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки, яке називають прогином.**

2. **Кутове переміщення** $\Theta_A = \Theta(x_A)$ – **це кут повороту перетину навколо нейтральної вісі перетину відносно його початкового положення.**

Вважають, що довжина зігнутої поздовжньої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні балки не змінюється.

Прогини і кути поворотів балки зв'язані диференціальною залежністю

$$\Theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x). \quad (7.1)$$

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Між кривизною $1/\rho$ зігнутої осі балки (пружної лінії), згинальним моментом $M_{3\Gamma}$, який зумовлює цю кривизну, та жорсткістю балки при згині EI_0 має місце така аналітична залежність

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_{3\Gamma}(x)}{EI_0}, \quad (7.2)$$

де $\rho(x)$ – радіус кривизни пружної лінії балки в площині на відстані x від початку координат;

$M_{3\Gamma}(x)$ – згинальний момент у тому ж перетині балки.

Кривизна плоскої привої (відомо з курсу вищої математики) описується залежністю

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}}. \quad (7.3)$$

Прирівнюючи праві частини співвідношень (7.2) і (7.3), отримано **точне диференціальне рівняння зігнутої осі балки**

$$EI_0 \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}} = \pm M_{3\Gamma}(x). \quad (7.4)$$

Враховуючи, що кути повороту перетинів балки малі, то величиною $y'(x)^2$ порівняно з одиницею можна знехтувати. Тоді із виразу (7.4) при виборі напрямку осі Y вгору отримують приблизне **диференціальне рівняння пружної лінії балки**

$$EI_0 \cdot y''(x) \approx M_{3\Gamma}(x). \quad (7.5)$$

Інтегруючи його двічі чи один раз, можна визначити лінійні $y(x)$ та кутові $\Theta(x)$ переміщення перетинів балки за будь-яких умов навантаження.

Відомо декілька методів визначення переміщень при прямому поперечному згині. Розглянемо деякі з них.

Метод безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки

В основу методу покладено наближене диференціальне рівняння зігнутої вісі балки

$$EI_0 y''(x) = M_{3\Gamma}(x), \quad (7.6)$$

де EI – жорсткість поперечного перетину балки при згині;

E – модуль пружності матеріалу, з якого виготовлена балка;

I_0 – осьовий момент інерції поперечного перетину балки, $I_0 = I$;

$M_{3\Gamma}(x)$ – функція згинального моменту від зовнішнього навантаження, що діє на даній ділянці балки, надалі $M_{3\Gamma}(x) = M(x)$.

Для отримання функції зігнутої осі балки $y = f(x)$ проведемо інтегрування рівняння (7.6)

$$EIy'(x) = \int M(x)dx + C; \quad (7.7)$$

$$EIy(x) = \int dx \int M(x)dx + Cx + D. \quad (7.8)$$

Отже, рівняння зігнутої осі балки

$$y(x) = \frac{1}{EI} \int dx \int M(x)dx + Cx + D. \quad (7.9)$$

У рівняння (7.7)–(7.8) входять постійні інтегрування C і D , які визначають з граничних умов, тобто умов закріплення опор балки, прогини і кути повороту яких відомі.

Метод початкових параметрів

Метод початкових параметрів дає можливість записати всього *одне рівняння прогинів або кутів повороту перетинів, яке є придатним для всіх ділянок балки*. Таке рівняння називають *універсальним рівнянням пружної лінії*, яке враховує всі види навантажень: зосереджену силу F , зосереджений момент M , розподілене навантаження $q(x)$.

Метод початкових параметрів отриманий у результаті уніфікації методу безпосереднього інтегрування зігнутої осі балки, прирівнюванням постійних інтегрування на границях ділянок. Даний метод є універсальним методом визначення переміщень при згині.

Для призматичної балки (рис. 7.2) при вибраній системі координат $X Y$ і різних видах навантаження *рівняння пружної лінії* можна записати у вигляді

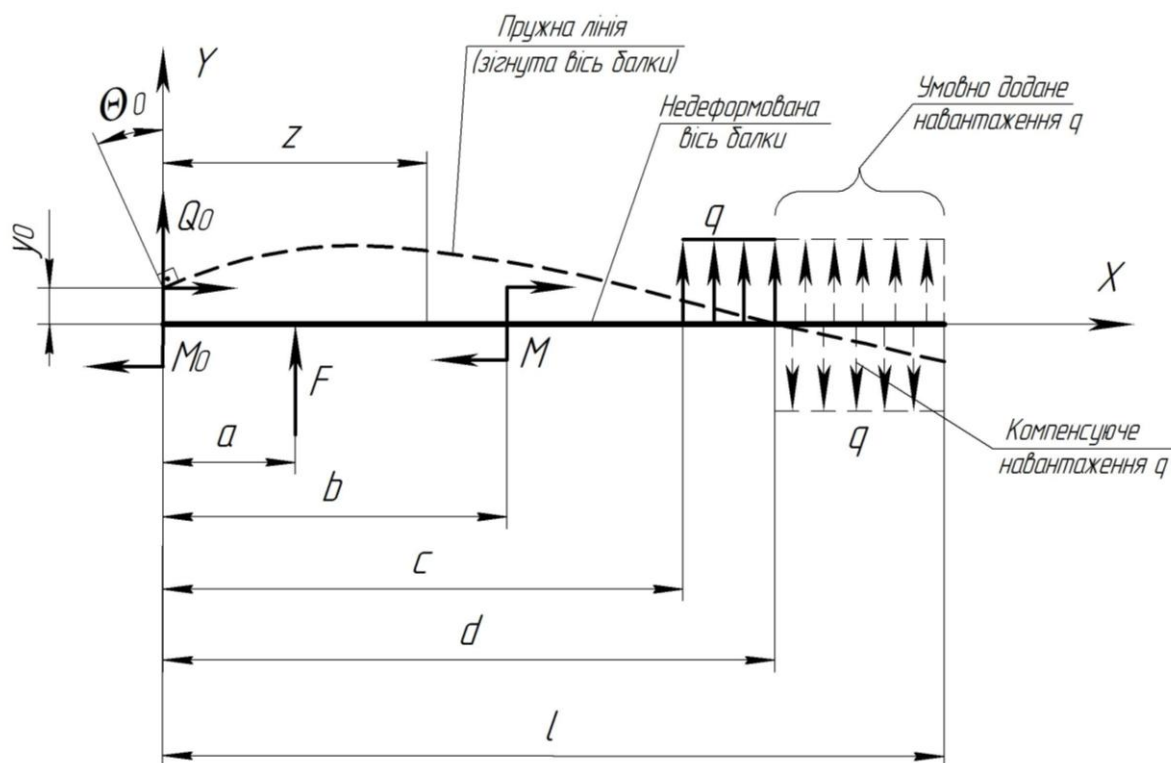


Рисунок 7.2

$$y(x) = y_0 + \Theta_0 \cdot x + \frac{1}{EI} \left(\frac{M_0 x^2}{2} + \frac{Q_0 x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6} + \frac{M(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-c)^4}{24} - \frac{q(x-d)^4}{24} \right), \quad (7.10)$$

де y_0 , Θ_0 , M_0 , Q_0 – початкові параметри, відповідно: прогин, кут повороту поперечного перетину, згинальний момент і поперечна сила на початку координат;

a – відстань від початку координат до перетину, в якому прикладено зосереджену силу F ;

b – відстань від початку координат до перетину, в якому прикладено зосереджений момент M ;

c – відстань від початку координат до перетину, в якому починає дію навантаження q ;

d – відстань від початку координат до перетину, в якому завершує дію навантаження q .

Прогин y_0 та **кут повороту** Θ_0 – геометричні початкові параметри; **згинальний момент** M_0 та **поперечна сила** Q_0 у перетині, який збігається з початком координат, – статичні початкові параметри.

Прогин y_0 та кут повороту Θ_0 початкового (лівого кінцевого) перетину балки визначають із умов закріплення балки, згинальний момент M_0 та поперечну силу Q_0 – з епюр $M_{зГ}$ і Q .

Якщо розглядають балку на двох опорах, то y_0 і Θ_0 визначають з умов рівності нулю прогинів на опорах. Якщо розглядають консольну балку, то ці параметри визначають з умов рівності нулю прогину і кута повороту перетину в защемленні.

Початкові параметри y_0 , Θ_0 , M_0 , Q_0 можуть бути додатними, від’ємними або дорівнювати нулю.

Знаки доданків у рівнянні визначаються знаками відповідних зовнішніх силових факторів. Правила знаків такі ж, які були прийняті для поперечних сил і згинальних моментів.

Рівняння для визначення кутів повороту призматичної балки (див. рис. 7.2) має вигляд

$$\Theta(x) = \Theta_0 + \frac{1}{EI} \left(M_0 + \frac{Q_0 x^2}{2} + \frac{F(x-a)^2}{2} + \frac{M(x-b)}{1} + \right. \\ \left. + \frac{q(x-c)^3}{6} - \frac{q(x-d)^3}{6} \right). \quad (7.11)$$

При складанні рівняння пружної лінії балки потрібно дотримуватися таких правил:

1. Початок координат вибирають у крайній лівій точці розглядуваної балки та зберігають його загальним для всіх ділянок.

2. У рівняння підставляють тільки ті навантаження, які прикладені ліворуч від розглядуваного перетину.

3. Якщо розподілене навантаження $q(x)$ обривається на одній із ділянок балки, то його умовно продовжують до правого кінця балки, одночасно вводячи компенсувальне навантаження тієї ж інтенсивності, але зворотного напрямку.

Метод Мора

В основу методу Мора покладено принцип збереження енергії, тобто рівність робіт від зовнішніх навантажень та потенціальної енергії деформації.

Переміщення Δ (прогин y або кут повороту Θ) визначають за інтегралом Мора, який охоплює всю довжину балки

$$\Delta(y, \Theta) = \sum_l \int \frac{M(x) \cdot \bar{M}(x)}{EI} dx, \quad (7.12)$$

де $M(x)$ – функції згинальних моментів від зовнішніх навантажень для заданої (навантаженої) балки;

$\bar{M}(x)$ – функції згинальних моментів від одиничного навантаження для «допоміжної» (розвантаженої) балки.

«Допоміжна» балка – це задана балка без зовнішніх навантажень.

Фізична суть інтегралу Мора: переміщення довільного перетину балки – це робота одиничної сили, яка затрачена на переміщення точки її прикладання від заданого навантаження.

Порядок визначення переміщень (прогинів чи кутів повороту) з допомогою інтегралу Мора:

1. Складають рівняння згинальних моментів $M(x)$ від заданого навантаження.

2. Звільнивши систему (балку) від заданих навантажень, прикладають до неї силу (пару сил), рівну одиниці (одиничну силу чи одиничний момент) у тому перетині балки, де визначають переміщення та у напрямі цього переміщення.

3. Складають рівняння згинальних моментів $\bar{M}(x)$ від цієї одиничної сили (пари сил).

4. Обчислюють суму інтегралів (7.12) від добутку обох моментів, розділених на жорсткість перетину.

Графоаналітичний розв'язок інтеграла Мора

Обчислення інтеграла Мора (7.12) доцільно виконувати графоаналітичним способом.

Суть: *означений інтеграл від добутку двох функцій, одна з яких лінійна, а друга довільна, дорівнює добутку площі графіка довільної функції на взятую під її центром ваги ординату графіка лінійної функції.*

Графоаналітичний розв'язок інтеграла Мора можна використовувати у випадках, коли одна з епюр окреслюється прямими лініями. Така умова виконується для конструкцій, які складаються з прямолінійних брусів (елементів), тому, що епюри від одиничних навантажень завжди прямолінійні.

Загальна формула для визначення переміщень при згині

$$\Delta(y, \Theta) = \sum \frac{1}{EI} \int_l M(x) \cdot \bar{M}(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \cdot \bar{M}_{Ci}}{EI}, \quad (7.13)$$

де ω_i – площа епюри (рис. 7.3а) згинальних моментів $M(F)$ від зовнішніх навантажень i -ої ділянки балки;

\bar{M}_{Ci} – ордината лінійної епюри (рис. 7.3б) згинальних моментів від одиничного навантаження \bar{M}_C i -ої ділянки балки розташована під центром ваги нелінійної епюри.

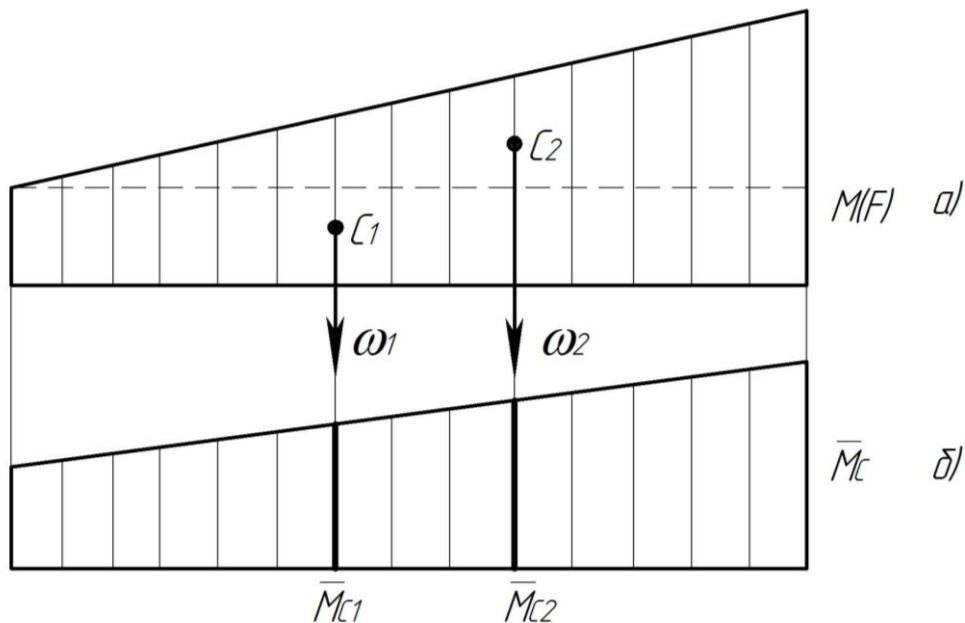


Рисунок 7.3

Обчислення інтеграла Мора графоаналітичним способом називають *способом перемноження еюр*. При цьому епюру $M(F)$ називають *вантажною*, а епюру \bar{M}_C – *одиничною*.

При використанні цього методу потрібно враховувати:

1. Кількість доданків n ($\omega_i \cdot \bar{M}_{Ci}$) повинна бути не менша, ніж кількість сум інтегралів Мора.
2. Якщо епюри $M(F)$ (зовнішніх навантажень) і \bar{M}_{Ci} (одиничних навантажень) протилежні за знаком (знаходяться по різні сторони від нульової лінії), то результат перемноження еюр має знак «мінус».
3. Якщо рівняння згинальних моментів многочлен, то доцільно будувати вантажну епюру у «розшарованому вигляді», тобто доцільно будувати окремі епюри від зовнішніх навантажень, кожна з яких відповідає одному із доданків. Будують такі епюри підходячи з обох боків балки до місця злому одиничної епюри.
4. Епюри побудовані для використання графоаналітичного способу обчислення інтеграла Мора не штрихують.

Розмірність одиничних еюр згинальних моментів – одиниці довжини.

Значення площ еюр та координати їх центра ваги, якими можна скористатися при визначенні переміщень наведені у *додатку 14*.

Приклад розв'язування задачі (консоль)

Визначити графоаналітичним розв'язком інтеграла Мора прогини і кути повороту перетинів A і B консольної балки, зображеної на рис. 7.4, при умові, що $EI = const$.

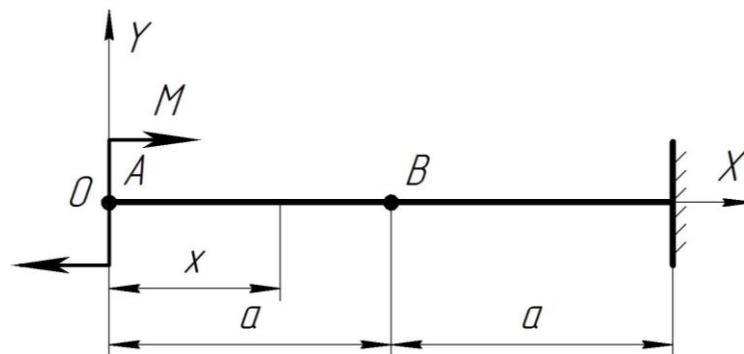


Рисунок 7.4

Розв'язування

Для заданої консольної балки (рис. 7.5а) будемо епюру згинальних моментів (рис. 7.5б) від зовнішніх навантажень $M(F)$. Для визначення прогину перетину A , у «допоміжній» балці (рис. 7.5в) прикладаємо одиничну силу у цьому ж перетині і будемо одиничну епюру згинальних моментів \bar{M}_1 (рис. 7.5з).

Прогин перетину A визначаємо перемножуючи епюри $M(F)$ і \bar{M}_1

$$y_A = \frac{1}{EI} \left(-\omega_1 \cdot \bar{M}_{1C1} \right) = -\frac{2M \cdot a^2}{EI},$$

де $\omega_1 = M \cdot 2a$; $\bar{M}_{1C1} = a$.

Для визначення прогину балки у перетині B доцільно заново повторити епюру $M(F)$ (рис. 7.5д). У «допоміжній» балці у перетині B порібно прикласти одиничну силу (рис. 7.5е) і побудувати одиничну епюру згинальних моментів \bar{M}_2 (рис. 7.5ж). Тоді прогин перетину B

$$y_B = \frac{1}{EI} \cdot \left(-\omega_2 \cdot \bar{M}_{2C2} + \omega_3 \cdot \bar{M}_{2C3} \right) = -\frac{M \cdot a^2}{2EI},$$

де $\omega_2 = M \cdot a$; $\omega_3 = M \cdot a$; $\bar{M}_{2C2} = -a/2$; $\bar{M}_{2C3} = 0$.

Для визначення кутів повороту перетинів A і B потрібно у зазначених перетинах «допоміжних» балок (рис. 7.5з,к), прикласти одиничні згинальні моменти і побудувати епюри згинальних моментів (рис. 7.5і,л).

Кут повороту перетину A визначаємо перемножуючи епюри від зовнішніх сил $M(F)$ (див. рис. 7.5б) та одичних моментів $\bar{\bar{M}}_3$ (див. рис. 7.5і)

$$\Theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \left(\omega_1 \cdot \bar{\bar{M}}_{3C1} \right) = \frac{2M \cdot a}{EI},$$

де $\bar{\bar{M}}_{3C1} = 1$.

Кут повороту перетину B визначаємо перемножуючи епюри від зовнішніх сил $M(F)$ (див. рис. 7.5б) та одичних моментів $\bar{\bar{M}}_4$ (див. рис. 7.5л)

$$\Theta_B = \frac{1}{EI} \cdot \left(\omega_3 \cdot \bar{\bar{M}}_{4C3} + \omega_2 \cdot \bar{\bar{M}}_{4C2} \right) = \frac{M \cdot a}{EI},$$

де $\bar{\bar{M}}_{4C3} = 0$; $\bar{\bar{M}}_{4C2} = 1$.

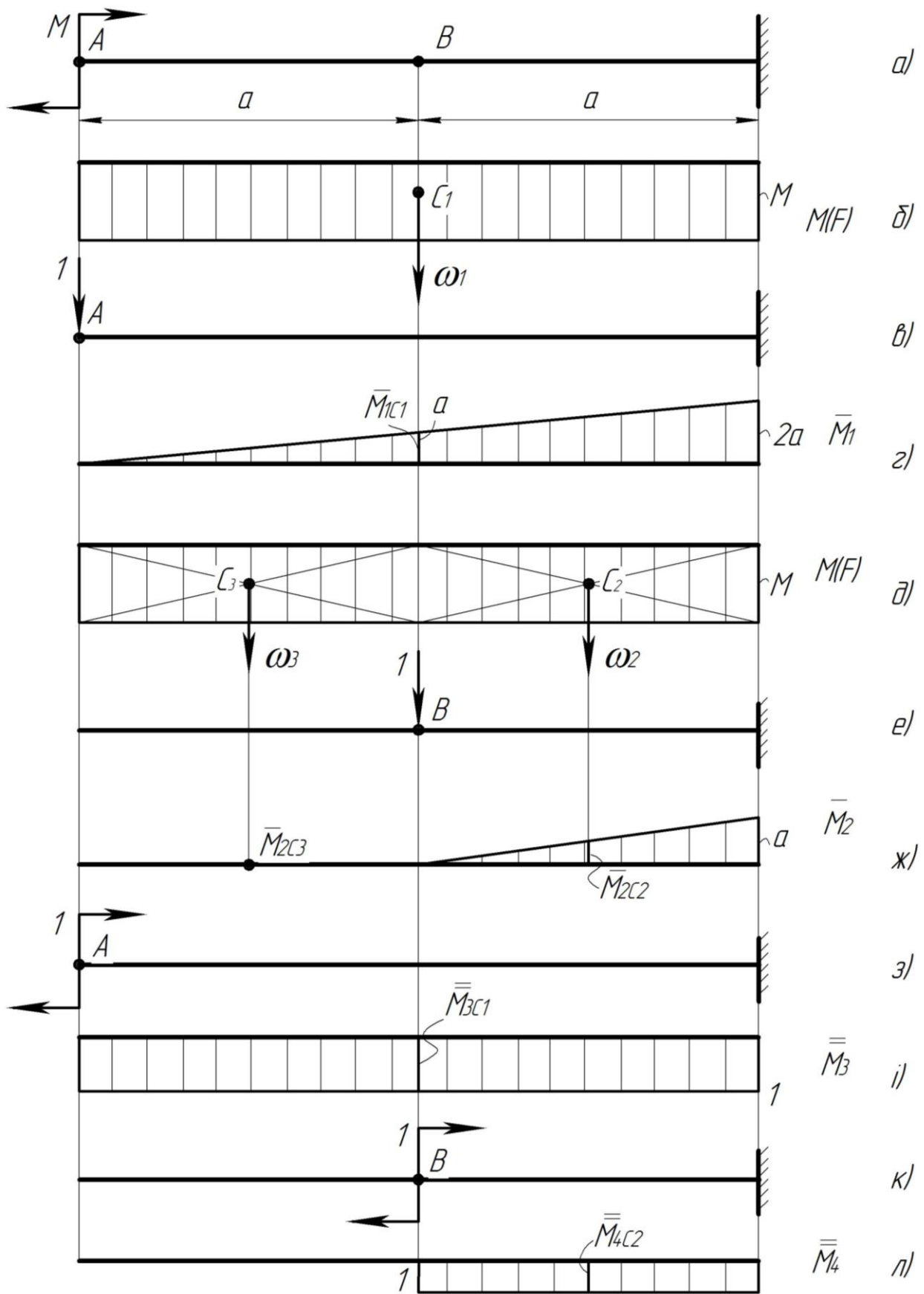


Рисунок 7.5

Приклад розв'язування задачі (балка на двох опорах)

Визначити графоаналітичним розв'язком інтеграла Мора прогини у перетинах K і D та кут повороту перетину A балки на двох опорах, зображеної на рис. 7.6а, при умові, що $EI = const$.

Розв'язування

З рівнянь рівноваги визначаємо опорні реакції (див. рис. 7.6а):

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 3a + F \cdot 2a = 0; \quad R_A = \frac{2}{3}F;$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 3a - F \cdot a = 0; \quad R_B = \frac{1}{3}F.$$

$$\text{Перевірка} \quad \sum Y = R_A - F + R_B = \frac{2}{3}F - F + \frac{1}{3}F = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів $M(F)$ (рис. 7.6б) від зовнішніх навантажень.

Для визначення прогину перетину K у «допоміжній» системі (рис. 7.6в) прикладаємо у перетині K одиничну силу. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0; \quad -\bar{R}_A \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0; \quad \bar{R}_A = \frac{2}{3};$$

$$\sum M_A = 0; \quad \bar{R}_B \cdot 3a - 1 \cdot a = 0; \quad \bar{R}_B = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Перевірка} \quad \sum Y = \bar{R}_A - 1 + \bar{R}_B = \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів \bar{M}_1 (рис. 7.6г) від одиничної сили.

Прогин перетину K визначаємо перемножуючи епюри $M(F)$ і \bar{M}_1

$$y_K = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_1 \cdot \bar{M}_{1C1} + \omega_2 \cdot \bar{M}_{2C2}),$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Fa \cdot a = \frac{Fa^2}{3}; \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Fa \cdot 2a = \frac{2Fa^2}{3};$$

$$\bar{M}_{1C1} = \bar{R}_A \cdot \frac{2}{3} a = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4}{9} a; \quad \bar{M}_{1C2} = \bar{R}_B \cdot \frac{2}{3} 2a = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} a = \frac{4}{9} a.$$

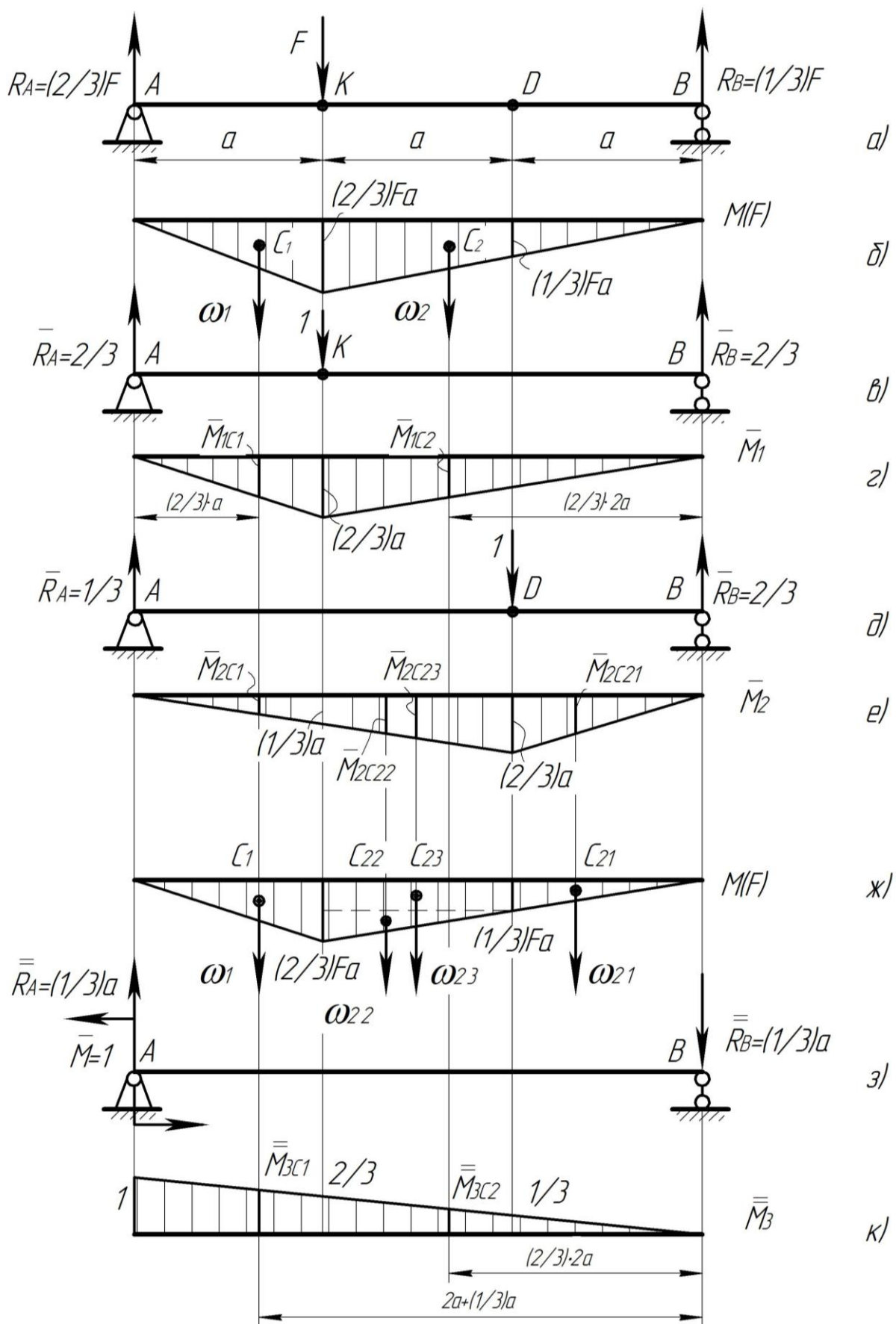


Рисунок 7.6

Підставивши дані, отримаємо

$$y_K = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{Fa^2}{3} \cdot \frac{4}{9}a + \frac{2Fa^2}{3} \cdot \frac{4}{9}a \right) = \frac{12Fa^3}{EI}.$$

Для визначення прогину перетину D проводимо аналогічні дії, тобто у «допоміжній» балці (рис. 7.6д) прикладаємо у перетині D одиничну силу і будуємо епюру \overline{M}_2 (рис. 7.6е). Для зручності і наглядності під епюрою \overline{M}_2 розмістимо епюру від зовнішніх сил $M(F)$ (рис. 7.6ж).

Визначення прогину перетину D ускладнюється збільшенням доданків $\omega_i \cdot \overline{M}_{Ci}$. Це пов'язано з тим, що маємо три ділянки інтегрування за методом Мора, а також розбиваємо середню фігуру (трапецію) на дві фігури – трикутник та прямокутник (рис. 7.6ж).

Прогин перетину D визначимо за формулою

$$y_D = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_1 \cdot \overline{M}_{2C1} + \omega_{21} \cdot \overline{M}_{2C21} + \omega_{22} \cdot \overline{M}_{2C22} + \omega_{23} \cdot \overline{M}_{2C23}),$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Fa \cdot a = \frac{Fa^2}{3};$$

$$\omega_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Fa \cdot a = \frac{Fa^2}{6};$$

$$\omega_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Fa \cdot a = \frac{Fa^2}{6};$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{3} Fa \cdot a = \frac{Fa^2}{3};$$

$$\overline{M}_{2C1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a = \frac{2}{9} a;$$

$$\overline{M}_{2C21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4}{9} a;$$

$$\overline{M}_{2C22} = \frac{1}{3} \cdot \left(a + \frac{1}{3} a \right) = \frac{4}{9} a;$$

$$\overline{M}_{2C23} = \frac{1}{3} \cdot \left(a + \frac{1}{2} a \right) = \frac{1}{2} a.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$y_D = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{Fa^2}{3} \cdot \frac{2}{9}a + \frac{Fa^2}{6} \cdot \frac{4}{9}a + \frac{Fa^2}{6} \cdot \frac{4}{9}a + \frac{Fa^2}{3} \cdot \frac{1}{2}a \right) = \frac{23Fa^3}{54EI}.$$

Для визначення кута повороту перетину A у «допоміжній» балці (рис. 7.6з) у перетині A прикладаємо $\overline{M} = 1$, визначаємо опорні реакції і будуємо епюру згинальних моментів від одиничного навантаження \overline{M} (рис. 7.6к).

Кут повороту перетину A визначаємо перемножуючи епюри $M(F)$ (рис. 7.6б) та \overline{M}_3 (рис. 7.6к)

$$\Theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \left(-\omega_1 \cdot \overline{M}_{3C1} - \omega_2 \cdot \overline{M}_{3C2} \right),$$

$$\text{де } \overline{M}_{3C1} = \frac{1}{3a} \cdot \left(2a + \frac{1}{3}a \right) = \frac{7}{9}; \quad \overline{M}_{3C2} = \frac{1}{3a} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2a \right) = \frac{4}{9}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\Theta_A = -\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{Fa^2}{3} \cdot \frac{7}{9} + \frac{2Fa^2}{3} \cdot \frac{4}{9} \right) = -\frac{15Fa^2}{27EI}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що кут повороту перетину A відбувається у протилежному напрямі до дії одиничного моменту.

Приклад розв'язування задачі №9 методом початкових параметрів

Для заданої балки (рис. 7.7) методом початкових параметрів визначити прогини перетинів C і D та кут повороту перетину A , якщо $F = 10\text{кН}$, $M = 40\text{кНм}$, $q = 20\text{кН/м}$, $EI = \text{const}$.

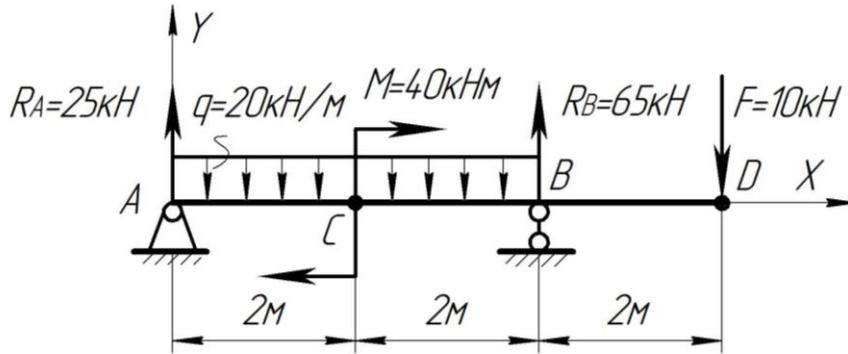


Рисунок 7.7

Розв'язування

З умов рівноваги запишемо:

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - M - F \cdot 2 = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot 6 + R_B \cdot 4 - M - q \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

Визначаємо опорні реакції:

$$R_A = \frac{q \cdot 8 - M - F \cdot 2}{4} = \frac{20 \cdot 8 - 40 - 10 \cdot 2}{4} = 25\text{кН};$$

$$R_B = \frac{F \cdot 6 + M + q \cdot 8}{4} = \frac{10 \cdot 6 + 40 + 20 \cdot 8}{4} = 65\text{кН}.$$

Складаємо перевірне рівняння

$$\sum Y = R_A - q \cdot 4 + R_B - F = 25 - 20 \cdot 4 + 65 - 10 = 0,$$

тобто опорні реакції визначені вірно.

Початок координат вибираємо на крайній лівій опорі – опорі A . Записуємо загальне рівняння зігнутої осі балки методом початкових параметрів

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\Theta_0 \cdot x + \frac{R_A \cdot x^3}{6} + \frac{M \cdot (x-2)^2}{2} + \frac{R_B \cdot (x-4)^3}{6} - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{q \cdot (x-4)^4}{24}. \quad (7.14)$$

Початкові параметри y_0 і Θ_0 визначаємо з умов:

$$\begin{aligned}EIy(0) &= 0; \\ EIy(4) &= 0;\end{aligned}\tag{7.15}$$

або

$$\begin{cases}EIy_0 = 0; \\ EIy_0 + EI\Theta_0 \cdot 4 + \frac{R_A \cdot 4^3}{6} - \frac{q \cdot 4^4}{24} + \frac{M \cdot (4-2)^2}{2} = 0.\end{cases}\tag{7.16}$$

Із системи (7.16) отримаємо:

$$EIy_0 = 0;$$

$$EI\Theta_0 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{25 \cdot 4^3}{6} + \frac{20 \cdot 4^4}{24} - \frac{40 \cdot 2^2}{2} \right) = -33,3.$$

Після підстановки початкових параметрів записуємо рівняння зігнутої осі балки

$$EIy(x) = -33,3 \cdot x + \frac{R_A \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{M \cdot (x-2)^2}{2} + \frac{R_B \cdot (x-4)^3}{6} + \frac{q \cdot (x-4)^4}{24}.$$

Визначаємо прогини балки у перетинах C і D .

Перетин C , $x_C = 2\text{м}$:

$$EIy_C(2) = -33,3 \cdot 2 + \frac{25 \cdot 2^3}{24} - \frac{20 \cdot 2^4}{24} = -46,7;$$

звідки

$$y_C(2) = -\frac{46,7}{EI}.$$

Перетин D , $x_D = 6\text{м}$:

$$EIy_D(6) = -33,3 \cdot 6 + \frac{25 \cdot 6^3}{6} - \frac{20 \cdot 6^4}{24} + \frac{40 \cdot 4^2}{2} + \frac{65 \cdot 2^3}{6} + \frac{20 \cdot 2^4}{24} = 40,0;$$

звідки

$$y_D(6) = \frac{40,0}{EI}.$$

Кут повороту перетину A

$$EI\Theta_0 = EI\Theta_A = -33,3;$$

звідки

$$\Theta_A = -\frac{33,3}{EI}.$$

Приклад розв'язування задачі №9 методом Мора

Розв'яжемо задачу (див. рис. 7.7) методом Мора. Дано: $q = 20 \text{кН} / \text{м}$; $M = 40 \text{кНм}$; $F = 10 \text{кН}$; $R_A = 25 \text{кН}$; $R_B = 65 \text{кН}$, $EI = \text{const}$. Розрахункова схема зображена на рис. 7.8а.

Розв'язування

Визначаємо прогин перетину C . У «допоміжній» балці у точці C (рис. 7.8б) прикладаємо одиничну силу. Визначаємо опорні реакції. У даному випадку (симетричне прикладання сили)

$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Прогин перетину C за методом Мора визначимо, користуючись формулою

$$EIy_C = \int_l M(x) \cdot \bar{M}(x) dx. \quad (7.17)$$

Запишемо вирази $M(x)$ і $\bar{M}(x)$ на ділянках балки:
ділянка I; $0 \leq x \leq 2\text{м}$ (зліва)

$$M(x) = 25x - 10x^2;$$

$$\bar{M}(x) = 0,5x;$$

ділянка II; $2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}$ (зліва)

$$M(x) = 25x - 10x^2 + 40;$$

$$\bar{M}(x) = 0,5x - 1(x - 2);$$

ділянка III; $0 \leq x \leq 2\text{м}$ (справа)

$$M(x) = -10x;$$

$$\bar{M}(x) = 0.$$

Підставляємо вирази $M(x)$ і $\bar{M}(x)$ в інтеграл Мора (7.17) і проводимо інтегрування

$$EIy_C = \int_0^2 (25x - 10x^2) \cdot 0,5x dx + \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40) \cdot (0,5x - (x - 2)) dx + 0 =$$

$$= \int_0^2 (12,5x^2 - 5x^3) dx + \int_2^4 (50x - 20x^2 + 80 - 12,5x^2 + 5x^3 - 20x) dx =$$

$$= \frac{12,5 \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_0^2 + \frac{30 \cdot x^2}{2} \Big|_2^4 - \frac{32,5 \cdot x^3}{3} \Big|_2^4 + \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_2^4 + \frac{80 \cdot x}{1} \Big|_2^4 = 46,7;$$

звідки прогин точки C

$$y_C = \frac{46,7}{EI}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що прогин співпадає з напрямком дії одиничної сили.

Для визначення прогину перетину D у «допоміжній» балці (рис. 7.8в) прикладаємо одиничну силу у цьому ж перетині. Визначаємо опорні реакції:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \quad \bar{R}_B \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 0; \quad \bar{R}_B = 1,5; \\ \sum M_B &= 0; \quad \bar{R}_A \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0; \quad \bar{R}_A = 0,5.\end{aligned}$$

Записуємо вирази згинальних моментів від одиничного навантаження на ділянках балки:

ділянка I; $0 \leq x \leq 2m$ (зліва)

$$\bar{M}(x) = -0,5x;$$

ділянка II; $2m \leq x \leq 4m$ (зліва)

$$\bar{M}(x) = -0,5x;$$

ділянка III; $0 \leq x \leq 2m$ (справа)

$$\bar{M}(x) = -1x.$$

Підставляємо вирази $M(x)$ і $\bar{M}(x)$ в інтеграл Мора (7.17) і проводимо інтегрування

$$\begin{aligned}EIy_D &= \int_0^2 (25x - 10x^2) \cdot (-0,5x) dx + \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40) \cdot (-0,5x) dx + \int_0^2 (-10x) \cdot (-1x) dx = \\ &= \int_0^2 (-12,5 \cdot x^2 - 5x^3) dx + \int_2^4 (-12,5x^2 + 5x^3 - 20x) dx + \int_0^2 10x^2 dx = \\ &= \frac{12,5 \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{12,5 \cdot x^3}{2} \Big|_2^4 + \frac{5 \cdot x^4}{4} \Big|_2^4 - \frac{20 \cdot x^2}{2} \Big|_2^4 + \frac{10 \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 = -40,\end{aligned}$$

звідки прогин точки D

$$y_D = -\frac{40}{EI}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що прогин перетину D не співпадає з напрямком дії одиничної сили (див. рис. 7.8в).

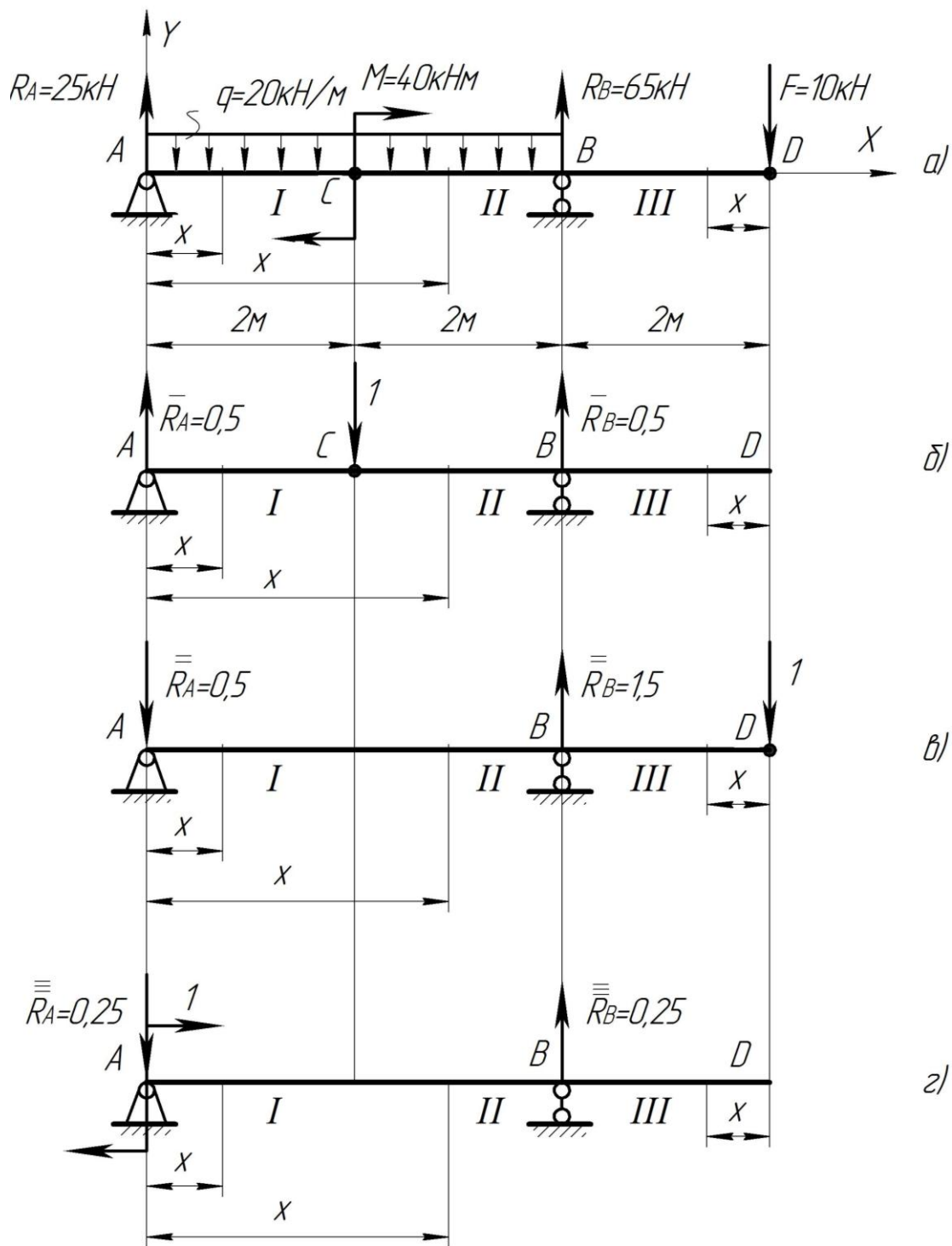


Рисунок 7.8

Для визначення кута повороту перетину A, у «допоміжній» балці (рис. 7.8в), прикладаємо одиничний момент.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту

$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Вирази згинальних моментів для балки (рис. 7.8г):
ділянка I; $0 \leq x \leq 2m$ (зліва);

$$\overline{\overline{M}}(x) = 1 - 0,25x;$$

ділянка II; $2m \leq x \leq 4m$ (зліва);

$$\overline{\overline{M}}(x) = 1 - 0,25x;$$

ділянка III; $0 \leq x \leq 2m$ (справа);

$$\overline{\overline{M}}(x) = 0.$$

Кут повороту перетину A за методом Мора визначимо, користуючись формулою

$$EI\Theta_A = \int_l M(x) \cdot \overline{\overline{M}}(x) dx. \quad (7.18)$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\begin{aligned} EI\Theta_A &= \int_0^2 (25x - 10x^2) \cdot (1 - 0,25x) dx + \\ &+ \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40) \cdot (1 - 0,25x) dx + 0 = \\ &= \int_0^2 (25x - 10x^2 - 6,25x^2 + 2,5 \cdot x^3) dx + \\ &+ \int_2^4 (25x - 10x^2 + 40 - 6,25x^2 + 2,5x^3 - 10x) dx = \\ &= \left. \frac{25 \cdot x^2}{2} \right|_0^2 - \left. \frac{16,25 \cdot x^3}{3} \right|_0^2 + \left. \frac{2,5 \cdot x^4}{4} \right|_0^2 + \left. \frac{40 \cdot x}{1} \right|_2^4 + \left. \frac{15 \cdot x^2}{2} \right|_2^4 - \\ &- \left. \frac{16,25 \cdot x^3}{3} \right|_2^4 + \left. \frac{2,5 \cdot x^4}{4} \right|_2^4 = 33,4; \end{aligned}$$

звідки кут повороту перетину A

$$\Theta_A = \frac{33,4}{EI}.$$

8. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ

Загальні поняття

Статично невизначувані системи – це системи, в яких реакції в'язей та внутрішні зусилля неможливо визначити тільки з рівнянь рівноваги.

Такі системи (конструкції) найпоширеніші, бо вони є надійнішими та жорсткішими порівняно зі статично визначуваними.

Статично визначувану (ізостатичну) балку чи раму можна перетворити у статично невизначувану (гіперстатичну) встановивши додаткову (зайву з точки зору рівноваги системи) опору. Переваги такої системи: навантаження на неї можна збільшити не міняючи перетин балки, при пошкодженні однієї із опор в ізостатичній системі вона перетворюється в механізм, тоді як гіперстатична система залишається нерухомою, здатною сприймати навантаження, тобто є безпечнішою. У багатьох випадках статично невизначувані системи є єдиною можливим варіантом конструкції.

Переваги статично невизначуваних систем: зменшують пружні переміщення; збільшують жорсткість і стійкість елементів системи; значно зменшують робочі напруження у їх перетинах; економічно доцільніші, бо при тих же розмірах перетинів можуть нести більше навантаження; при втраті деяких «зайвих» зв'язків зберігають нерухомість та геометричну незмінність; мають вищу надійність, більшу монолітність та зв'язність елементів у роботі; здатність перерозподіляти навантаження між елементами у разі пошкодження або ослаблення деяких з них (у випадку осадки однієї чи декількох опор).

Недоліки: у них виникають температурні напруження, а також монтажні - у випадку зміни їх розмірів відносно проектних.

Особливості: реакції опор і внутрішні зусилля в елементах залежать від жорсткостей поперечних перетинів стержневої системи; неможливо забезпечити однакові запаси міцності у всіх елементах, тобто одні елементи можуть бути недовантаженими, інші – навпаки, що вимагає оптимального їх проектування.

Основні методи розкриття статичної невизначеності систем

Оскільки невідомих зусиль більше, ніж рівнянь рівноваги, то статичну невизначеність системи можна розкрити лише за допомогою додаткових рівнянь. Ці рівняння повинні відображати особливості геометричних зв'язків, що накладені на стержневу систему. Складають такі рівняння за допомогою уявлення та зображення картини переміщень перетинів елементів конструкції при її деформуванні, тому їх називають – **рівняннями сумісності переміщень** (деформацій).

Методи розрахунку статично невизначуваних систем класифікують залежно від того, що приймають за невідомі величини. Якщо за невідомі прийняті переміщення, то метод розрахунку називають **методом переміщень**,

якщо невідомі прийняті зусилля, то метод їх розрахунку – *метод сил*. Якщо невідомими є частково сили, частково переміщення, то метод розрахунку – *змішаний*.

Метод переміщення, у якому за невідомі у рівняннях статички прийняті лінійні та кутові переміщення жорстких вузлів стержневої системи виник у 1880 році, метод сил відомий з 1807 року.

У курсах опору матеріалів частіше застосовують метод сил.

Метод сил

Розрахунок статично невизначуваної системи починають з її аналізу. Це необхідно для визначення ступеня статичної невизначеності. **Ступінь статичної невизначеності** дорівнює числу зайвих зв'язків, відкидання яких перетворює невизначувану систему в статично визначену (основну), геометрично незмінну. Термін «зайвий зв'язок» потрібно розуміти як «додатковий зв'язок», а не як «непотрібний зв'язок».

На рис. 8.1а зображена статично невизначена балка.

На дану балку накладено чотири зв'язки X_1, X_2, X_3, X_4 . Для плоскої системи сил можемо скласти тільки **три рівняння статички**, тому ця балка $4 - 3 = 1$ раз статично невизначувана. Як «зайвий зв'язок» приймаємо X_1 , тоді балка (рис. 8.1б) є статично визначеною (основною).

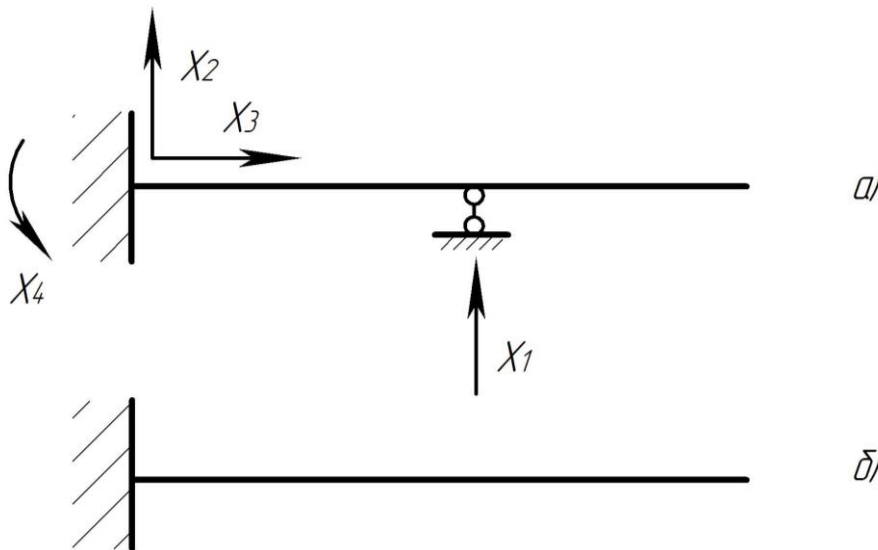


Рисунок 8.1

На рис. 8.2а зображена плоска рама. Ця система $5 - 3 = 2$ рази статично невизначувана.

Відкинувши «зайві зв'язки» X_1 та X_2 , перетворимо статично невизначувану систему в статичну визначувану, геометрично незмінну, (рис. 8.2б).

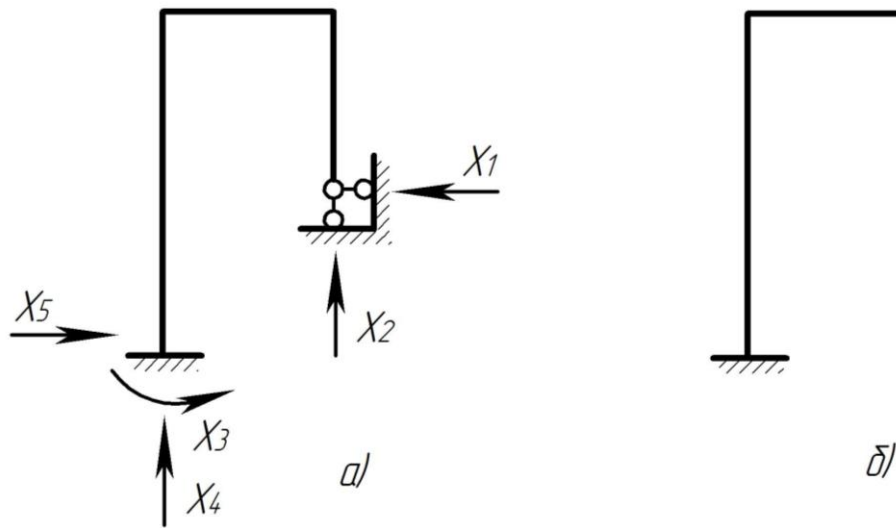


Рисунок 8.2

Статично визначувану, геометрично незмінну систему, утворену зі статично невизначуваної, називають **основною системою**. На рис. 8.1б зображена основна система.

В основу методу сил покладено *принцип незалежності дії сил*.

Порядок розрахунку статично невизначуваних систем за методом сил:

1. **Встановлення ступеня статичної невизначуваності системи** (див. рис. 8.1, 8.2).

2. **Вибір основної системи** шляхом відкидання зайвих зв'язків. Основна система має бути статично визначуваною, нерухомою та геометрично незмінною і після прикладання навантаження. Для кожної заданої системи можна вибрати кілька основних, тому доцільно вибрати оптимальну, що значно спрощує подальші розрахунки.

3. **Формування еквівалентної системи**. Штучні зміни у статично невизначуваній заданій системі при переході до основної системи повинні бути компенсовані введенням відповідних узагальнених невідомих зусиль, прикладених замість відкинутих зв'язків. У перетинах, де неможливі лінійні переміщення, прикладають зосереджені сили, а там, де заборонені кутові переміщення, вводять моменти. Ці невідомі, поки що, зусилля, позначають X_i , де i – номер невідомого зайвого зусилля. Тобто, заміною відкинутих зайвих зв'язків зусиллями X_i та прикладанням зовнішнього навантаження формують «еквіваленту» систему. При переході до неї має бути збережена силова схема заданої гіперстатичної системи та її деформаційна схема, тобто еквівалентна система повинна деформуватися так само, як і задана гіперстатична. Ці вимоги можуть бути сформульовані у вигляді так званих умов нерозривності або *сумісності деформацій*.

напрямку реакції цієї в'язі під дією заданого навантаження та всіх невідомих сил.

Загальна кількість рівнянь сумісності переміщень дорівнює кількості невідомих зусиль (відкинутих зайвих зв'язків), тобто ступеню статичної невизначуваності заданої системи.

5. Обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь. Ці переміщення доцільно визначати за допомогою формул енергетичного методу (інтегралом Мора).

При визначенні δ_{ij} та Δ_{iF} вирази для жорсткості EI елементів системи доцільно залишати у загальному (а не числовому) вигляді, щоб спростити канонічні рівняння та скоротити розрахунки.

Для того, щоб визначити вільні члени системи рівнянь (8.2), тобто повні переміщення Δ_{iF} , необхідно побудувати епюри, зумовлені дією зовнішніх сил. Краще будувати ці епюри від кожної сили окремо. Перемноженням цих реальних епюр на відповідні одиничні визначають величину переміщень Δ_{iF} .

6. Визначення невідомих зусиль із системи канонічних рівнянь.

7. Розрахунки на міцність, жорсткість та стійкість можна вести аналогічно тому, як це роблять у випадку статично визначуваних систем. **Визначення сумарних згинальних моментів та інших внутрішніх силових факторів у перетинах ведуть на основі принципу незалежності дії сил класичним методом перетинів або способом складання відповідних епюр.**

При визначенні реальних переміщень окремих перетинів системи до основної системи потрібно прикласти одиничну силу, побудувати епюру згинальних моментів від цієї сили та перемножити її на сумарну епюру від зовнішнього навантаження. Щоб не ділити сумарну епюру на прості ділянки, можна перемножити одиничну епюру на окремі реальні епюри від дії кожної сили і додати результати. **Переміщення характерних перетинів** (закріплень на опорах) **визначають для перевірки вірності всіх попередніх розрахунків статично невизначуваної системи.**

Метод мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД)

При розгляді статично невизначуваних рамних конструкцій, враховуючи адитивність (безперервність) функції потенціальної енергії деформації, можна записати вираз повної потенціальної енергії деформації конструкції

$$U = U_M + U_K + U_Q + U_N, \quad (8.3)$$

де U_M – потенціальна енергія деформації згину елементів рами,

$$U_M = \sum \int \frac{[M(x)]^2}{2EI_0} dx;$$

U_K – потенціальна енергія деформації кручення,

$$U_K = \sum \int \frac{[K(x)]^2}{2GI_p} dx;$$

U_Q – потенціальна енергія деформації зсуву,

$$U_Q = \sum \int \frac{[Q(x)]^2}{2GA} dx;$$

U_N – потенціальна енергія деформації розтягу (стиску)

$$U_N = \sum \int \frac{[N(x)]^2}{2EA} dx,$$

тут E і G – відповідно модулі пружності та зсуву;

I – осьовий момент інерції поперечного перетину;

I_p – полярний момент інерції поперечного перетину;

A – площа поперечного перетину;

$M(x)$ – функції згинального моменту;

$K(x)$ – функції крутного моменту;

$Q(x)$ – функції поперечних сил;

$N(x)$ – функції розтягуючих (стискаючих) сил.

У цих формулах інтегрування проводять вздовж елементів рами (балки).

Формула (8.3) та її складові є **основними виразами потенціальної енергії деформації при розкритті статичної невизначуваності будь-яких систем.**

Використовуючи теорему Кастиліано $\partial U / \partial X_i = 0$, складають систему рівнянь і визначаємо значення зайвих невідомих.

При розрахунках рамних конструкцій потенціальними енергіями від нормальних і поперечних сил нехтують, враховуючи лише потенціальні енергії від згинального моменту та кручення.

Задача №10

Розрахунок статично невизначуваної рами

Для заданої статично невизначуваної рами (рис. до задачі №10, табл. до задачі №10) розкрити статичну невизначеність методом сил та перевірити отриманий результат методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД). Побудувати епюри поперечних та осьових сил, згинальних моментів. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами. Підібрати двотавровий перетин, якщо $[\sigma]=160\text{МПа}$; $a=1\text{м}$; $q=20\text{кН/м}$; $EI = \text{const}$. З двох зв'язків (1 і 2) залишити той, що вказаний у табл. 10.

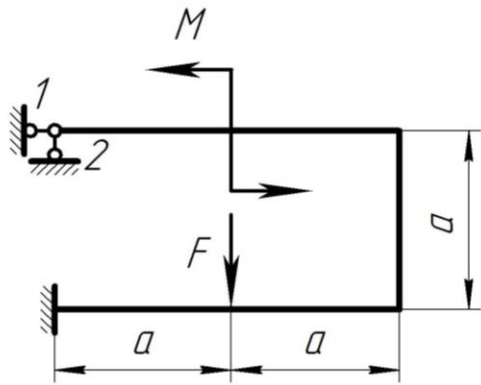
План розв'язування задачі:

1. Вибрати основну систему і побудувати епюри згинальних моментів від зовнішніх та одиничних навантажень в основній системі.
2. Записати канонічне рівняння методу сил.
3. Визначити коефіцієнт δ_{11} і вільний член $\Delta_1(F)$ канонічного рівняння.
4. Розв'язати канонічне рівняння.
5. Перевірити правильність розкриття статичної невизначеності ММПЕД.
6. Записати функції осьових N , поперечних Q сил і згинальних моментів M на ділянках рами.
7. Побудувати епюри N , Q , M для еквівалентної системи.
8. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами.
9. Визначити небезпечний перетин рами і підібрати двотавровий перетин з умови міцності за нормальними напруженнями, що виникають від згину.

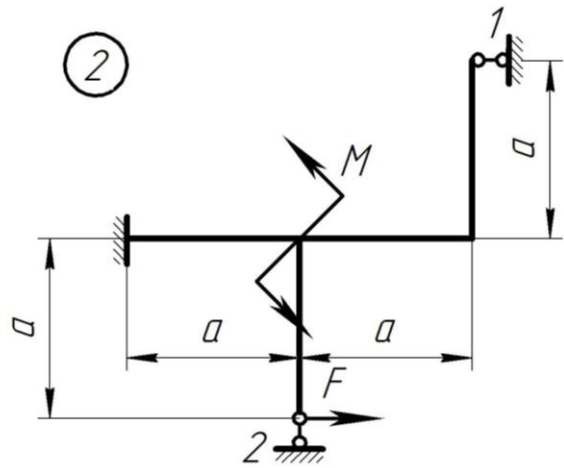
Таблиця до задачі №10

№ з/п	F , кН	M , кНм	№ зв'язку
1	qa	Fa	1
2	$2qa$	qa^2	2
3	$3qa$	Fa	1
4	qa	qa^2	2
5	$2qa$	Fa	1
6	$3qa$	qa^2	2
7	qa	Fa	1
8	$2qa$	qa^2	2
9	$3qa$	Fa	1
0	qa	qa^2	2

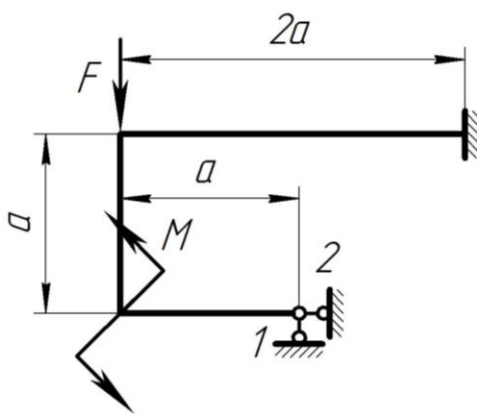
1



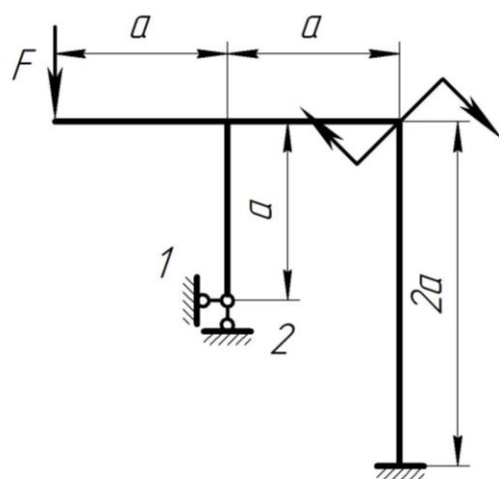
2



3



4



5

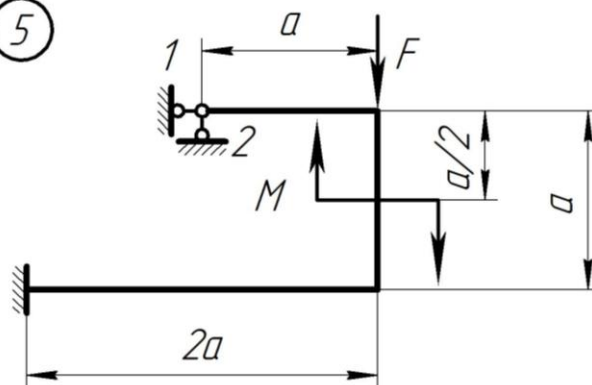


Рисунок до задачі №10

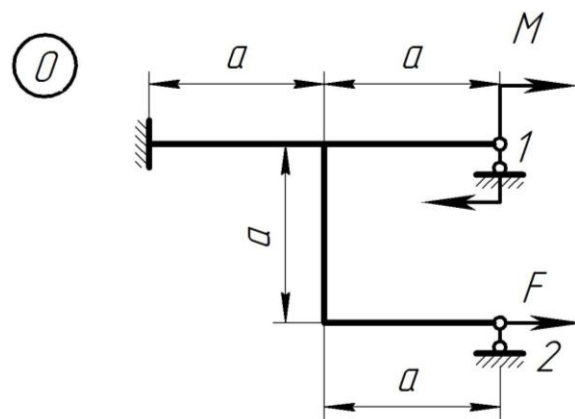
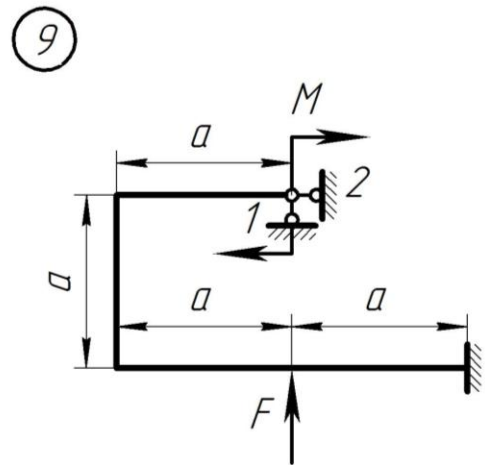
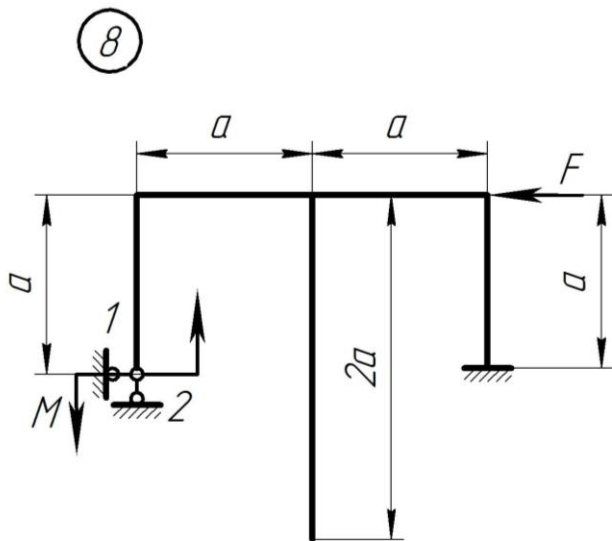
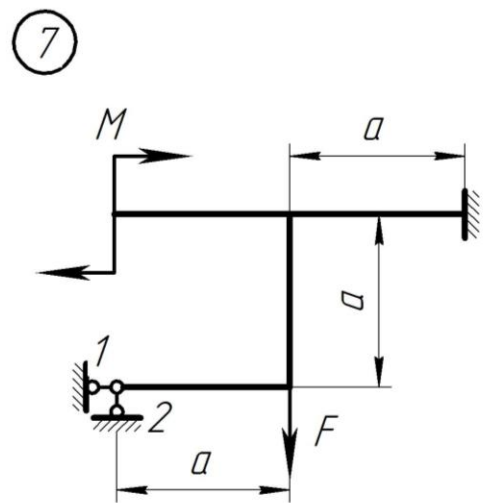
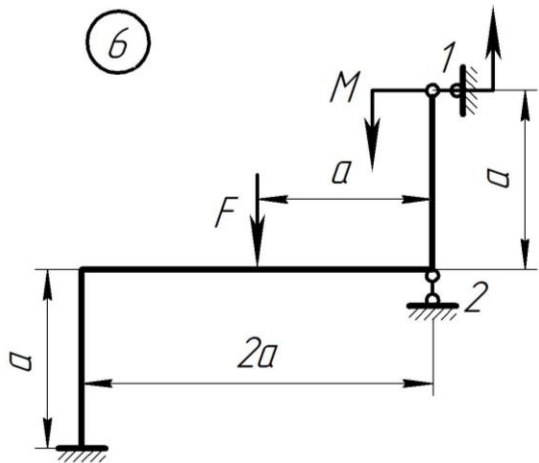


Рисунок до задачі №10 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №10 методом сил

Для заданої статично невизначуваної рами (рис. 8.3а) розкрити статичну невизначеність методом сил та перевірити отриманий результат методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД). Побудувати епюри поперечних та осьових сил, згинальних моментів. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами. Підібрати поперечний перетин, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$; $F = 40 \text{ кН}$; $M = 60 \text{ кН/м}$; $EI = \text{const}$.

Розв'язування

Задана рамна конструкція (див. рис. 8.3а) $4-3=1$ раз статично невизначена. Статичну невизначеність розкриваємо методом сил. Як «зайву» невідому приймаємо X_1 . Основна система показана на рис. 8.3б.

Записуємо канонічне рівняння методу сил

$$X_1 \cdot \delta_{11} = -\Delta_1(F).$$

Переміщення (коефіцієнт) δ_{11} і вільний член рівняння $\Delta_1(F)$ визначаємо графоаналітичним способом розв'язку інтегралу Мора.

Навантажуюємо основну систему одиничною силою (рис. 8.3в). Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили (рис. 8.3г). Визначаємо

$$EI \cdot \delta_{11} = \omega_1 \cdot \overline{M}_{C1},$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2; \quad \overline{M}_{C1} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Тоді

$$EI \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Щоб визначити вільний член рівняння $\Delta_1(F)$ до основної системи прикладаємо зовнішнє навантаження (рис. 8.3д). Будуємо епюру згинальних моментів від навантажень (рис. 8.4е). Запишемо рівняння

$$EI \cdot \Delta_1(F) = \omega_2 \cdot \overline{M}_{C2} - \omega_3 \cdot \overline{M}_{C3},$$

$$\text{де } \omega_2 = 40 \cdot 1 = 40; \quad \omega_3 = 20 \cdot 1 = 20; \quad \overline{M}_{C2} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \overline{M}_{C3} = 1,5.$$

Тоді

$$EI \cdot \Delta_1(F) = 40 \cdot 0,5 - 20 \cdot 1,5 = -10.$$

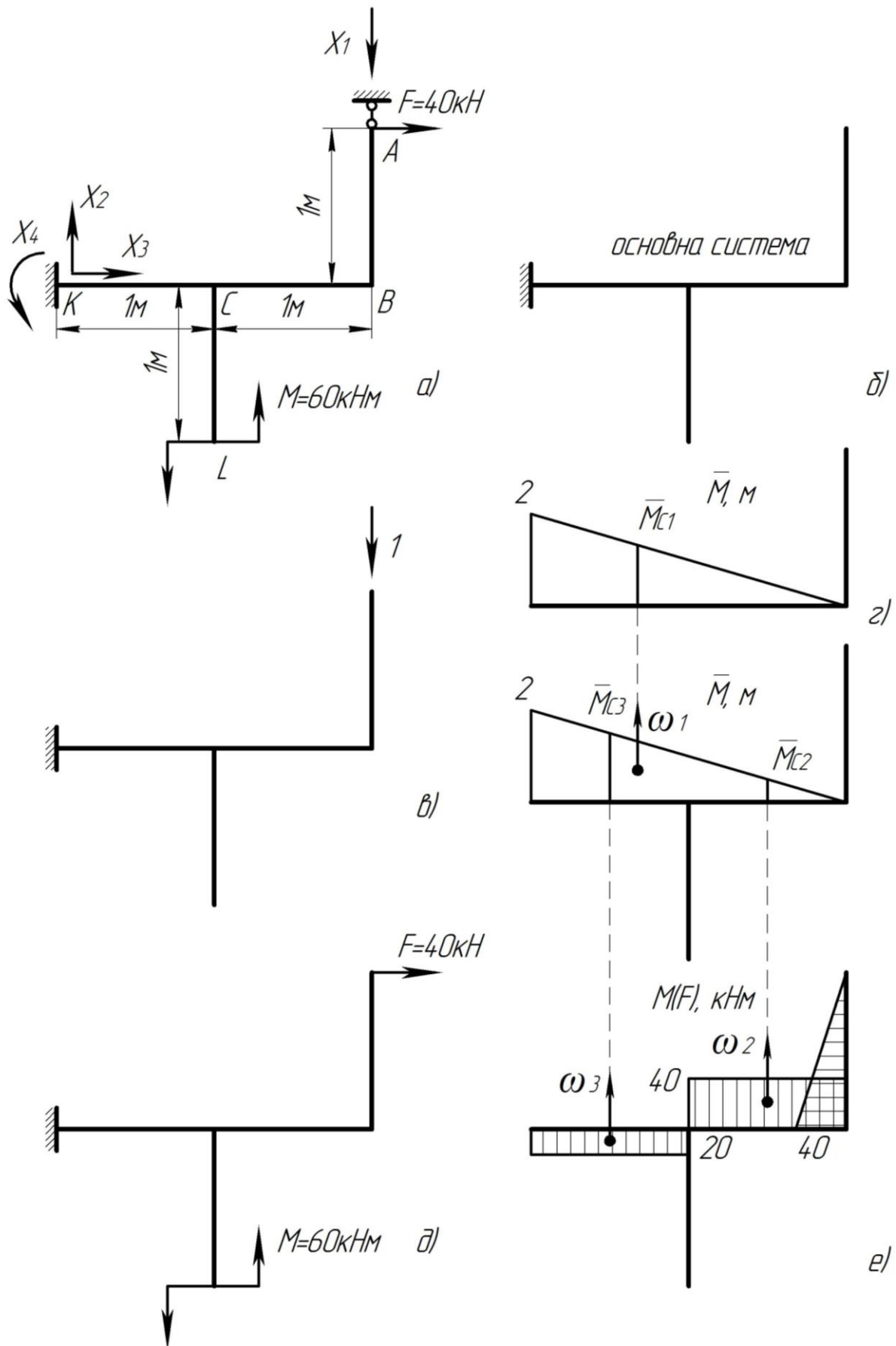


Рис. 8.3

Розв'язуємо канонічне рівняння методу сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_1(F)}{\delta_{11}} = -\frac{(-10) \cdot 3}{8} = 3,75 \text{кН}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що напрям сили реакції X_1 , вибрано вірно.

Викреслюємо еквівалентну систему (рис. 8.3Ж). **Еквівалентна система** – це основна система, завантажена зовнішнім навантаженням і визначеними силами реакцій, тобто **задана початкова система з визначеними реакціями**.

Розбиваємо раму на ділянки. Визначаємо значення внутрішніх силових факторів для кожної з них. На схемі (див. рис. 8.3Ж) на контурі рами проставлені знаки «плюс» – для додатних значень згинальних моментів. Вважаємо згинальний момент додатним, якщо він розтягує нижні волокна. Записуємо функції осьових N , поперечних сил Q та згинального моменту M на ділянках рами.

Ділянка AB , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= -X_1 = -3,75 \text{кН}; & N_A &= N_B = -3,75 \text{кН}; \\ Q(x) &= F = 40 \text{кН}; & Q_A &= Q_B = 40 \text{кН}; \\ M_{3\Gamma}(x) &= -F \cdot x = -40x; & M_{3\Gamma A} &= 0; \quad M_{3\Gamma B} = -40 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка BC , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= F = 40 \text{кН}; & N_B &= N_C = 40 \text{кН}; \\ Q(x) &= X_1 = 3,75 \text{кН}; & Q_B &= Q_C = 3,75 \text{кН}; \\ M_{3\Gamma}(x) &= -F \cdot 1 - X_1 \cdot x = -40 - 3,75x; \\ M_{3\Gamma B} &= -40 \text{кНм}; & M_{3\Gamma C} &= -43,75 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка LC , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= 0; & N_L &= N_C = 0; \\ Q(x) &= 0; & Q_L &= Q_C = 0; \\ M_{3\Gamma}(x) &= M = -60 \text{кНм}; & M_L &= M_C = -60 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка CK , $1\text{м} \leq x \leq 2\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= F = 40 \text{кН}; & N_C &= N_K = 40 \text{кН}; \\ Q(x) &= X_1 = 3,75 \text{кН}; & Q_C &= Q_K = 3,75 \text{кН}; \\ M_{3\Gamma}(x) &= -F_1 \cdot 1 - X_1 \cdot 1 - X_1 \cdot x + M = -40 - 3,75 - 3,75 \cdot x + 60 = 16,25 - 3,75x; \\ M_{3\Gamma C} &= 16,25 \text{кНм}; & M_{3\Gamma K} &= 12,5 \text{кНм}. \end{aligned}$$

За отриманими результатами будуємо епюри N , Q та $M_{3\Gamma}$ (рис. 8.3з,к,л).

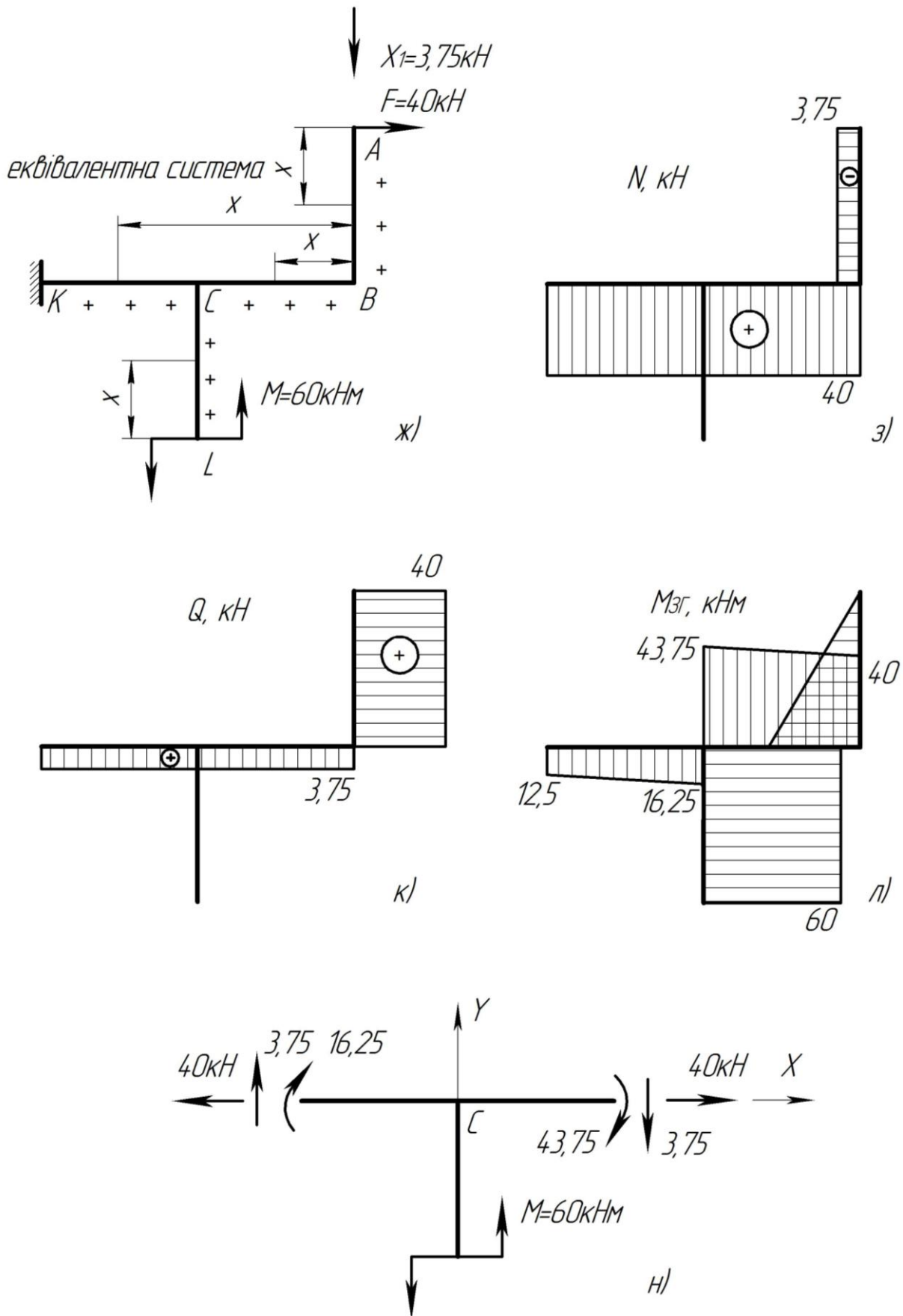


Рис. 8.3 (закінчення)

Проводимо перевірку розкриття статичної невизначеності.
 Статична перевірка. Розглядаємо рівновагу вузла C (рис. 8.3н):
 Записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iX} = F - Q_A = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = -X_1 + N = -3,75 + 3,75 = 0;$$

$$\sum M_{iC} = 60 - 16,25 - 43,75 = 0.$$

З епюри згинальних моментів (див. рис. 8.3л) визначаємо

$$M_{3Г.маx} = 60 \text{кНм}.$$

Щоб підібрати перетин рами, з умови міцності на згин за нормальними напруженнями, визначаємо осьовий момент опору одного швелера

$$W_0 = \frac{M_{3Г.маx}}{2[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 160} = 187,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

приймаємо швелер №22а (ГОСТ 8240-72, додаток 10), для якого $W_0 = 192 \text{см}^3$.

Приклад розв'язування задачі №10 методом мінімуму потенціальної енергії деформації

Розкрити статичну невизначеність рамної конструкції (див. рис. 8.3а) методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД).

Розв'язування

Запишемо вирази потенціальних енергій деформацій від згину для кожного елемента рами.

Ділянка AB , $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$:

$$M(x) = F \cdot x = 40x;$$

$$U_1 = \int_0^1 \frac{(40x)^2}{2EI} dx.$$

Ділянка BC , $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$:

$$M(x) = 40 \cdot 1 + X_1 \cdot x;$$

$$U_2 = \int_0^1 \frac{(40 + X_1 \cdot x)^2}{2EI} dx.$$

Ділянка LC , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$M(x) = M = 60;$$

$$U_3 = \int_0^1 \frac{(60)^2}{2EI} dx.$$

Ділянка CK , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$M(x) = 40 + X_1 \cdot 1 + X_1 \cdot x - 60 = -20 + X_1 + X_1 \cdot x;$$

$$U_4 = \int_0^1 \frac{(-20 + X_1 + X_1 \cdot x)^2}{2EI} dx.$$

Загальна потенціальна енергія деформації від згину

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \int_0^1 \frac{(40x)^2}{2EI} dx + \int_0^1 \frac{(40 + X_1 \cdot x)^2}{2EI} dx + \\ + \int_0^1 \frac{(60)^2}{2EI} dx + \int_0^1 \frac{(-20 + X_1 + X_1 \cdot x)^2}{2EI} dx.$$

З рівняння $\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$, визначаємо величину реакції X_1 :

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{1}{2EI} \left\{ 0 + \int_0^1 2(40 + X_1 \cdot x) \cdot x dx + 0 + \int_0^1 2(-20 + X_1 + X_1 \cdot x)(1 + x) dx \right\} = \\ = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{80 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{40 \cdot x}{1} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x}{1} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{40 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 + \right. \\ \left. + \frac{2X_1 \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{2X_1 \cdot x^3}{3} \Big|_0^1 \right\} = 40 + \frac{2}{3} X_1 - 40 + 2X_1 + X_1 - 20 + X_1 + \frac{2}{3} X_1 = \\ = -20 + \frac{16}{3} X_1 = 0;$$

звідки

$$X_1 = \frac{20 \cdot 3}{16} = 3,75 \text{кН},$$

що співпадає з визначеннями методу сил.

9. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ КОСОМУ ЗГИНІ

Косий згин – складний вид деформації. Виникає тоді, коли площина дії сумарного згинального моменту у поперечному перетині балки не співпадає ні з однією з його головних площин, тобто площин, проведених через вісь балки і головні осі інерції перетину.

Розглянемо випадок чистого косого згину. У довільному поперечному перетині силова площина дії згинальної пари M утворює з головною віссю інерції Y кут α (рис. 9.1).

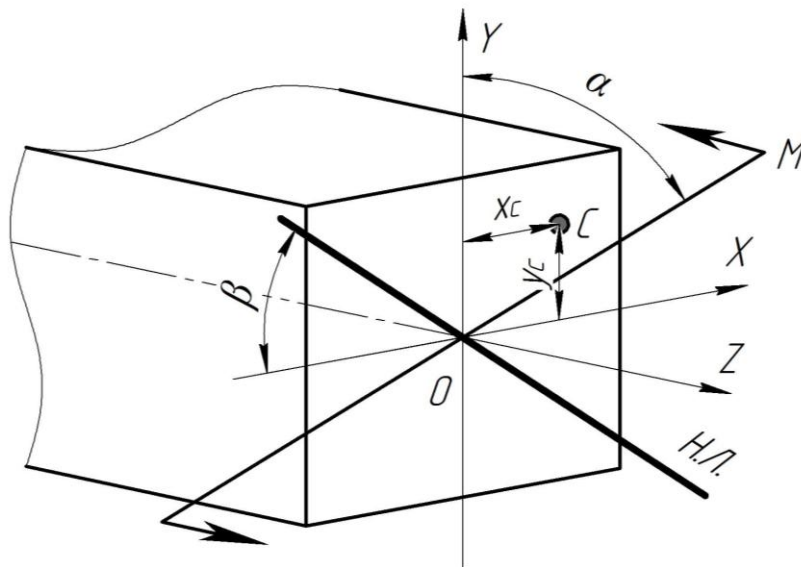


Рисунок 9.1

Косий згин розглядаємо як поєднання двох прямих згинів у головних площинах XZ та YZ (рис. 9.2). Осі X та Y – головні центральні осі інерції перетину, вісь Z збігається з поздовжньою віссю балки.

Складові M_X і M_Y загального згинального моменту M , що діють у головних площинах, визначають за формулами:

$$M_X = M \cdot \cos \alpha; \quad M_Y = M \cdot \sin \alpha.$$

Нормальне напруження при косому згині, у будь-якій точці поперечного перетину, наприклад у точці C з координатами x_C та y_C (див. рис. 9.1), **визначають як алгебраїчну суму нормальних напружень** від складових згинального моменту M_X і M_Y ,

$$\sigma_{Z \text{ сум}} = \sigma_Z(M_X) + \sigma_Z(M_Y) = - \left(\frac{M_X}{I_X} \cdot y_C + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_C \right) \quad (9.1)$$

або

$$\sigma_{Z \text{ сум}} = -M \left(\frac{y_C}{I_X} \cdot \cos \alpha + \frac{x_C}{I_Y} \cdot \sin \alpha \right). \quad (9.2)$$

Систему координат XYZ вибирають так, щоб у I-му квадранті діяли напруження стиску.

Нейтральна (нульова) лінія перетину – це геометричне місце точок, в яких нормальні напруження дорівнюють нулю. Ця лінія обов'язково проходить через центр ваги поперечного перетину.

Рівняння нейтральної лінії при косому згині

$$\frac{M_X}{I_X} \cdot y_0 + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_0 = 0, \quad (9.3)$$

або

$$\frac{y_0}{I_X} \cdot \cos \alpha + \frac{x_0}{I_Y} \cdot \sin \alpha = 0, \quad (9.4)$$

де x_0, y_0 – координати точок нейтральної лінії перетину (рис. 9.3).

Оскільки $x_0 = 0$, то й $y_0 = 0$. Положення такої лінії визначають кутом її нахилу до вісі X (рис. 9.2)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{I_X}{I_Y} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.5)$$

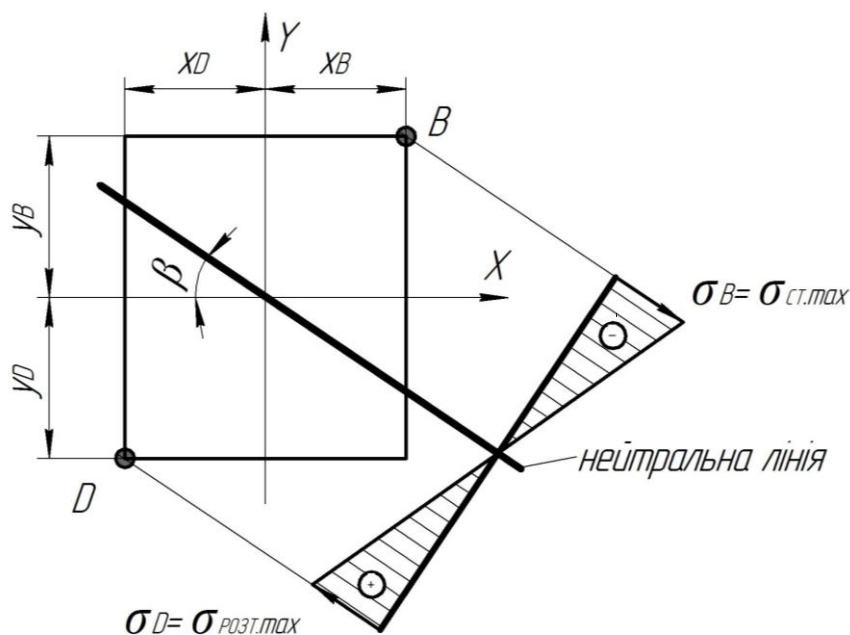


Рисунок 9.2

Напруження при косому згині. Умова міцності

Максимальні нормальні напруження, що виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках симетричного перетину, наприклад прямокутник (див. рис. 9.2), точки B і D , однакові за величиною, але різні за знаком. Їх визначають за формулою

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \left(\frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \right), \quad (9.6)$$

де M_X і M_Y – згинальні моменти відносно головних осей у найбільш навантаженому небезпечному перетині.

Для пластичних матеріалів, поперечні перетини яких мають дві осі симетрії, умова міцності за нормальними напруженнями при косому згині

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]. \quad (9.7)$$

Дотичні напруження при косому згині визначають як суму дотичних τ_X , τ_Y напружень, отриманих від дії поперечних сил Q_X , Q_Y

$$\tau = \sqrt{\tau_X^2 + \tau_Y^2}. \quad (9.8)$$

Складові дотичних напружень τ_Y , τ_Z визначають за формулою Д.І. Журавського

$$\tau_X = \frac{Q_X \cdot S_Y^{\text{відр}}}{b_1 \cdot I_Y}; \quad \tau_Y = \frac{Q_Y \cdot S_X^{\text{відр}}}{b_2 \cdot I_X}. \quad (9.10)$$

Деформації при косому згині

У загальному випадку для перетину із різними значеннями осьових моментів інерції, тобто при $I_X \neq I_Y$ і при $\text{tg}\beta \neq \text{tg}\alpha$ нейтральна лінія не перпендикулярна силовій лінії, а відхилена в сторону осі мінімального момента інерції перетину.

Оскільки напрям повного прогину f і нейтральна лінія завжди ортогональні (рис. 9.3), то балка при косому згині згинається не в силовій площині, а в деякій іншій площині, де жорсткість на згинання буде меншою.

Косий згин зводять до двох плоских. Застосовуючи принцип суперпозиції визначають переміщення f_X і f_Y у кожній з головних площин.

Загальний прогин балки f (див. рис. 9.3) при косому згині визначають як геометричну суму прогинів

$$f = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}. \quad (9.11)$$

Напрямок повного прогину визначають кутом

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{f_X}{f_Y}\right),$$

однаковим з кутом β .

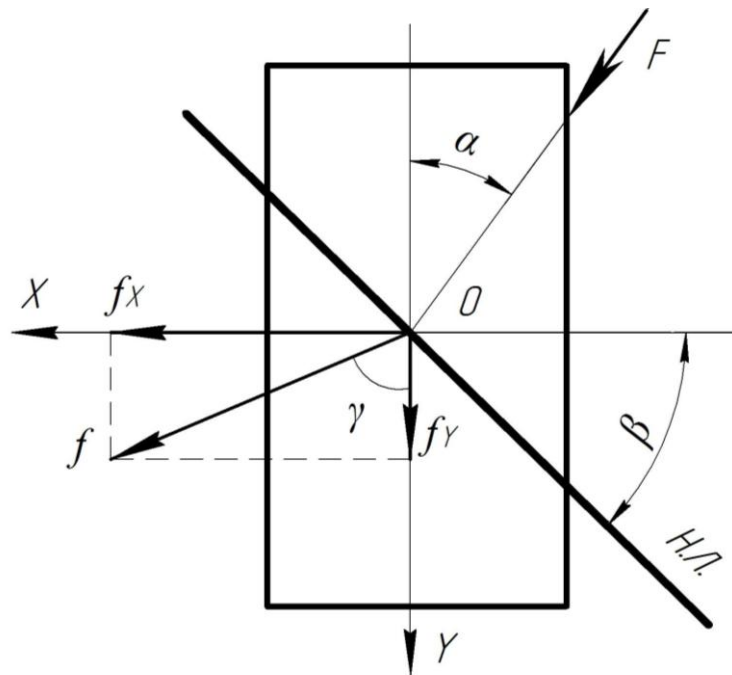


Рисунок 9.3

Явище косоного згину небезпечне для перетинів, які значно відрізняються моментами інерції відносно головних центральних осей перетину (наприклад, двотавра). Балки з таким перетином мало прогинаються при згині у площині найбільшої жорсткості, але навіть при незначних кутах нахилу площини дії зовнішніх сил до площини найбільшої жорсткості у балках виникає значне відхилення лінії повного прогину f у бік найменшої жорсткості.

Задача №11

Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину

Для заданої балки (рис. до задачі №11, табл. до задачі №11) підібрати прямокутний перетин при відношенні висоти балки до її ширини $h/b = 2$, розмістивши сторони b та h паралельно осям X та Y найбільш раціонально. Знайти положення нейтральної осі у небезпечному перетині балки. Побудувати просторову епюру розподілу нормальних напружень у небезпечному перетині. Визначити повне переміщення перетину, позначеного точкою A на рисунку, якщо $a = 1\text{м}$; матеріал балки – сталь Ст.3; $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$; $[\sigma] = 160 \text{МПа}$.

План розв'язування задачі:

1. Розкласти задані навантаження на осі X і Y . Записати функції поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
3. Визначити небезпечний перетин і встановити раціональне його розміщення відносно навантаження.
4. Визначити розміри поперечного перетину балки з умови міцності за нормальними напруженнями.
5. Визначити положення нейтральної лінії у небезпечному перетині балки і побудувати просторову епюру розподілу нормальних напружень у перетині.
6. Визначити горизонтальний, вертикальний і повний прогини балки у перетині A .

Таблиця до задачі №11

№ з/п	$q, \text{кН} / \text{м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	α°
1	5	12	12	0
2	6	10	10	90
3	8	8	8	180
4	10	6	6	270
5	12	5	5	360
6	5	12	12	0
7	6	10	10	90
8	8	8	8	180
9	10	6	6	270
0	12	5	5	360

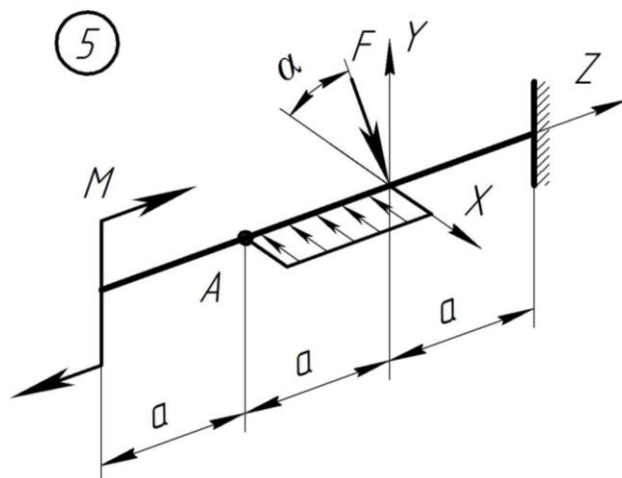
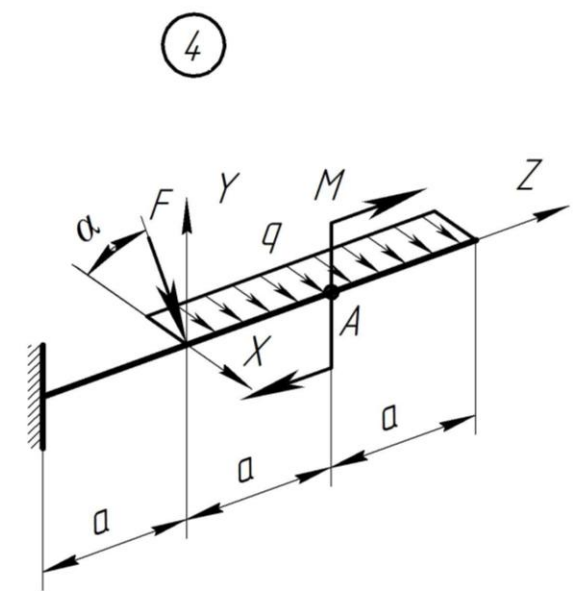
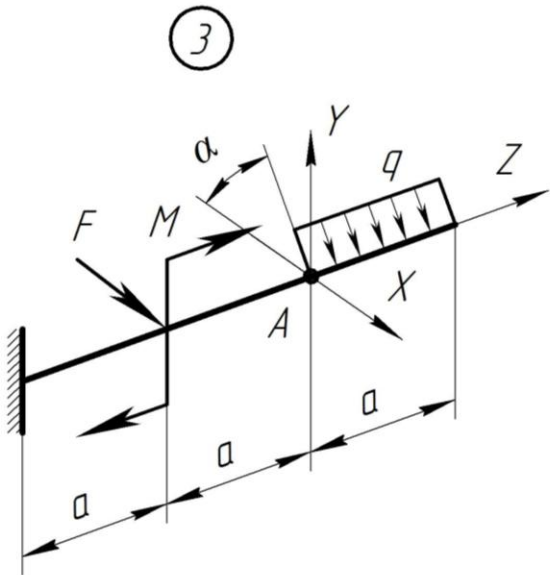
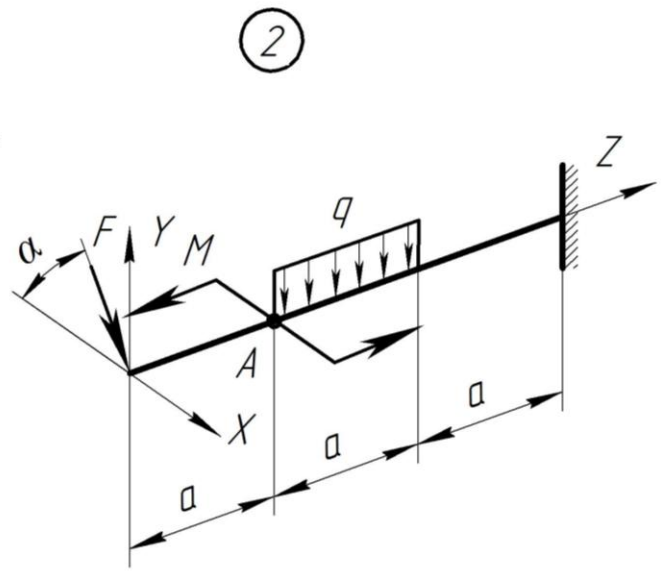
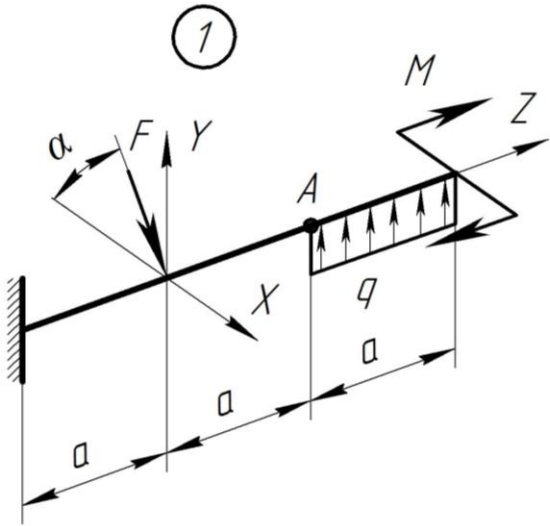


Рисунок до задачі №11

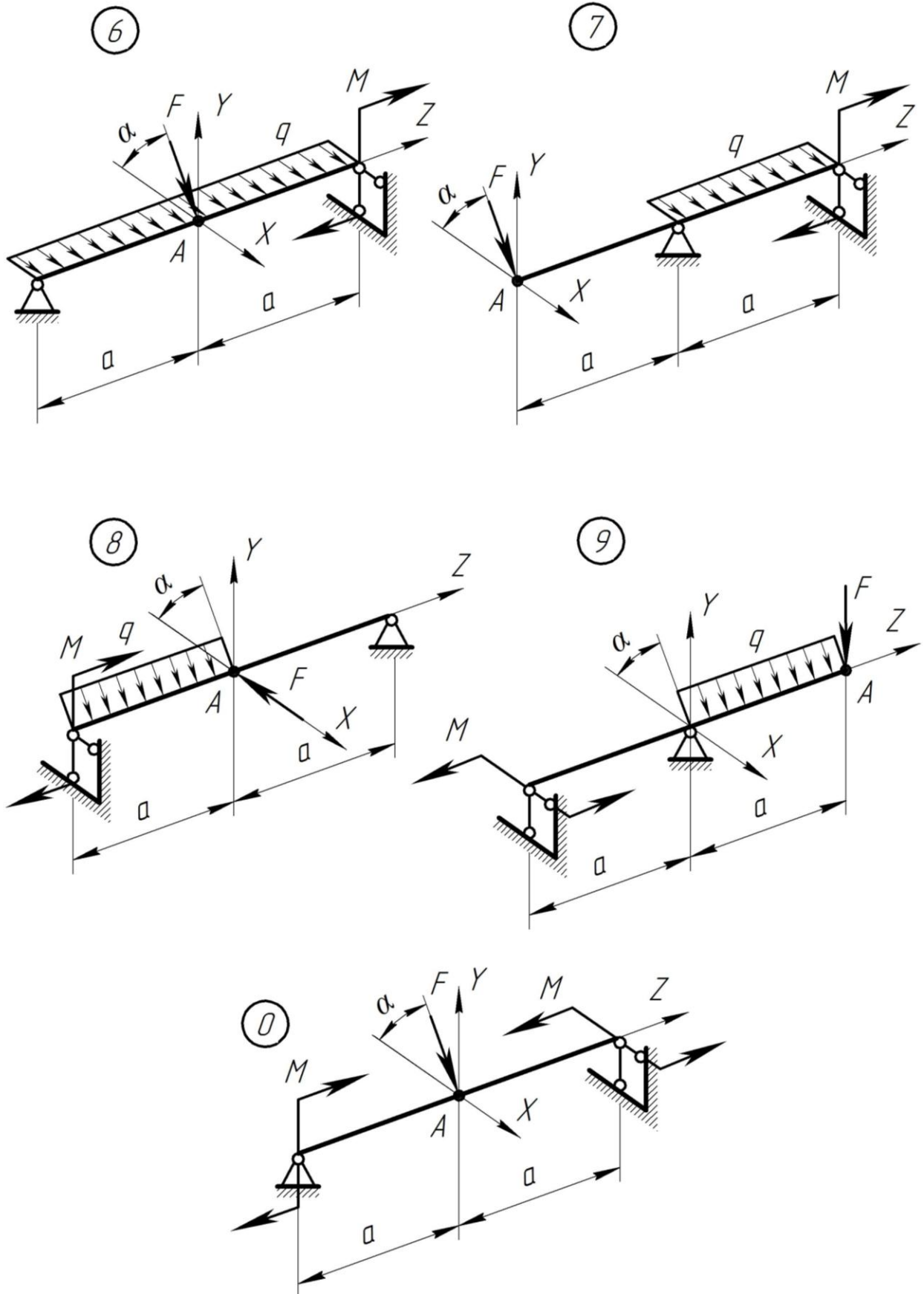


Рисунок до задачі №11 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №11

Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину

Для заданої балки (рис. 9.4а) підібрати прямокутний перетин при відношенні висоти балки до її ширини $h/b = 2$, розмістивши сторони b та h паралельно осям X та Y раціонально. Знайти положення нейтральної лінії у небезпечному перетині балки. Побудувати просторову епюру розподілу нормальних напружень у небезпечному перетині. Визначити повне переміщення перетину, позначеного точкою A на рисунку, якщо $a = 1\text{м}$; матеріал балки – сталь Ст.3; $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$; $[\sigma] = 160 \text{МПа}$.

Розв'язування

Розкладаємо силу F на вертикальну і горизонтальну складові:

$$F_X = F \cdot \sin 45^\circ = 5 \cdot \sin 45^\circ = 3,54 \text{кН};$$

$$F_Y = F \cdot \cos 45^\circ = 5 \cdot \cos 45^\circ = 3,54 \text{кН}.$$

Балку завантажують навантаженнями у вертикальній (рис. 9.4б) і горизонтальній (рис. 9.4д) площинах. Будуємо епюри поперечних сил (рис. 9.4в,е) і згинальних моментів (рис. 9.4з,є). Ці епюри будуємо за характерними точками і значеннями поперечних сил і згинальних моментів на межах ділянок. Застосовуючи цей спосіб, обходимося без складання рівнянь поперечних сил і згинальних моментів. З аналізу епюр визначаємо небезпечний перетин – це перетин B , в якому діють:

$$|M_X| = 12,08 \text{кНм};$$

$$|M_Y| = 37,08 \text{кНм}.$$

Раціонально розміщуємо поперечний перетин балки відносно зовнішнього навантаження (рис. 9.5), використовуючи умову $|M_Y| > |M_X|$.

Для схеми (рис. 9.5б) осьові моменти опору перетину

$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2}{3} b^3; \quad W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1}{3} b^3.$$

Для схеми (рис. 9.5в) осьові моменти опору перетину

$$W_X = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1}{3} b^3; \quad W_Y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2}{3} b^3.$$

З умови раціонального розміщення перетину балки відносно осей X та Y і визначеного за епюрами згинальних моментів (див. рис. 9.4з,є) небезпечного перетину (перетин B), прийmemo схему раціональну схему перетину зображену на рис. 9.5в, для якої $W_Y > W_X$.

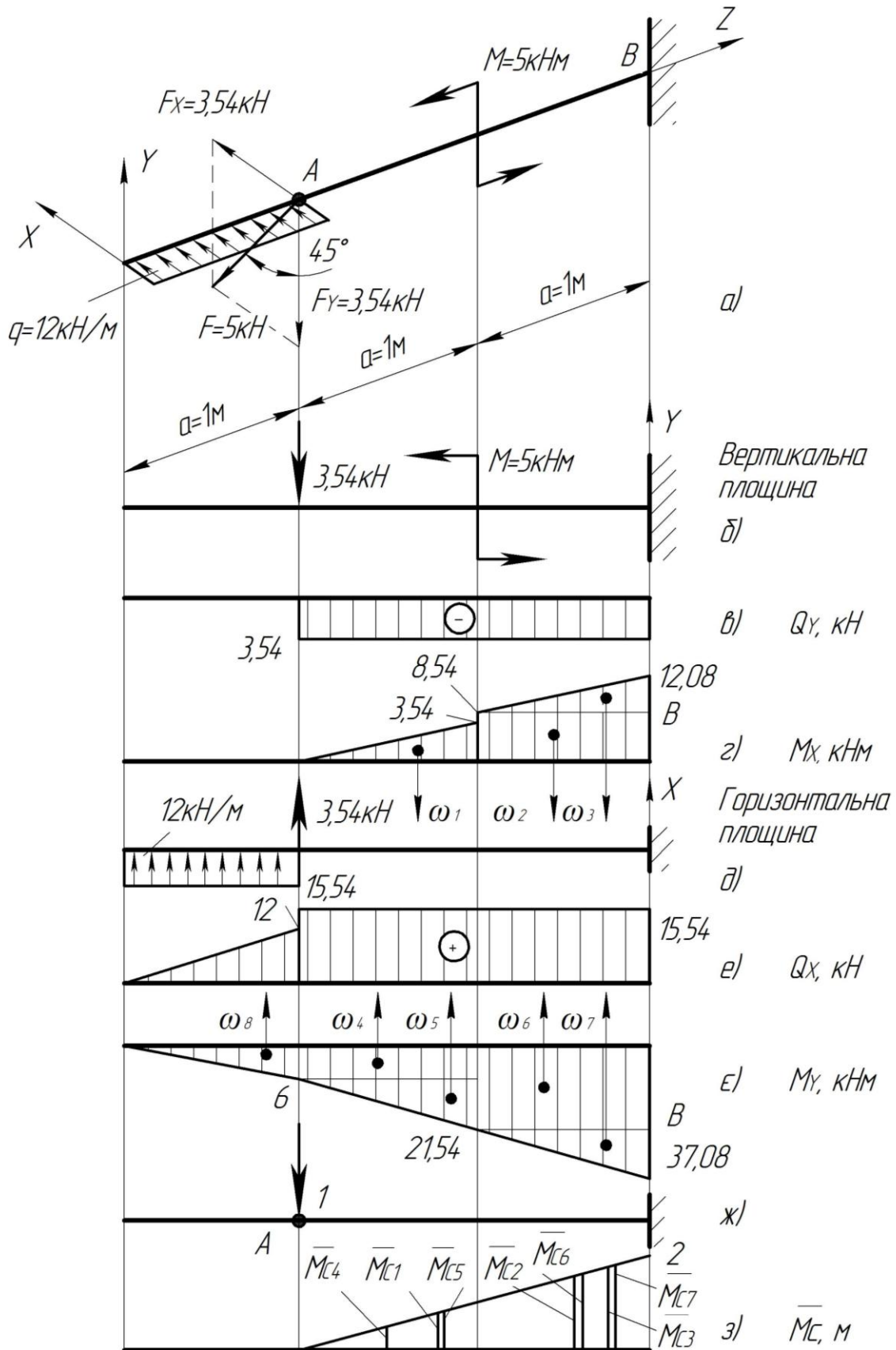


Рисунок 9.4

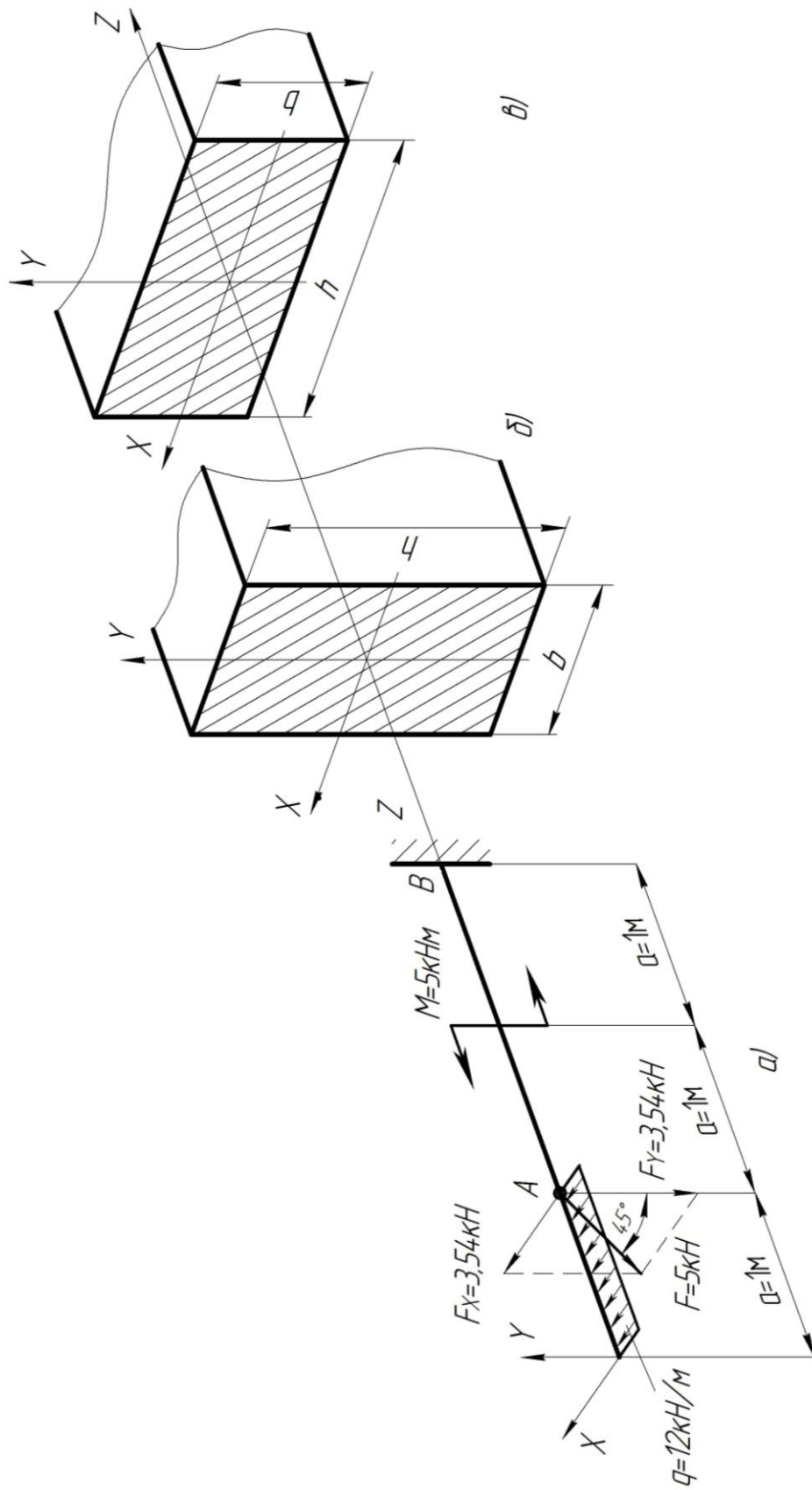


Рисунок 9.5

Записуємо умову міцності за нормальними напруженнями при косому згині для вибраного перетину (рис. 9.5в)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

З умови міцності визначаємо ширину прямокутного перетину

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_X + 1,5M_Y}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 12,08 + 1,5 \cdot 37,08}{160 \cdot 10^{-3}}} = 0,0831 \text{ м.}$$

Приймаємо $b = 85 \text{ мм}$, відповідно висота перетину $h = 170 \text{ мм}$.

Записуємо рівняння нейтральної лінії у небезпечному перетині балки

$$\frac{M_X}{I_X} \cdot y_0 + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_0 = 0,$$

де

$$I_X = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{17 \cdot 8,5^3}{12} \cdot 10^{-8} = 870 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_Y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{8,5 \cdot 17^3}{12} \cdot 10^{-8} = 3480 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\frac{12,08 \cdot 10^{-3}}{870 \cdot 10^{-8}} \cdot y_0 + \frac{37,08 \cdot 10^{-3}}{3480 \cdot 10^{-8}} \cdot x_0 = 0;$$

звідки

$$y_0 = -0,767x_0; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -0,767; \quad \beta = -37,5^\circ.$$

На рис. 9.6 показано раціональне розміщення поперечного перетину балки відносно навантаження і розташування нейтральної лінії.

Для побудови просторової епюри розподілу напружень на контурі небезпечного перетину визначаємо нормальні напруження у вузлових точках цього перетину (див. рис. 9.6) за формулою

$$\sigma_i = -\left(\frac{M_X}{I_X} \cdot y_i + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_i \right),$$

де x_i, y_i – координати вузлових точок перетину:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_1 &= 4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\
 x_2 &= 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_2 &= -4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\
 x_3 &= -8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_3 &= -4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\
 x_4 &= -8,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & y_4 &= 4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}.
 \end{aligned}$$

Визначимо напруження у вузлових точках перетину:

$$\sigma_1 = - \left(\frac{12,08 \cdot 10^{-3} \cdot 4,25 \cdot 10^{-2}}{870 \cdot 10^{-8}} + \frac{37,08 \cdot 10^{-3} \cdot 8,5 \cdot 10^{-2}}{3480 \cdot 10^{-8}} \right) = -150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -(-59 + 91) = -32 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -(-59 - 91) = 150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = -(59 - 91) = 32 \text{ МПа}.$$

За отриманими результатами будемо епюру розподілу нормальних напружень у поперечному перетині (див. рис. 9.6).

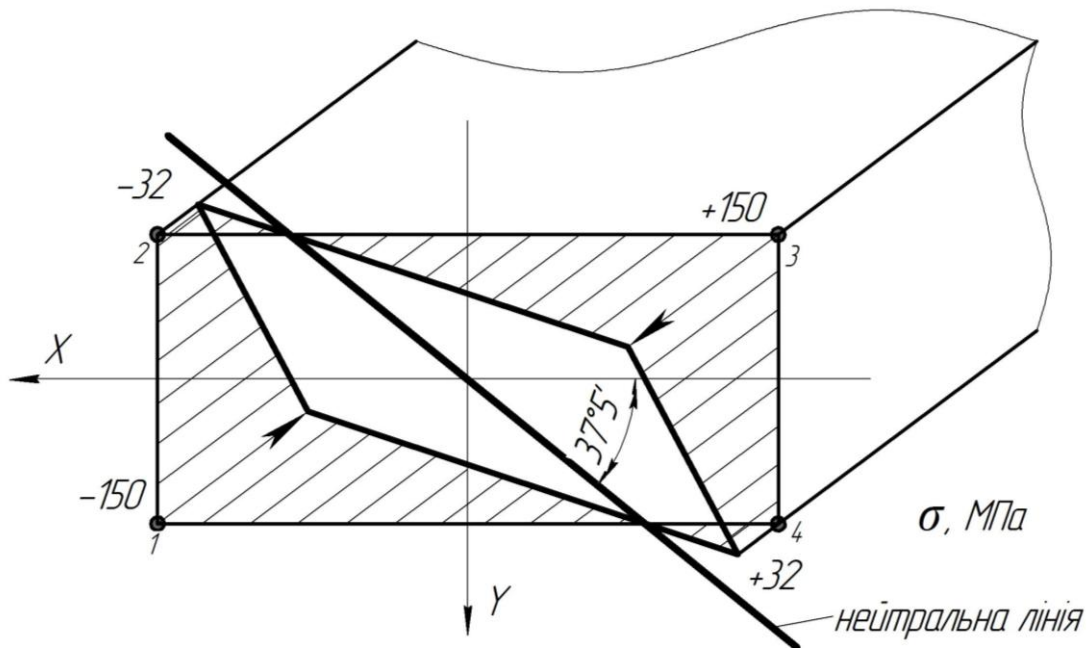


Рисунок 9.6

Прогин балки у перетині А визначаємо використовуючи графоаналітичний метод розв'язку інтегралу Мора.

Вертикальний прогин у точці А визначаємо за формулою

$$f_A^{верт} = \sum_1^3 \frac{\omega_i \cdot \bar{M} C_i}{EI_Y};$$

де ω_i – площа епюри згинальних моментів від зовнішніх навантажень i -ої ділянки (рис. 9.5з);

\overline{M}_{C_i} – величина згинального моменту від одиничного навантаження (сили) (рис. 9.5ж), що знаходиться під центром ваги i -ої епюри (рис. 9.5з).

Відповідно

$$f_A^{верт} = \frac{\omega_1 \cdot \overline{M}_{C1} + \omega_2 \cdot \overline{M}_{C2} + \omega_3 \cdot \overline{M}_{C3}}{EI_Y},$$

$$\text{де } \omega_1 = -\frac{1}{2} \cdot 3,54 \cdot 1 = -1,77 \text{кНм}^2;$$

$$\overline{M}_{C1} = -0,667 \text{м};$$

$$\omega_2 = -8,54 \cdot 1 = -8,54 \text{кНм}^2;$$

$$\overline{M}_{C2} = -1,5 \text{м};$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \cdot (12,08 - 8,54) \cdot 1 = -1,77 \text{кНм}^2;$$

$$\overline{M}_{C3} = -1,667 \text{м}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$f_A^{верт} = \frac{1,77 \cdot 0,667 + 8,54 \cdot 1,5 + 1,77 \cdot 1,667}{2 \cdot 10^5 \cdot 870 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-3} = 0,0097 \text{м} = 9,7 \text{мм}.$$

Горизонтальний прогин у точці А визначаємо за формулою

$$f_A^{гор} = \sum_4^7 \frac{\omega_i \cdot \overline{M}_{C_i}}{EI_X};$$

або

$$f_A^{гор} = \frac{\omega_4 \cdot \overline{M}_{C4} + \omega_5 \cdot \overline{M}_{C5} + \omega_6 \cdot \overline{M}_{C6} + \omega_7 \cdot \overline{M}_{C7}}{EI_X};$$

$$\text{де } \omega_4 = 6 \cdot 1 = 6 \text{кНм}^2;$$

$$\overline{M}_{C4} = -0,5 \text{м};$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot (21,54 - 6) \cdot 1 = 7,77 \text{кНм}^2;$$

$$\overline{M}_{C5} = -0,667 \text{м};$$

$$\omega_6 = 21,54 \cdot 1 = 21,54 \text{кНм}^2;$$

$$\overline{M}_{C6} = -1,5 \text{м};$$

$$\omega_7 = \frac{1}{2} \cdot (37,08 - 21,54) \cdot 1 = 7,77 \text{кНм}^2;$$

$$\overline{M}_{C7} = -1,667 \text{м}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$f_A^{гор} = \frac{6 \cdot (-0,5) + 7,77 \cdot (-0,667) + 21,54 \cdot (-1,5) + 7,77 \cdot (-1,667)}{2 \cdot 10^5 \cdot 3480 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-3} = -7,7 \text{мм}.$$

Повний прогин перетину у точці А дорівнює

$$f_A = \sqrt{(f_A^{верт})^2 + (f_A^{гор})^2} = \sqrt{9,7^2 + (-7,7)^2} = 12,4 \text{мм}.$$

10. СУМІСНА ДІЯ ЗГИНУ З КРУЧЕННЯМ

Сумісна дія згину з крученням – вид складного опору, при якому зовнішні сили, що діють на брус, викликають у ньому такі внутрішні силові фактори: *крутний момент, згинальні моменти й поперечні сили*.

Під дією згину та кручення у поперечному перетині бруса виникають нормальні напруження від згинального моменту в двох площинах і дотичні напруження від кручення й поперечних сил.

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів (прямих брусів круглого або кільцевого перетину).

При розрахунку валів враховують крутний і згинальний моменти. Поперечні сили не враховують, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

При сумісній дії згину та кручення елемент матеріалу в небезпечному перетині перебуває у плоскому напруженому стані (рис. 10.1).

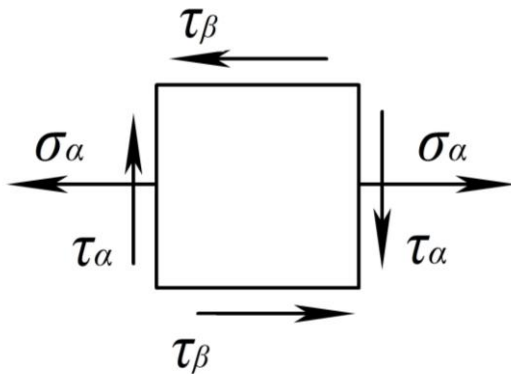


Рисунок 7.1

Максимальні нормальні й дотичні напруження для круглих валів визначають за формулами

$$|\sigma_{\alpha}| = \frac{M_{3\Gamma}}{W_0} = \frac{32M_{3\Gamma}}{\pi \cdot d^3};$$

$$|\tau_{\alpha}| = \frac{M_{KP}}{W_P} = \frac{16M_{KP}}{\pi \cdot d^3},$$

де $W_P = W_0/2$;

$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$, закон парності дотичних напружень.

Найбільшого значення нормальні й дотичні напруження досягають на поверхні вала.

Для визначення згинального моменту розглядають згин вала у двох взаємно перпендикулярних площинах (вертикальній і горизонтальній). Будують епюри згинальних моментів у двох площинах і сумарну. Значення згинальних моментів у характерних перетинах зводять до сумарного (рівнодійного) за формулою

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}.$$

Небезпечні перетини вала визначають співставленням епюр сумарних згинальних моментів і крутного моменту. Небезпечними є перетини, де $M_{3\Gamma}$ і M_{KP} одночасно досягають найбільших значень.

При одночасній дії нормальних і дотичних напружень міцність матеріалу оцінюють за однією з теорій міцності.

Теорії міцності застосовують за призначенням, тобто перша і друга теорії – для крихких матеріалів, третя і четверта – для пластичних; теорії Мора та Писаренка-Лебедева – для матеріалів з різними границями текучості при розтягу і стиску.

Розрахунок вала на міцність при складному опорі проводять за зведеним (еквівалентним, розрахунковим) моментом M_P ($M_{екв}$).

Визначають його залежно від прийнятої теорії міцності:

– за 3-ою теорією міцності (найбільших дотичних напружень)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + M_{КР}^2};$$

– за 4-ою теорією міцності (енергетичною)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + 0,75M_{КР}^2}.$$

Умова міцності при сумісній дії згину з крученням

$$\sigma_{екв} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma],$$

де $\sigma_{екв}$ – еквівалентне (розрахункове) нормальне напруження;

W_0 – осьовий момент опору перетину бруса, для круглого поперечного перетину $W_0 = \pi \cdot d^3 / 32$.

Задача №12

Розрахунок вала на згин з крученням

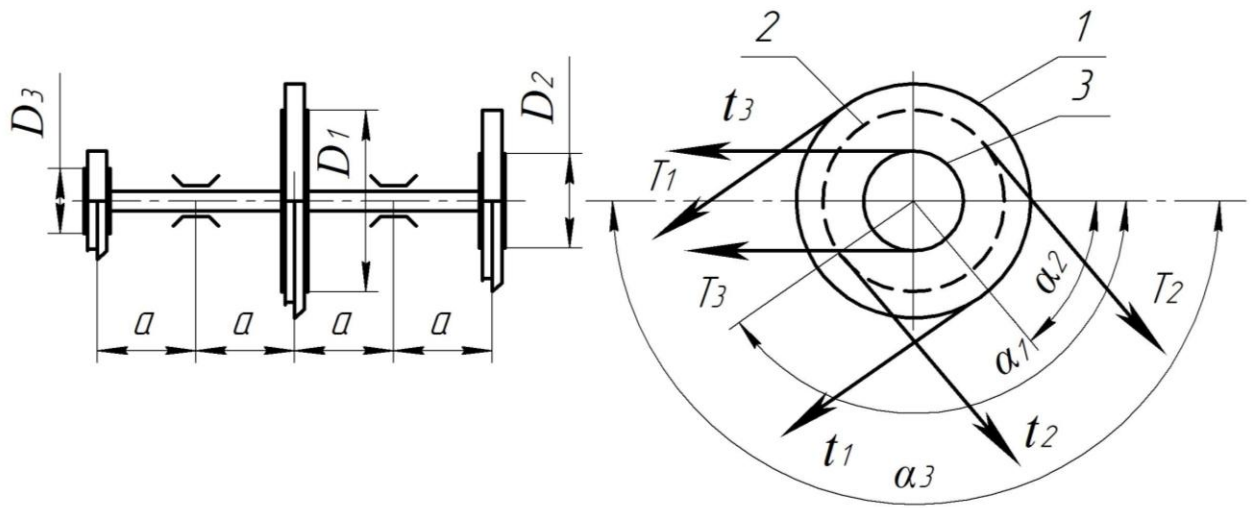
Стальний вал трансмісії (рис. до задачі №12, табл. до задачі №12) обертається з частотою n об/хв і передає через два ведених шківів пасових передач потужності, задані у табл. 12. Діаметри шківів: $D_1 = 60\text{см}$, $D_2 = 40\text{см}$, $D_3 = 30\text{см}$; відстань $a = 100\text{см}$; матеріал – сталь 45, $[\sigma] = 100\text{МПа}$. Визначити діаметр вала з умови міцності.

План розв'язування задачі:

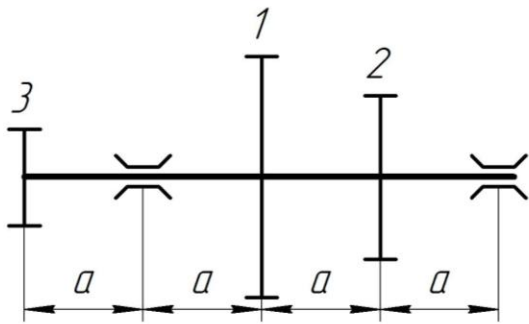
1. Визначити потужність на шківі (з умови балансу потужностей), де вона не задана.
2. Визначити скручувальні моменти на кожному шківі, крутні моменти на ділянках вала і побудувати епюру крутних моментів.
3. Визначити тиск, що передається кожним шківом на вал, вважаючи, що натяг ведучої вітки паса у два рази більший, ніж натяг веденої, $T_i = 2t_i$.
4. Визначити величини складових сил тиску, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах.
5. Побудувати епюри згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
6. Визначити сумарні згинальні моменти у характерних перетинах вала. Побудувати епюру сумарних згинальних моментів.
7. Визначити розрахунковий момент, користуючись третьою теорією міцності.
8. Визначити діаметр вала із умови міцності.

Таблиця до задачі № 12

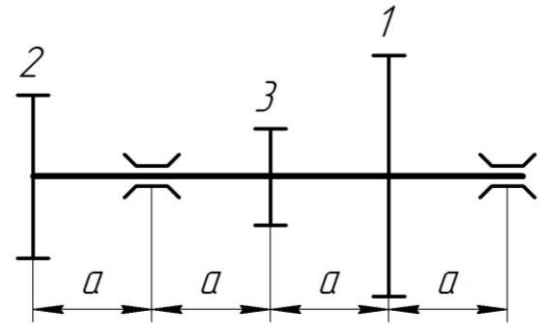
№ з/п	a_1°	a_2°	a_3°	$n, \text{об/хв}$	$P_1, \text{кВт}$	$P_2, \text{кВт}$	$P_3, \text{кВт}$
1	0	270	360	150	-	10	20
2	90	0	180	100	10	-	20
3	180	270	0	200	10	20	-
4	270	360	0	300	-	30	40
5	360	0	90	400	30	-	40
6	0	90	180	500	30	40	-
7	90	180	270	600	-	50	60
8	180	270	360	700	50	-	60
9	270	360	0	800	50	60	-
0	90	0	180	900	-	90	50



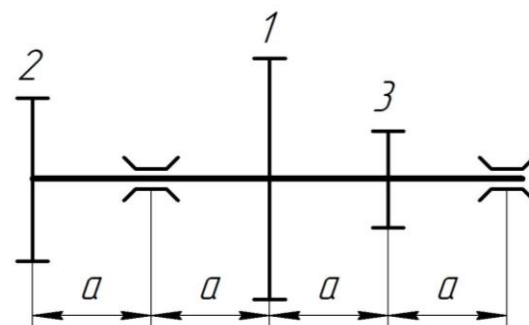
①



②



③



④

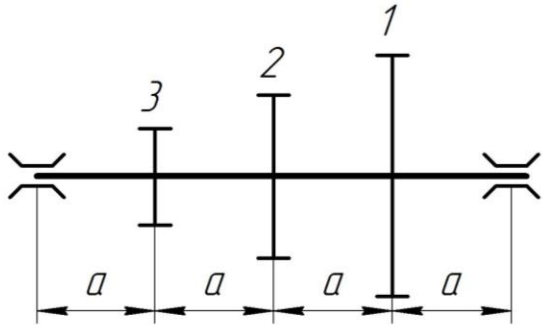


Рисунок до задачі №12

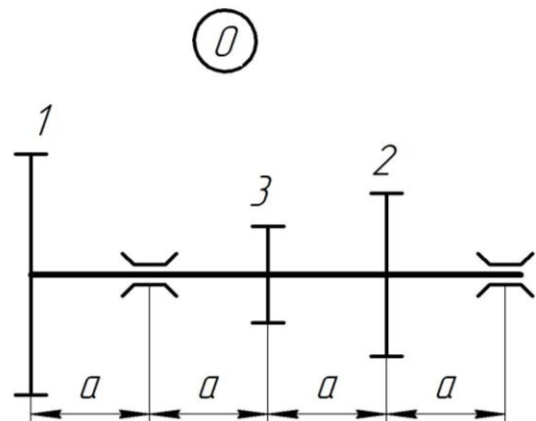
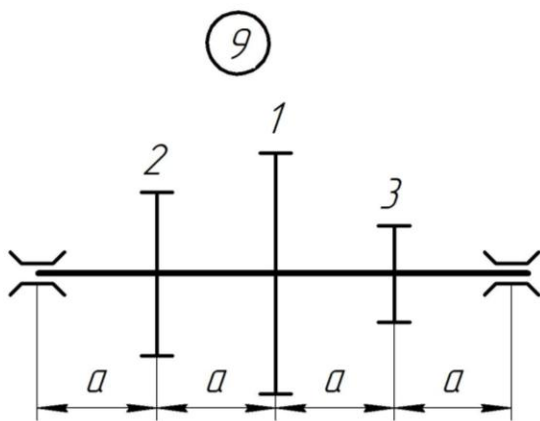
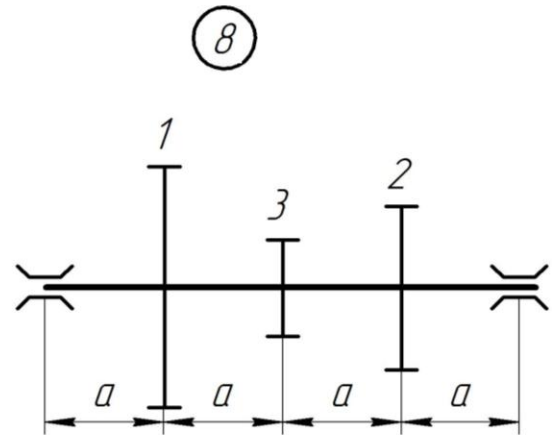
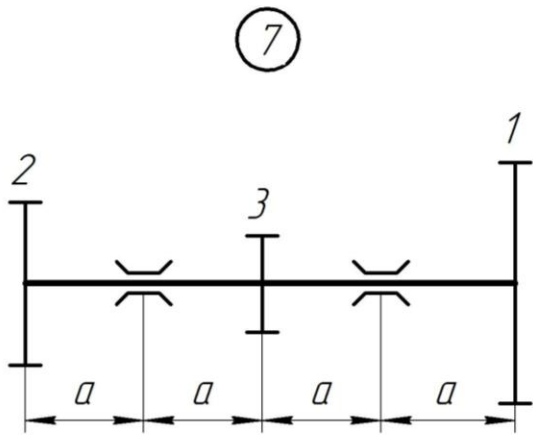
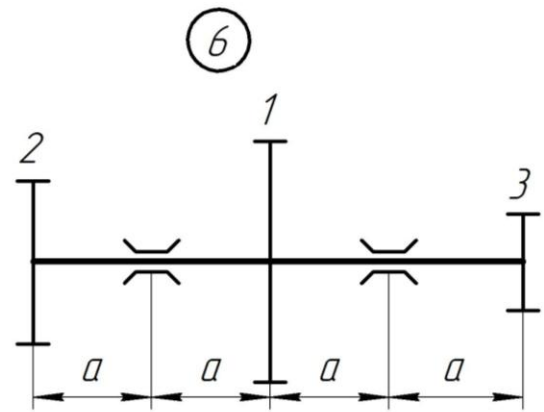
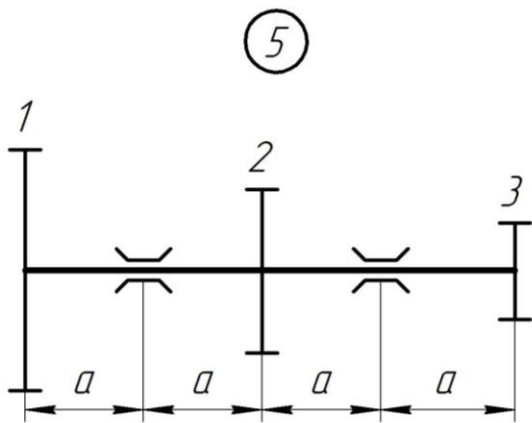


Рисунок до задачі №12 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №12

Розрахунок вала на згин з крученням

Стальний вал трансмісії обертається з частотою $n = 300 \text{ об/хв}$ і передає через два ведені шківні пасові передачі потужності $P_1 = 70 \text{ кВт}$ і $P_3 = 40 \text{ кВт}$ (рис. 10.2а). Діаметри шківів $D_1 = 60 \text{ см}$, $D_2 = 40 \text{ см}$, $D_3 = 30 \text{ см}$. Кути нахилу пасів $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 240^\circ$, $\alpha_3 = 180^\circ$ (на рис. 10.2 кути відкладено від осі Y), відстань $a = 100 \text{ см}$. Матеріал вала – сталь 45; $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$. Визначити діаметр вала з умови міцності.

Розв'язування

З балансу потужностей визначаємо потужність, яку передає ведучий шків

$$P_2 = P_1 + P_3 = 70 + 40 = 110 \text{ кВт}.$$

Величини моментів, які передають шківні, визначаємо за формулою

$$M_i = P_i / \omega,$$

де ω – кутова швидкість вала, визначаємо її за формулою

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Скручувальні моменти на шківних:

$$M_1 = 70 / 31,4 = 2,23 \text{ кНм};$$

$$M_2 = 110 / 31,4 = 3,50 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 40 / 31,4 = 1,27 \text{ кНм}.$$

Використовуючи метод перетинів, будемо епюру крутних моментів, $M_{кр}$ (рис. 10.2б).

Визначаємо сили натягів пасових передач за формулою

$$t_i = 2M_i / D_i.$$

Відповідно

$$t_1 = \frac{2 \cdot 2,23}{0,6} = 7,43 \text{ кН}; \quad t_2 = \frac{2 \cdot 3,50}{0,4} = 17,5 \text{ кН}; \quad t_3 = \frac{2 \cdot 1,27}{0,3} = 8,47 \text{ кН}.$$

Сили тиску на вал у місцях посадки шківів визначаємо за формулою

$$F_i = 3t_i.$$

Тобто

$$F_1 = 3 \cdot 7,43 = 22,3 \text{ кН};$$

$$F_2 = 3 \cdot 17,5 = 52,4 \text{ кН};$$

$$F_3 = 3 \cdot 8,47 = 25,4 \text{ кН}.$$

Розкладаємо сили тиску на вертикальні і горизонтальні складові:

$$F_{1Z} = -F_1 \cdot \sin 30^\circ = -22,3 \cdot \sin 30^\circ = -11,2 \text{кН};$$

$$F_{1Y} = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 22,3 \cdot \cos 30^\circ = 19,3 \text{кН};$$

$$F_{2Z} = F_2 \cdot \sin 60^\circ = 52,4 \cdot \sin 60^\circ = 45,4 \text{кН};$$

$$F_{2Y} = -F_2 \cdot \cos 60^\circ = -52,4 \cdot \cos 60^\circ = -26,2 \text{кН};$$

$$F_{3Z} = 0;$$

$$F_{3Y} = -F_3 = 25,4 \text{кН}.$$

Розглянемо вертикальну площину (рис. 10.2в)

Вертикальні складові реакцій опор A і B визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} M_B = 0; & A_Z \cdot 4 - F_{2Z} \cdot 3 + F_{1Z} \cdot 2 = 0; \\ M_A = 0; & -B_Z \cdot 4 - F_{1Z} \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = 0; \end{cases}$$

звідки

$$A_Z = \frac{45,4 \cdot 3 - 11,2 \cdot 2}{4} = 28,4 \text{кН};$$

$$B_Z = \frac{45,4 \cdot 1 - 11,2 \cdot 2}{4} = 5,8 \text{кН}.$$

$$\begin{aligned} \text{Перевірка: } \sum Z &= -A_Z + F_{2Z} - F_{1Z} - B_Z = \\ &= -28,4 + 45,4 - 11,2 - 5,8 = 45,4 - 45,4 = 0. \end{aligned}$$

Визначаємо згинальні моменти у характерних точках вертикальної площини:

$$M_Y^A = M_Y^B = 0;$$

$$M_Y^K = -A_Z \cdot 1 = -28,4 \cdot 1 = -28,4 \text{кНм};$$

$$M_Y^L = -A_Z \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = -28,4 \cdot 2 + 45,4 \cdot 1 = -11,4 \text{кНм};$$

$$M_Y^C = -B_Z \cdot 1 = -5,8 \cdot 1 = -5,8 \text{кНм}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині (рис. 10.2з).

Розглянемо горизонтальну площину (рис. 10.2д).

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0; \quad -A_Y \cdot 4 + F_{2Y} \cdot 3 - F_{1Y} \cdot 2 + F_{3Y} \cdot 1 = 0; \quad A_Y = 16,4 \text{кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad B_Y \cdot 4 - F_{3Y} \cdot 3 + F_{1Y} \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 0; \quad B_Y = 15,9 \text{кН}.$$

$$\begin{aligned} \text{Перевірка: } \sum Y &= A_Y - F_{2Y} + F_{1Y} - F_{3Y} + B_Y = \\ &= 16,4 - 26,2 + 19,3 - 25,4 + 15,9 = 51,6 - 51,6 = 0; \end{aligned}$$

тобто опорні реакції визначено вірно.

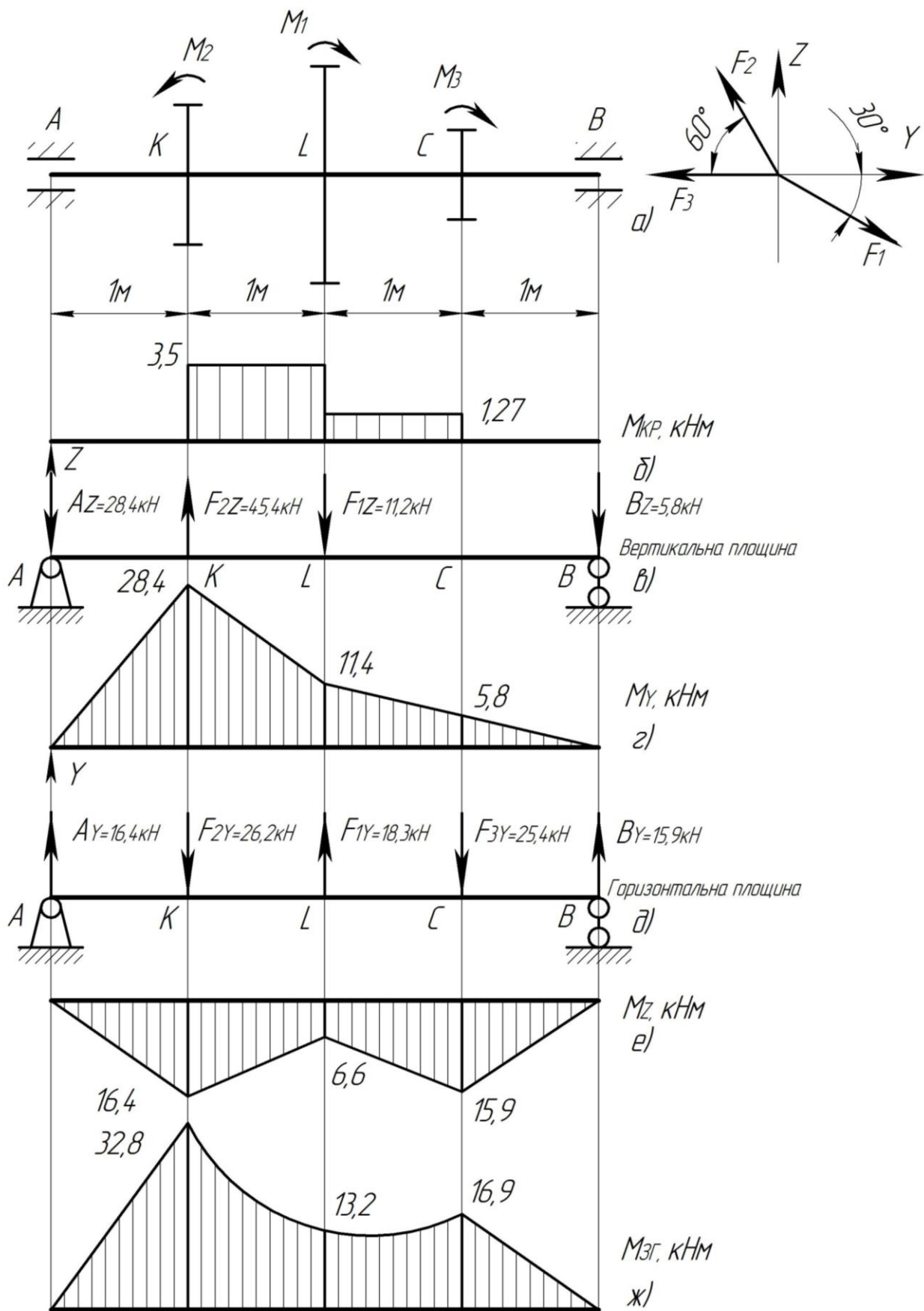


Рисунок 10.2

Визначаємо згинальні моменти у характерних точках горизонтальної площини:

$$\begin{aligned}M_Z^A &= M_Z^B = 0; \\M_Z^K &= A_Y \cdot 1 = 16,4 \cdot 1 = 16,4 \text{кНм}; \\M_Z^L &= A_Y \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 16,4 \cdot 2 - 26,2 \cdot 1 = 6,6 \text{кНм}; \\M_Z^C &= B_Y \cdot 1 = 15,9 \cdot 1 = 15,9 \text{кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині (рис. 10.2e).

Визначаємо сумарні значення згинальних моментів у характерних перетинах вала за формулою

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Визначимо:

$$\begin{aligned}M_{3\Gamma}^A &= M_{3\Gamma}^B = 0; \\M_{3\Gamma}^K &= \sqrt{28,4^2 + 16,4^2} = 32,8 \text{кНм}; \\M_{3\Gamma}^L &= \sqrt{11,4^2 + 6,6^2} = 13,2 \text{кНм}; \\M_{3\Gamma}^C &= \sqrt{5,8^2 + 15,9^2} = 16,9 \text{кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру сумарних згинальних моментів (рис. 10.2ж).

З аналізу епюр M_{KP} (див. рис. 10.2б) і $M_{3\Gamma}$ (див. рис. 10.2ж) визначимо небезпечний перетин – це перетин K , у якому

$$M_{3\Gamma} = 32,8 \text{кНм}; \quad M_{KP} = 3,5 \text{кНм}.$$

Розрахунковий момент визначимо за 3-ю теорією міцності

$$M_P = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{KP}^2} = \sqrt{32,8^2 + 3,5^2} = 33 \text{кНм}.$$

З умови міцності при сумісній дії згину з крученням

$$\sigma_{\max} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

визначаємо діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_P}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 33,0}{\pi \cdot 100 \cdot 10^3}} = 149 \cdot 10^{-3} \text{м};$$

приймаємо $d = 150 \text{мм}$.

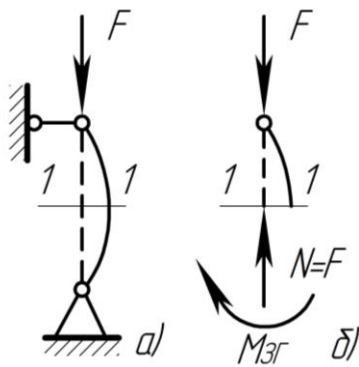
11. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ

Умови міцності та жорсткості доповнюють умовою стійкості, яка передбачає збереження початкової форми рівноваги конструкції або окремих її елементів під дією заданого навантаження.

Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають **критичними**, а відповідні їм стани – **критичними станами**.

Небезпека втрати стійкості виникає для тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, довгих стиснених стержнів, пластин і оболонок.

Критична сила – це найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою. Згин, пов'язаний із втратою стійкості стержнем прямолінійної форми, називають **поздовжнім згином**.



Унаслідок викривлення осі у поперечних перетинах стержня виникають два внутрішні силові фактори – **поздовжня сила** $N = F$ і **згинальний момент** $M_{зг}$ (рис. 11.1). Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.

Рисунок 11.1

Визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості

$$n_{см} = \frac{F_{КР}}{F}.$$

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила F , яка діє на стержень, була меншою за критичну $F_{КР}$. Стійкість стержня достатня, якщо $n_{см} > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Для сталей $n_{см} = 1,8...3$; для чавунів $n_{см} = 5...5,5$; для дерева $n_{см} = 2,8...3,2$.

Рівновага абсолютно твердого тіла може бути стійкою, байдужою і нестійкою. Аналогічно це можна віднести і до деформованого тіла.

Довгий стержень при дії осьового стискуючого навантаження проходить **три форми рівноваги: стійку, байдужу та нестійку**.

Стиснений стержень перебуває у стані **стійкої** рівноваги (рис. 11.2а), якщо сила стиску F не перевищує критичного значення $F_{КР}$. Тобто, якщо стержень незначно зігнути якимось поперечним навантаженням, а потім

це навантаження забрати, то стержень знову вирівнюється, набуде початкове положення.

Форма рівноваги стисненого стержня є *байдужою* (рис. 11.2б), якщо сила стиску досягає певного значення, яке дорівнює критичній силі. При незначному відхиленні від початкового положення, під дією поперечної сили стержень назад не повертається.

При значенні стискуючої сили, яке перевищує критичне, прямолінійна форма рівноваги стержня стає *нестійкою*, стержень втрачає свою початкову форму (рис. 11.2в).

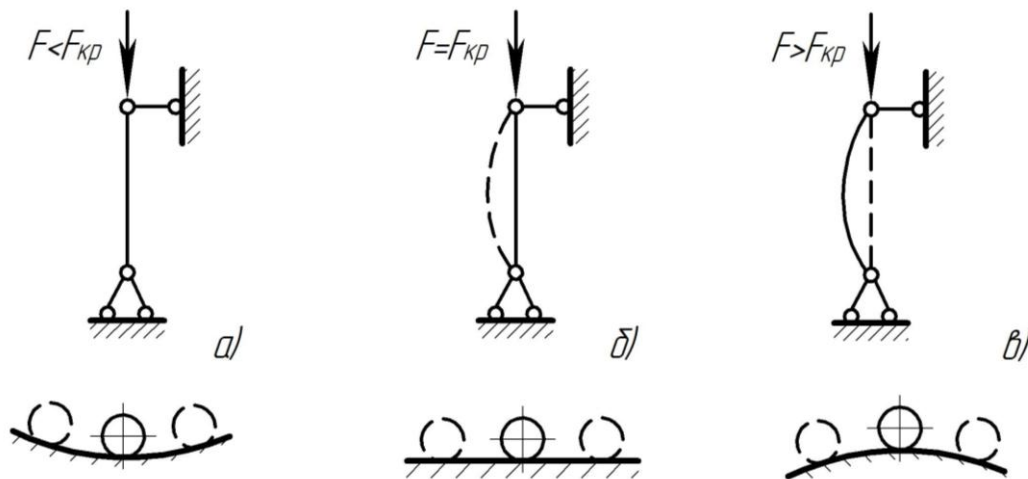


Рисунок 11.2

Втрата стійкості стержня може відбутися навіть тоді, коли напруження під дією критичної сили не досягнуло границі пропорційності.

Найменше значення стискуючої сили, при якій стержень втрачає властивість зберігати прямолінійну форму, називають критичною, позначають F_{KP} .

Задачу визначення величини критичної сили вперше розв'язав академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер у 1744р. **Формула Ейлера**

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де E – модуль пружності I-го роду;

I_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стержня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, залежить від способу закріплення кінців стержня;

l – довжина стержня.

Варіанти закріплення кінців стержня зображено на рис. 11.3.

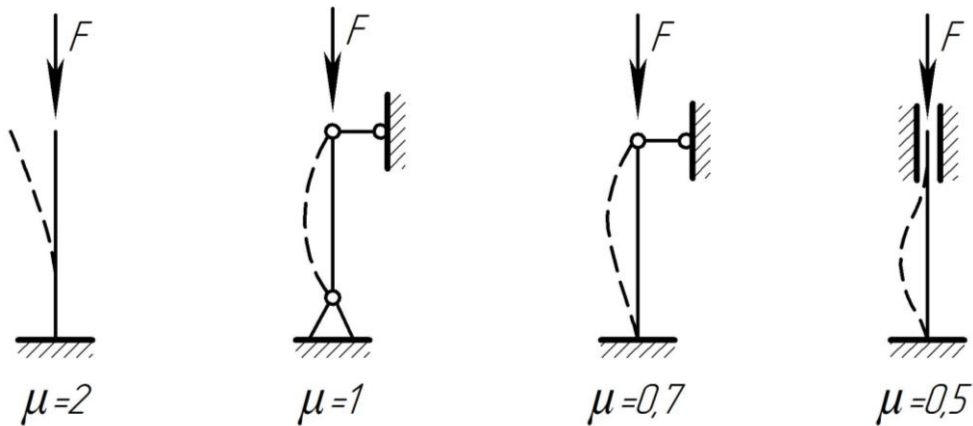


Рисунок 11.3

Межі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського

Формула Ейлера отримана з диференціального рівняння зігнутої осі стержня при шарнірно закріплених кінцях. Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, доки напруження у матеріалі не перевищує границю пропорційності.

$$\sigma_{KP} \leq \sigma_{пц}; \quad \sigma_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \leq \sigma_{пц},$$

де A – площа поперечного перетину стержня;

λ_{\max} – максимальна гнучкість стержня, залежить від геометрії стержня, способів закріплення його кінців. Визначають її за формулою

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

де i_{\min} – мінімальний радіус інерції поперечного перетину стержня, залежить від геометричних параметрів, визначають його за формулою

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}.$$

Формулу Ейлера використовують при гнучкостях, які більші за граничну гнучкість стержня λ_0 , яка залежить від матеріалу стержня і визначають її за формулою

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

Формулу Ейлера застосовують тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості матеріалу, з якого його виготовлено,

$$\lambda_{\max} \geq \lambda_0.$$

Як приклад, можна визначити граничну гнучкість для маловуглецевої сталі Ст.3, для якої $\sigma_{\text{тц}} = 200 \text{ МПа}$, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

$$\lambda_0 = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стержнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість $\lambda \geq 100$. Аналогічно визначають граничну гнучкість для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_0 = 80$; для дерева $\lambda_0 = 110$.

Якщо гнучкість стержнів менша від граничної, зокрема для сталей $\lambda = 40 \dots 100$, для визначення напружень застосовують емпіричну формулу Ясинського

$$\sigma_{\text{КР}} = a - b \cdot \lambda_{\max},$$

де a, b – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стержня. Для сталі Ст.3 ці величини дорівнюють

$$a = 310 \text{ МПа}; \quad b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стержні можна розраховувати на міцність при простому стиску, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулами

$$\sigma = F/A; \quad [\sigma] = \sigma_T (\sigma_{\text{КР}}) / n_{\text{ст}}.$$

Графік залежності критичних напружень від гнучкості для стержнів, виготовлених із маловуглецевої сталі, зображено на рис. 11.4.

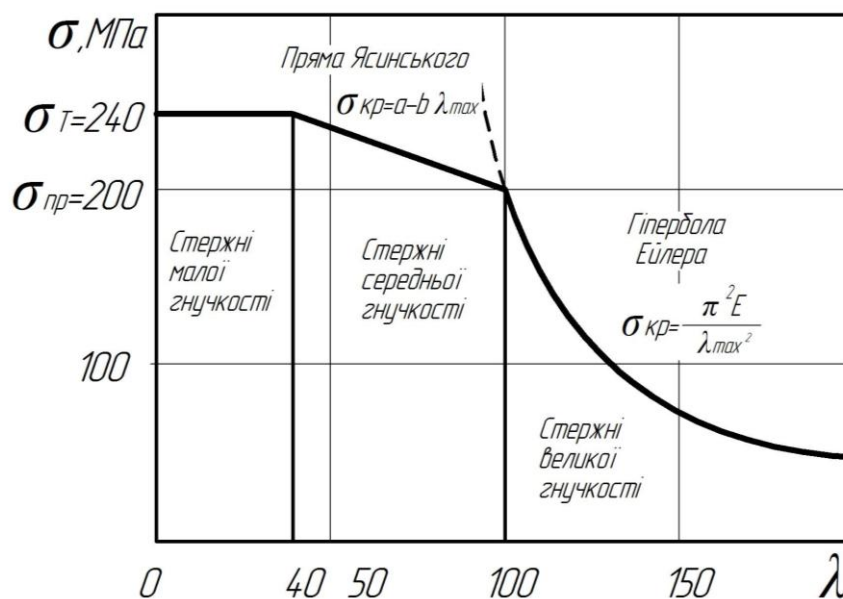


Рисунок 11.4

Зазначимо, що:

1) при малих значеннях λ критичне напруження дорівнює границі текучості $\sigma_{KP} = \sigma_T$;

2) при середніх значеннях λ критичне напруження менше від границі текучості, але більше ніж границя пропорційності $\sigma_{ny} < \sigma_{KP} < \sigma_T$;

3) при великих значеннях λ критичне напруження менше від границі пропорційності $\sigma_{KP} < \sigma_{ny}$.

Величину критичної сили, яку можна прикласти до стержня, отримують у такій послідовності. Визначають:

а) граничну гнучкість λ_0 ;

б) максимальну дійсну гнучкість стержня λ_{\max} .

в) маючи λ_0 і λ_{\max} , для визначення критичних напружень використовують одну з таких формул:

- при $\lambda_{\max} \geq \lambda_0$ формулу Ейлера, $\sigma_{KP} = \pi^2 E / \lambda_{\max}^2$;

- при $\lambda_{cp} \leq \lambda_{\max} \leq \lambda_0$ формулу Ясинського, $\sigma_{KP} = a - b \cdot \lambda_{\max}$;

- при $\lambda_{\max} < \lambda_{cp}$, формулу на стиск, $\sigma_{KP} = \sigma_T$;

г) маючи σ_{KP} , знаходять $F_{KP} = \sigma_{KP} \cdot A$.

Допустиме значення сили, прикладеної до стержня, визначають як

$$[F] = F_{KP} / n_{cm}.$$

У розрахунках на стійкість критичне напруження є руйнівним, як границя текучості або границя міцності в розрахунках на міцність. Тому введено поняття **допустимого напруження на стійкість** $[\sigma_{CT}]$, що визначається як частина критичного напруження

$$[\sigma_{CT}] = \sigma_{KP} / n_{cm}.$$

Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає при стиску, не перевищувало допустимого напруження на стійкість

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{A} \leq [\sigma_{CT}].$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, але й від гнучкості стержня. Тому введено поняття **коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на міцність при розрахунку на стійкість**

$$\varphi = \frac{[\sigma_{CT}]}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на міцність при стиску, $[\sigma] = \sigma_T / n$.

Коефіцієнт φ для кожного матеріалу можна визначити при будь-якому значенні гнучкості. Значення його для деяких матеріалів наведено у додатку 13.

Отже, умова стійкості

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma].$$

За допомогою умови стійкості розв'язують три типи задач.

1. Підбір поперечного перетину стержня або проектний розрахунок.

Виконується цей розрахунок визначенням площі перетину з умови стійкості

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}.$$

2. Визначення допустимого навантаження з умови стійкості

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A$$

виконується аналогічно до п.1, крім останньої дії, замість якого обчислюють допустиме навантаження.

3. Перевірний розрахунок. Перевірка стійкості, тобто виконання умови стійкості. Виконують у такій послідовності:

- визначають мінімальний момент інерції поперечного перетину стержня та мінімальний радіус інерції (при однаковому закріпленні у головних площинах);

- обчислюють гнучкість стержня;

- вибирають коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження φ ;

- отримані дані підставляють в умову стійкості й перевіряють її виконання.

Ця задача не має єдиного розв'язку, оскільки до нерівності входять дві невідомі величини: площа перетину A і коефіцієнт φ , який залежить від невизначених ще розмірів перетину, його форми та довжини стержня. Розв'язують задачу методом послідовних наближень з перевіркою проміжних результатів за допомогою умови стійкості. У першому наближенні беруть довільне значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження, орієнтовно $\varphi = 0,5 \dots 0,6$.

Визначення розмірів поперечного перетину стержня при стійкості ускладнюється ще й тим, що наперед не відомо, в якому діапазоні буде знаходитися дійсна гнучкість стержня, тобто якою з формул потрібно користуватися: Ейлера, Ясинського чи на простий стиск.

Задача №13

Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для заданого стержня (рис. до задачі №13, табл. до задачі №13), підібрати елементи його поперечного перетину із умови стійкості. Матеріал елементів – сталь Ст.3; $[\sigma]=160\text{МПа}$; $\lambda_0=100$. Елементи стержня приварені один до одного.

План розв'язування задачі:

1. Накреслити задану схему, розмістивши елементи (кутники, швелери чи двотаври) під стержнем.
2. Визначити площину найменшої жорсткості (площина, в якій деформується вісь при досягненні силою критичної величини).
3. Провести розрахунок стержня на стійкість у площині найбільшої гнучкості, користуючись таблицею сортаменту на фасонний прокат (додатки 9, 10, 11, 12) і таблицею коефіцієнтів зниження основного допустимого напруження (додаток 13).

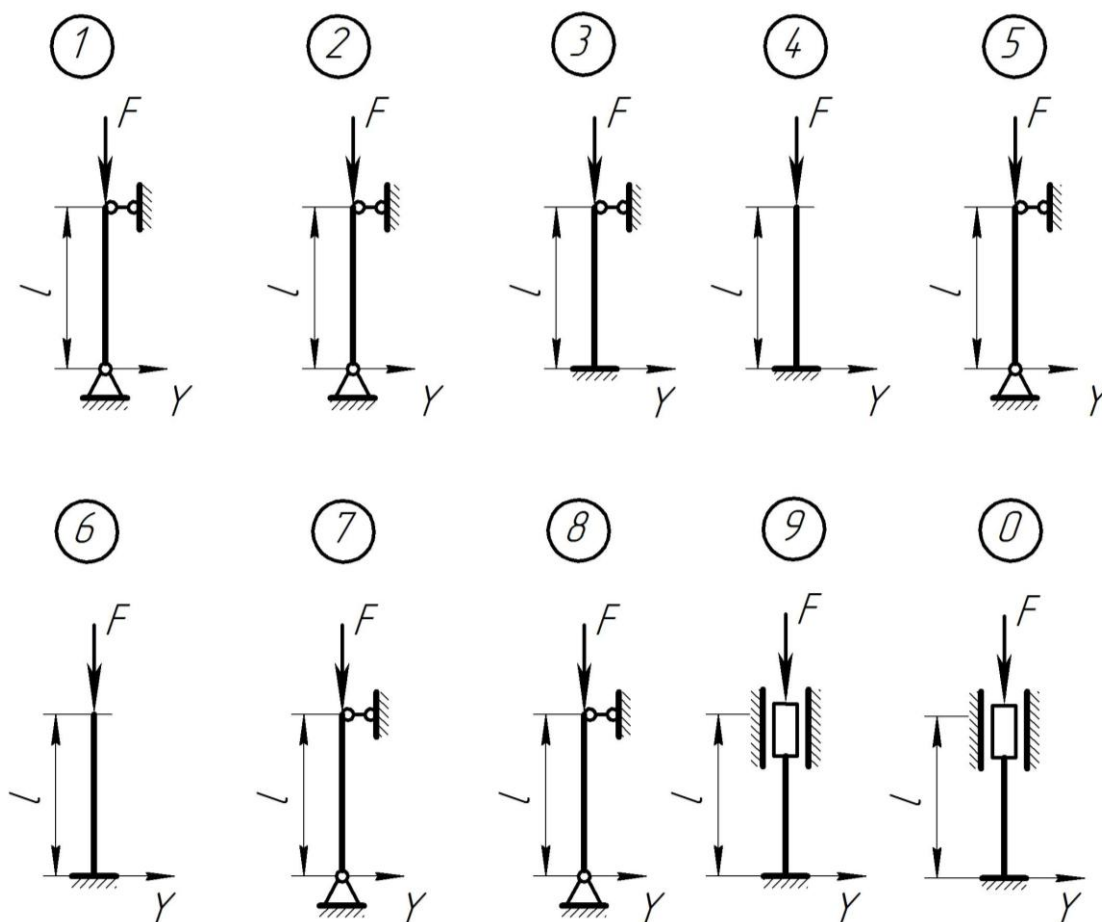
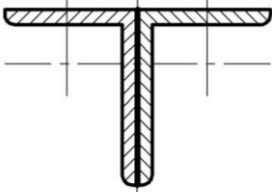
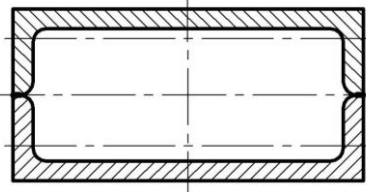
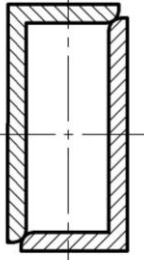
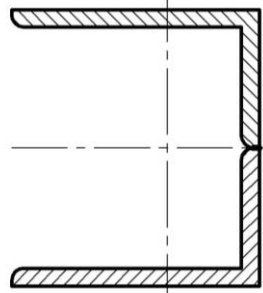
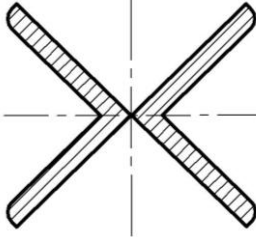
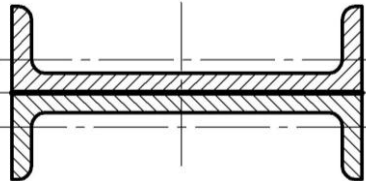
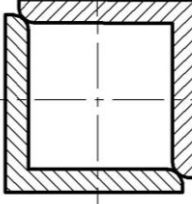
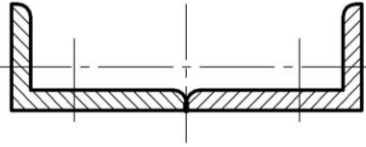
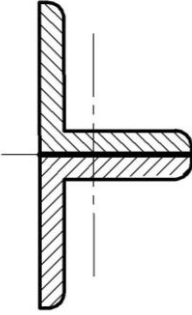
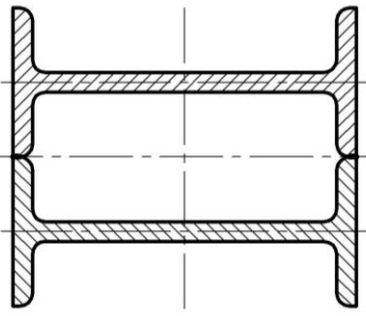


Рисунок до задачі №13

Таблиця до задачі №13

№ з/п	F , кН	l , м	Поперечний перетин	№ з/п	F , кН	l , м	Поперечний перетин
1	130	2,5		6	130	2,0	
2	180	4,5		7	180	2,5	
3	100	1,5		8	100	4,0	
4	80	3,0		9	80	2,0	
5	90	3,5		0	90	6,0	

Приклад розв'язування задачі №13

Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для заданого стержня (рис. 11.5а) підібрати двотавровий перетин. Матеріал стержня – сталь Ст.3; $[\sigma]=160\text{МПа}$; $\lambda_0=100$; $F=200\text{кН}$; $l=3\text{м}$.

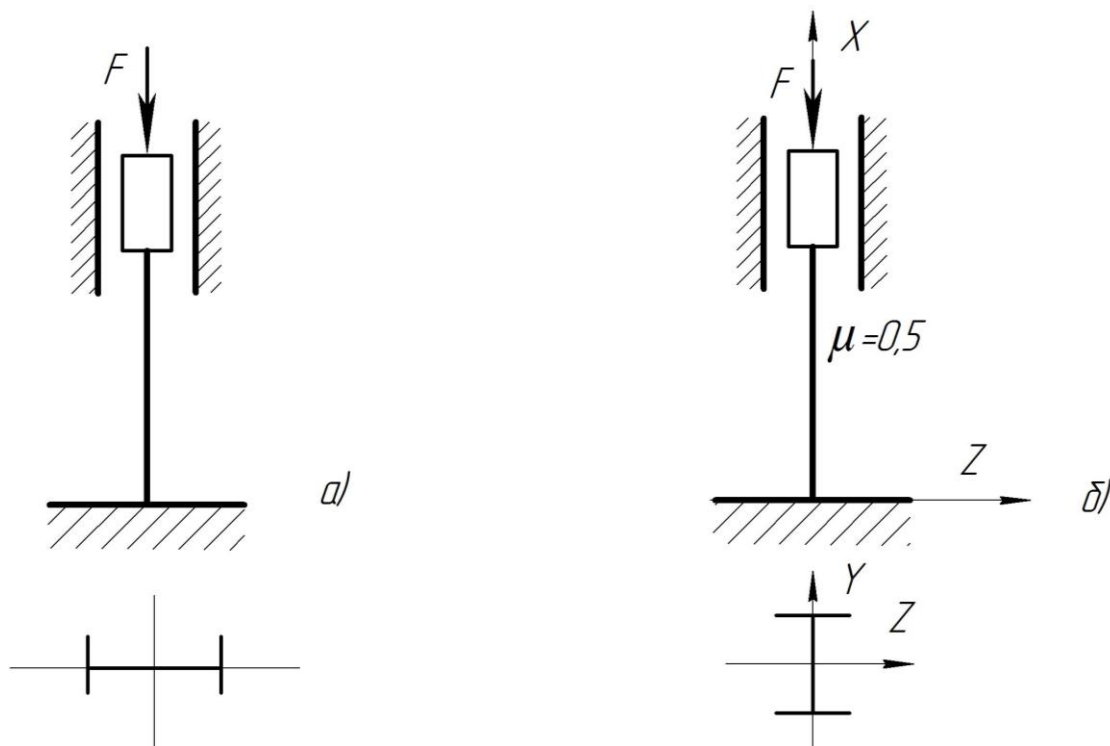


Рисунок 11.5

Розв'язування

Розміщуємо поперечний перетин під стержнем (рис. 11.5б).

Розрахунок проводимо методом послідовних наближень.

Перше наближення, приймаємо значення коефіцієнта поздовжнього згину $\varphi_1 = 0,5$.

З умови стійкості визначаємо площу поперечного перетину

$$A_1 \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{200}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^3} = 25,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

З ГОСТ 8239-56 (додаток 9) вибираємо двотавр №10, для якого: $A_{\text{дв}1} = 25,4 \text{ см}^2$, $i_{y1} = 2,12 \text{ см}$, $i_{z1} = 7,51 \text{ см}$.

Визначаємо гнучкості стержня у двох площинах:

$$\lambda_{y1} = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 300}{2,12} \approx 71;$$

$$\lambda_{z1} = \frac{\mu \cdot l}{i_z} = \frac{0,5 \cdot 300}{7,51} \approx 20.$$

Оскільки $\lambda_{Y1} > \lambda_{Z1}$, то розрахунок ведемо у площині XOZ (див. рис. 11.5б). Використовуючи метод лінійної інтерполяції, визначаємо уточнене значення коефіцієнта поздовжнього згину, що відповідає гнучкості $\lambda_{Y1} = 71$. З таблиці (додаток 9) випишемо:

при $\lambda = 70$; $\varphi = 0,81$; при $\lambda = 80$; $\varphi = 0,75$.

Визначимо коефіцієнт зниження основних допустимих напружень для гнучкості $\lambda_{Y1} = 71$

$$\varphi'_1 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 1 = 0,804.$$

Визначаємо дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 1} = \frac{F}{A_{\partial 1}} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{25,4 \cdot 10^{-4}} = 78,7 \text{ МПа}.$$

Визначаємо допустиме напруження

$$[\sigma]_{cm1} = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0,804 \cdot 160 = 129 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає

$$\frac{|\sigma_{\partial 1} - [\sigma]_{cm1}|}{[\sigma]_{cm1}} \cdot 100\% = \frac{78,7 - 129}{129} \cdot 100\% = 38,7\%, \text{ що недопустимо.}$$

Друге наближення, приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,804}{2} = 0,652.$$

Тоді

$$A_2 \geq \frac{200}{0,652 \cdot 160 \cdot 10^3} = 19,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 19,2 \text{ см}^2.$$

Приймаємо двотавр №16 (додаток 9), для якого $A_{\partial 2} = 20,2 \text{ см}^2$; $i_{y2} = 1,70 \text{ см}$; $i_{z2} = 6,57 \text{ см}$.

Визначаємо гнучкість стержня

$$\lambda_{Y2} = \frac{0,5 \cdot 300}{1,70} = 88,$$

що відповідає

$$\varphi'_2 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 8 = 0,702.$$

Дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 2} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{20,2 \cdot 10^{-4}} = 99 \text{ МПа.}$$

Допустиме напруження

$$[\sigma]_{cm2} = 0,702 \cdot 160 = 112 \text{ МПа.}$$

Недонапруження становить

$$\frac{112 - 99}{112} \cdot 100\% = 11,6\%, \text{ що більше } 5\%.$$

Третє наближення, приймаємо

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,652 + 0,702}{2} = 0,677.$$

Тоді

$$A_3 = \frac{200}{0,677 \cdot 160 \cdot 10^3} = 18,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 18,5 \text{ см}^2.$$

Приймаємо двотавр №14 (додаток 9), для якого $A_{\partial \partial 3} = 17,4 \text{ см}^2$;
 $i_{y3} = 1,55 \text{ см}$; $i_{z3} = 5,73 \text{ см}$.

Визначаємо гнучкість

$$\lambda_{z3} = \frac{0,5 \cdot 300}{1,55} = 97,$$

що відповідає

$$\varphi_3' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 7 = 0,627.$$

Дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 3} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{17,4 \cdot 10^{-4}} = 115 \text{ МПа.}$$

Допустимі напруження

$$[\sigma]_{cm3} = 0,627 \cdot 160 = 100 \text{ МПа.}$$

Перенапруження становить $\frac{115 - 100}{100} \cdot 100\% = 15\%$, що недопустимо.

Отже, приймаємо для даного стержня поперечний перетин – двотавр №16, для якого недонапруження складає 11,6%, тому що для стержня перетином з двотавра №14 перенапруження складає 15%, що недопустимо.

12. ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ

Динамічне навантаження – це навантаження, яке частково або повністю спричинене силами інерції (при прискореному русі деталей, при обертанні їх та коливанні), а також *при миттєвому навантаженні та ударах*. Одні і ті ж елементи конструкцій та їх матеріал деформуються по-різному залежно від того, як вони навантажені: статично чи динамічно.

Особливість руйнування при динамічній дії сил – та, що пластичні матеріали, такі як маловуглецева сталь, при миттєвому (ударному) навантаженні проявляють крихкі властивості, тобто руйнуються без значних залишкових деформацій і при значно меншій енергії деформування. *Механічну характеристику матеріалу, що відображає його здатність чинити опір ударному навантаженню, називають ударною в'язкістю*. Ударна в'язкість характеризується площею діаграми напружень « $\varepsilon - \sigma$ » до руйнування (див. розділ 2). Модулі пружності при динамічному навантаженні теж інші, ніж при статичному. В опорі матеріалів використовують **наближену теорію удару**, вважаючи, що і **закон Гука виконується, модулі пружності незмінні і немає розсіювання енергії при ударі**.

Робота деяких машин (пресування, забивання свай та ін.) супроводжуються ударним навантаженням, наприклад, падіння вантажу Q з деякої висоти h на нерухому пружну систему. У момент удару в конструкції напруження і деформації досягають максимальних значень.

Ударне навантаження вільно падаючим тілом

У системах, на які падає вантаж, можуть виникати різні види деформацій: стиск (рис. 12.1а), згин (рис. 12.1б,в), кручення (рис. 12.1г).

Для отримання формул міцності і жорсткості при такому навантаженні (у наближеному вигляді) приймають такі припущення:

1. Прискорення і сила інерції тіла, що спричиняє удар, зростають не змінюючи напрямку від нуля до кінцевого значення.
2. Тіло, що зазнає удару, має лише один ступінь вільності.
3. Тіло, що ударяє – абсолютно жорстке і не деформується; удар – пружний, але тіла після удару переміщуються разом (немає «відскоку»).
4. Деформації того тіла, що зазнало удару, – пружні і закон Гука для нього прийнятний.
5. Масою пружної системи при наближених розрахунках нехтують.
6. Розсіюванням енергії при ударі нехтують. Кінетична енергія вантажу, який падає, повністю переходить у потенціальну енергію пружної системи.

Розглянемо найпростіший випадок ударного навантаження вертикальної колони вільно падаючим абсолютно твердим тілом (рис. 12.1а).

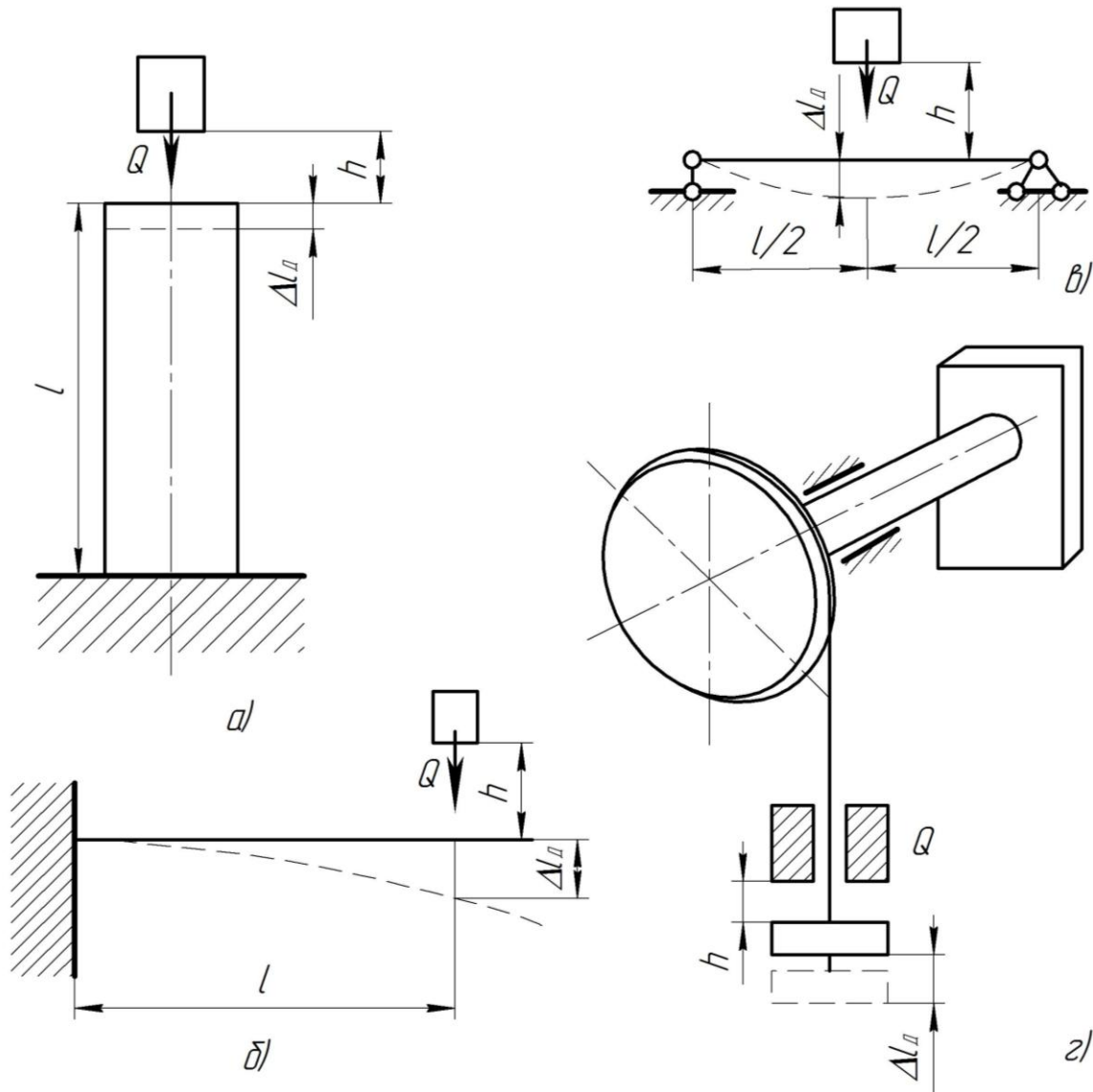


Рисунок 12.1

Скористатися принципом Даламбера у цьому випадку неможливо, оскільки невідоме прискорення при деформуванні самої колони. Користуючись законом збереження енергії, складемо рівняння балансу енергії системи «падаюче тіло – конструкція» для моменту найбільшого переміщення Δl_D

$$K_T = U_{\text{кол}}, \quad (12.1)$$

де K_T – кінематична енергія тіла, що падає, з врахуванням переміщення його (разом з динамічним укороченням колони на Δl_D) аж до зупинки в кінці максимального переміщення точки удару

$$K_T = Q(h + \Delta l_D). \quad (12.2)$$

Потенціальна енергія пружної деформації, що накопичиться при такому укороченні колони

$$U = \frac{1}{2} N_D \cdot \Delta l_D, \quad (12.3)$$

де N_D – найбільше внутрішнє зусилля при пружному деформуванні,

$N_D \neq Q$, це невідомий параметр, так як і Δl_D .

Запишемо зв'язок між цими параметрами, вважаючи, що закон Гука виконується:

$$\Delta l_D = \frac{N_D \cdot l}{E \cdot A}, \quad \text{звідки} \quad N_D = \frac{\Delta l_D \cdot E \cdot A}{l}.$$

Енергія деформування буде відповідно до (12.3)

$$U = \frac{\Delta l_D^2 \cdot E \cdot A}{2l}. \quad (12.4)$$

Згідно балансу енергій (12.2) і (12.4) порівняємо

$$Q(h + \Delta l_D) = \frac{\Delta l_D^2 \cdot E \cdot A}{2l}. \quad (12.5)$$

Запишемо квадратне рівняння у найпростішому вигляді

$$\Delta l_D^2 - \frac{2Q \cdot l}{E \cdot A} \cdot \Delta l_D - \frac{2Q \cdot l \cdot h}{E \cdot A} = 0. \quad (12.6)$$

Вираз $\frac{Q \cdot l}{E \cdot A}$ – це вкорочення (згідно закону Гуку) колони при статичній дії ваги Q , тобто це Δl_{CT} (переміщення перетину пружної системи від статичної дії вантажу).

Динамічне вкорочення можна отримати у вигляді

$$\Delta l_D = \Delta l_{CT} + \sqrt{\Delta l_{CT}^2 + 2\Delta l_{CT} \cdot h}, \quad (12.7)$$

або

$$\Delta l_D = \Delta l_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{CT}}} \right) = \Delta l_{CT} \cdot k_D. \quad (12.8)$$

Вираз у дужках вважають **коефіцієнтом динамічності при ударі вільно падаючим тілом**.

При $h=0$, тобто при падінні тіла з нульової висоти (або ж при так званому миттєвому прикладенні сили) $k_D = 1 + \sqrt{1} = 2$.

Пружні деформації частіше всього набагато менші ніж h , тому коефіцієнт динамічності можна брати

$$k_D \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{СТ}}}. \quad (12.9)$$

Чим більший знаменник, тим менший k_D . Це означає, що податливіша деформуванню (менш жорстка) система є міцнішою при ударах і при коливаннях.

При отриманні залежності для коефіцієнта динамічності, нехтують власною масою тіла, що деформується. Це допускається лише для наближених розрахунків.

Аналогічно визначимо переміщення і напруження бруса при осьовому ударі (рис. 12.2).

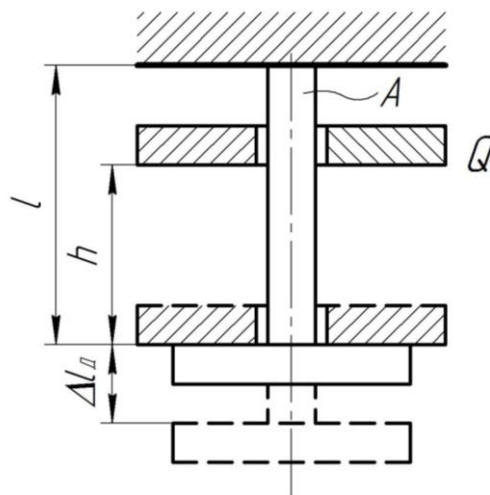


Рисунок 12.2

На основі лінійної залежності між силою та переміщеннями можна записати, що

$$\sigma_D = \sigma_{СТ} \cdot k_D; \quad \tau_D = \tau_{СТ} \cdot k_D,$$

де σ_D, τ_D – динамічні нормальні та дотичні напруження;

$\sigma_{СТ}, \tau_{СТ}$ – статичні нормальні та дотичні напруження, визначені в елементах конструкції від статичної дії вантажу.

Задача №14

Визначення максимальних динамічних напружень і переміщень при ударі

Для заданої пружної системи (рис. до задачі №14, табл. до задачі №14) визначити максимальні напруження при ударі, що виникають при падінні на неї з висоти $h=0,5\text{м}$ вантажу $Q=100\text{Н}$ та величину переміщення у зазначеному перетині (див. табл. до задачі №14) у напрямі удару. Матеріал пружної системи – сталь; $l=2\text{м}$; $d=4\text{см}$.

План розв'язування задачі:

1. Визначити, на які види деформації працюють елементи конструкції.
2. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів при статичній дії вантажу Q .
3. Визначити максимальні статичні напруження в елементах конструкції.
4. Визначити статичне переміщення у заданому перетині.
5. Визначити статичне переміщення у місці удару.
6. Визначити динамічний коефіцієнт (без врахування власної ваги пружної системи).
7. Визначити максимальні динамічні напруження.
8. Визначити переміщення під час удару у заданому перетині ($f_A^{\text{верт}}$ або Θ_B).

Таблиця до задачі №14

№ з/п	$D, \text{ см}$	Переміщення
1	4,5	$f_A^{\text{верт}}$
2	4,0	Θ_B
3	5,0	$f_A^{\text{верт}}$
4	6,0	Θ_B
5	7,0	$f_A^{\text{верт}}$
6	8,0	Θ_B
7	9,0	$f_A^{\text{верт}}$
8	10,0	Θ_B
9	11,0	$f_A^{\text{верт}}$
0	12,0	Θ_B

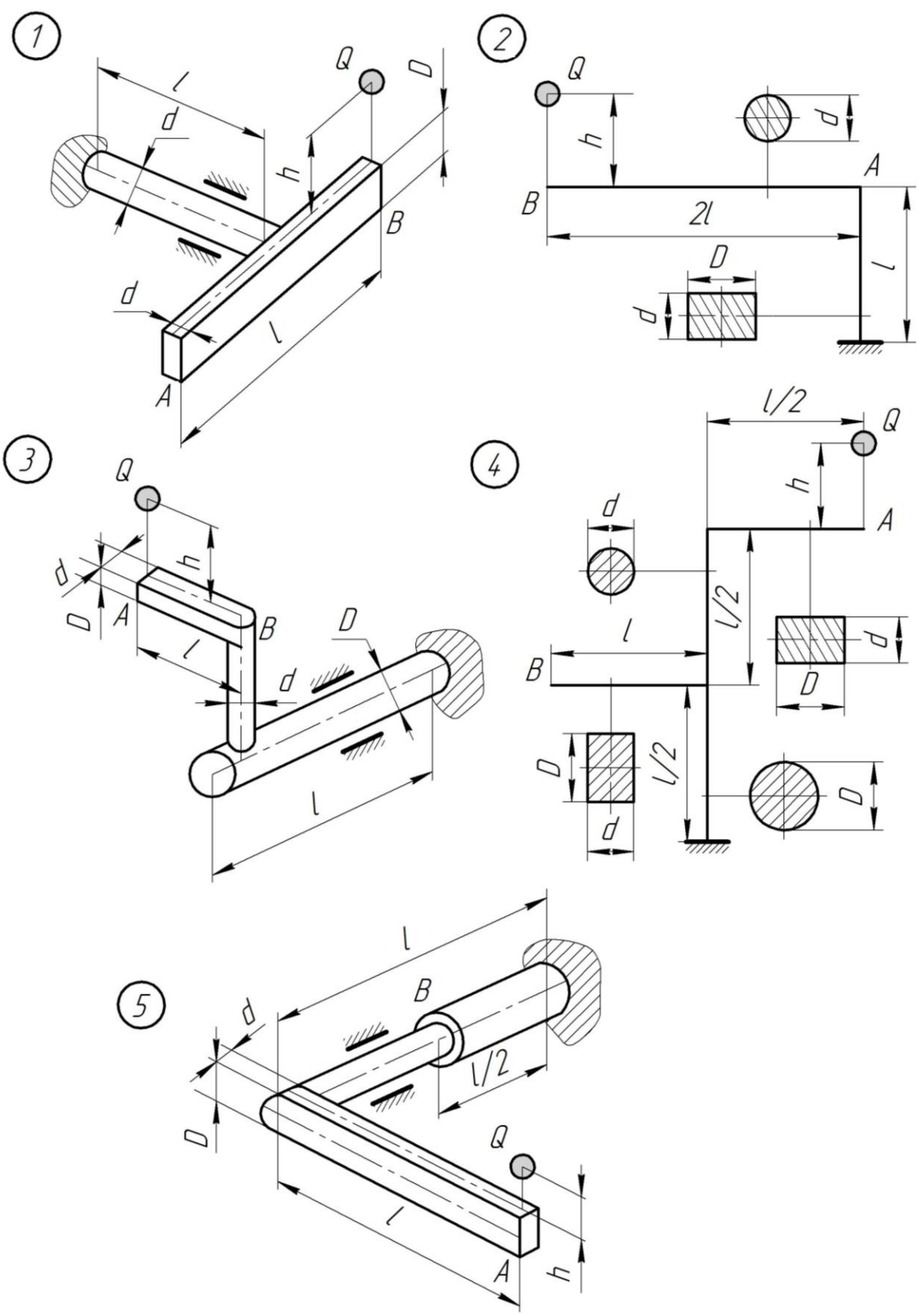


Рисунок до задачі №14

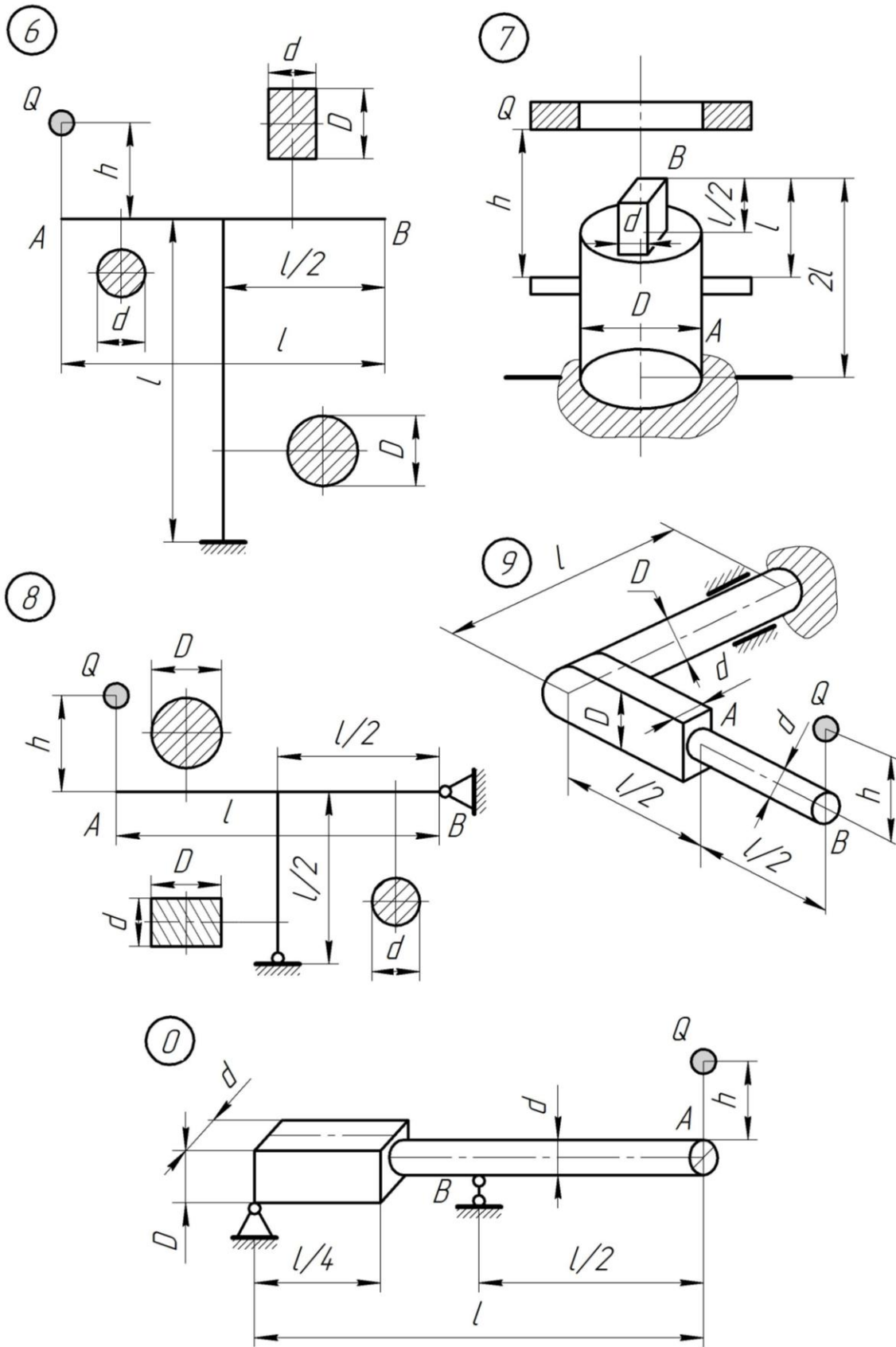


Рисунок до задачі №14 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №14.1

Для заданої пружної системи (рис. 12.3а) визначити максимальні напруження, що виникають при ударі об неї вантажу $Q = 100\text{Н}$, що падає з висоти $h = 0,5\text{м}$ та величину переміщення у перетині, на який падає вантаж. Дано: $E = 2 \cdot 10^{11}\text{Па}$; $l = 2\text{м}$; $d = 4\text{см}$; $D = 5\text{см}$.

Розв'язування

Задана стержнева система (рис. 12.3б) працює на такі види деформацій: ділянки AB , BC – прямий поперечний згин.

Визначаємо максимальні внутрішні силові фактори при статичній дії навантаження $Q = 100\text{Н}$. Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 12.3в).

Ділянка AB , перетин B : $M_{зг.В} = 100\text{Нм}$.

Ділянка BC , $M_{зг.ВС} = 100\text{Нм}$.

Визначаємо максимальні статичні напруження.

Перетин B :

$$\sigma_{СТ.В} = \frac{M_{зг.В}}{W_{01}} = \frac{100}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 15,9\text{МПа},$$

де

$$W_{01} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6,28\text{см}^3 = 6,28 \cdot 10^{-6}\text{м}^3.$$

Ділянка BC :

$$\sigma_{СТ.ВС} = \frac{M_{зг.ВС}}{W_{02}} = \frac{100}{12,3 \cdot 10^{-6}} = 8,15\text{МПа},$$

де

$$W_{02} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 5^3}{32} = 12,3\text{см}^3 = 12,3 \cdot 10^{-6}\text{м}^3.$$

Визначаємо статичне переміщення перетину, на який падає вантаж, використовуючи графоаналітичний метод розв'язку інтегралу Мора (рис. 12.3г,д)

$$\begin{aligned} \Delta l_{СТ} &= \frac{1}{EI_{01}} \omega_1 \cdot M_{C1} + \frac{1}{EI_{02}} \omega_2 \cdot M_{C2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \left(\frac{50 \cdot 0,67}{12,56} + \frac{200 \cdot 1}{30,6} \right) \cdot \frac{1}{10^{-8}} = 5,93 \cdot 10^{-3}\text{м}; \end{aligned}$$

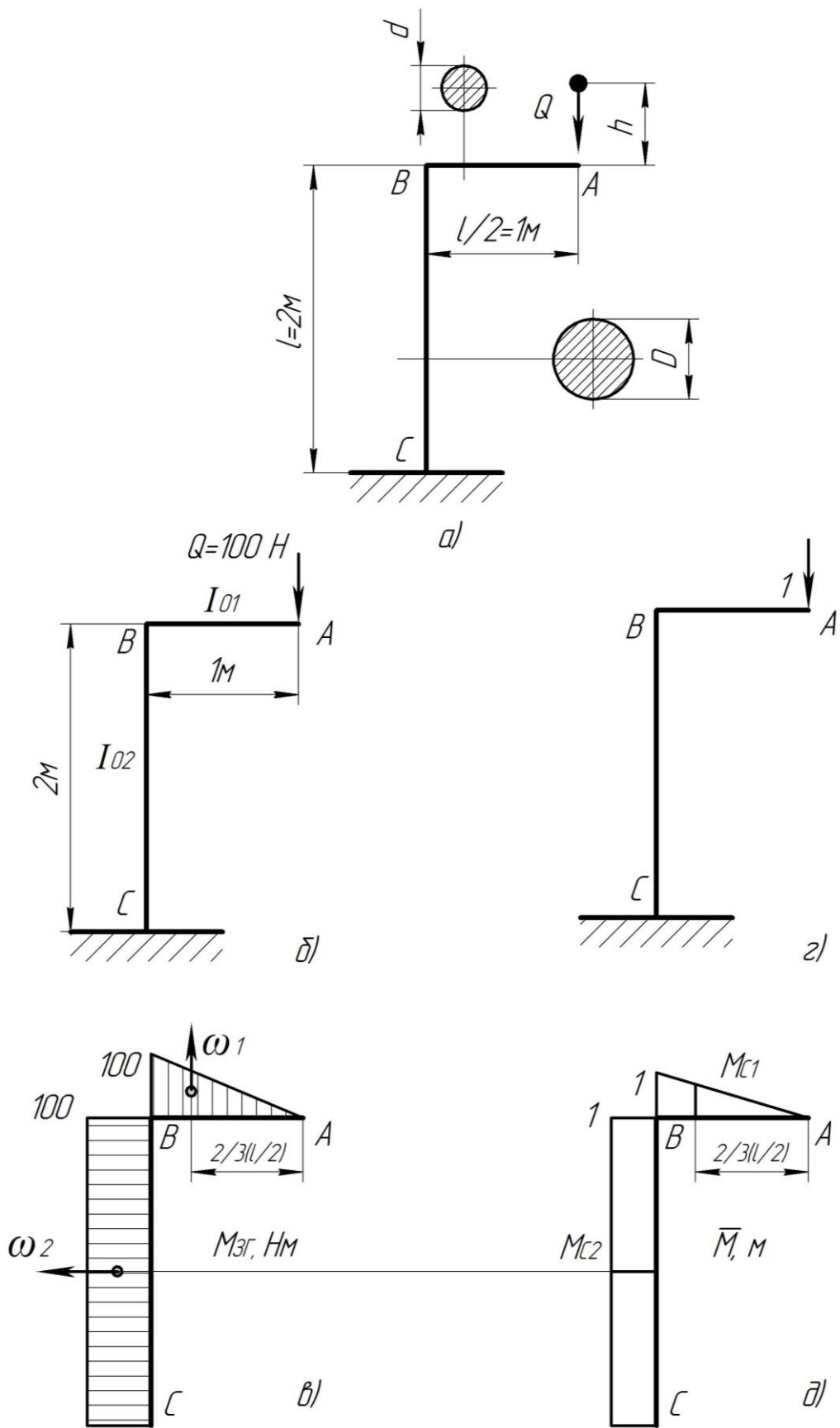


Рисунок 12.3

де $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 = 50;$ $\omega_2 = 100 \cdot 2 = 200;$

$$M_{C1} = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0,67; \quad M_{C2} = 1;$$

$$I_{01} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4 = 12,56 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{02} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 5^4}{64} = 30,6 \text{ с} = 30,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо динамічний коефіцієнт

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta l_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{5,93 \cdot 10^{-3}}} = 14,0.$$

Визначаємо динамічні напруження в елементах конструкції:
перетин B ,

$$\sigma_{D.B} = \sigma_{CT.B} \cdot k_D = 15,9 \cdot 14 = 223 \text{ МПа}.$$

ділянка BC ,

$$\sigma_{D.BC} = 8,15 \cdot 14 = 114 \text{ МПа}.$$

Вертикальний прогин перетину A під час удару

$$f_{D.A} = \Delta l_{CT.A} \cdot k_D = 5,93 \cdot 14 = 83 \text{ мм},$$

де $\Delta l_{CT.A} = \Delta l_{CT}$.

Приклад розв'язування задачі №14.2

Для заданої пружної системи (рис. 12.4) визначити максимальні напруження, що виникають при ударі об неї вантажу $Q = 100H$, що падає з висоти $h = 0,5m$ та величину переміщення перетину B , на який падає вантаж. Дано: $E = 2 \cdot 10^5 MPa$; $l = 2m$; $d = 4cm$; $D = 4cm$; $G = 8 \cdot 10^4 MPa$.

Розв'язування

Задана стержнева система працює на такі види деформацій (рис. 12.4a): ділянки BA та AC – згин; ділянка CK – кручення.

Визначаємо максимальні внутрішні силові фактори при статичній дії навантаження $Q = 100H$ (рис. 12.4б).

Ділянка BA , перетин A ; $M_{зг.А} = 100 \cdot 1 = 100Hm$.

Ділянка AC , перетин C ; $M_{зг.С} = 100 \cdot 2 = 200Hm$.

Ділянка CK , $M_{кр.С} = 200Hm$.

Будуємо епюри внутрішніх силових факторів (рис. 12.4в).

Визначаємо максимальні статичні напруження.

Перетин A :
$$\sigma_{СТ.А} = \frac{M_{зг.А}}{W_{01}} = \frac{100}{6,28} = 15,9 MPa,$$

де
$$W_{01} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6,28 cm^3 = 6,28 \cdot 10^{-6} m^3.$$

Перетин C :
$$\sigma_{СТ.С} = \frac{M_{зг.С}}{W_{02}} = \frac{200}{10,7} = 18,7 MPa,$$

де
$$W_{02} = \frac{d \cdot D^2}{6} = \frac{4^3}{6} = 10,7 cm^3 = 10,7 \cdot 10^{-6} m^3.$$

Перетин CK :
$$\tau_{СТ.СК} = \frac{M_{кр}}{W_P} = \frac{200}{12,6} = 15,9 MPa,$$

де
$$W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 4^3}{16} = 12,6 cm^3 = 12,6 \cdot 10^{-6} m^3.$$

Визначаємо статичне переміщення перетину, на якій падає вантаж

$$\Delta l_{СТ} = \Delta l_{СТ.КР} + \Delta l_{СТ.зг} = 0,398 + 0,00679 = 0,0466m,$$

де $\Delta l_{СТ.КР}$ – переміщення перетину від деформації кручення ділянки CK

$$\Delta l_{СТ.КР} = \varphi \cdot 2 = 0,0199 \cdot 2 = 0,0398m;$$

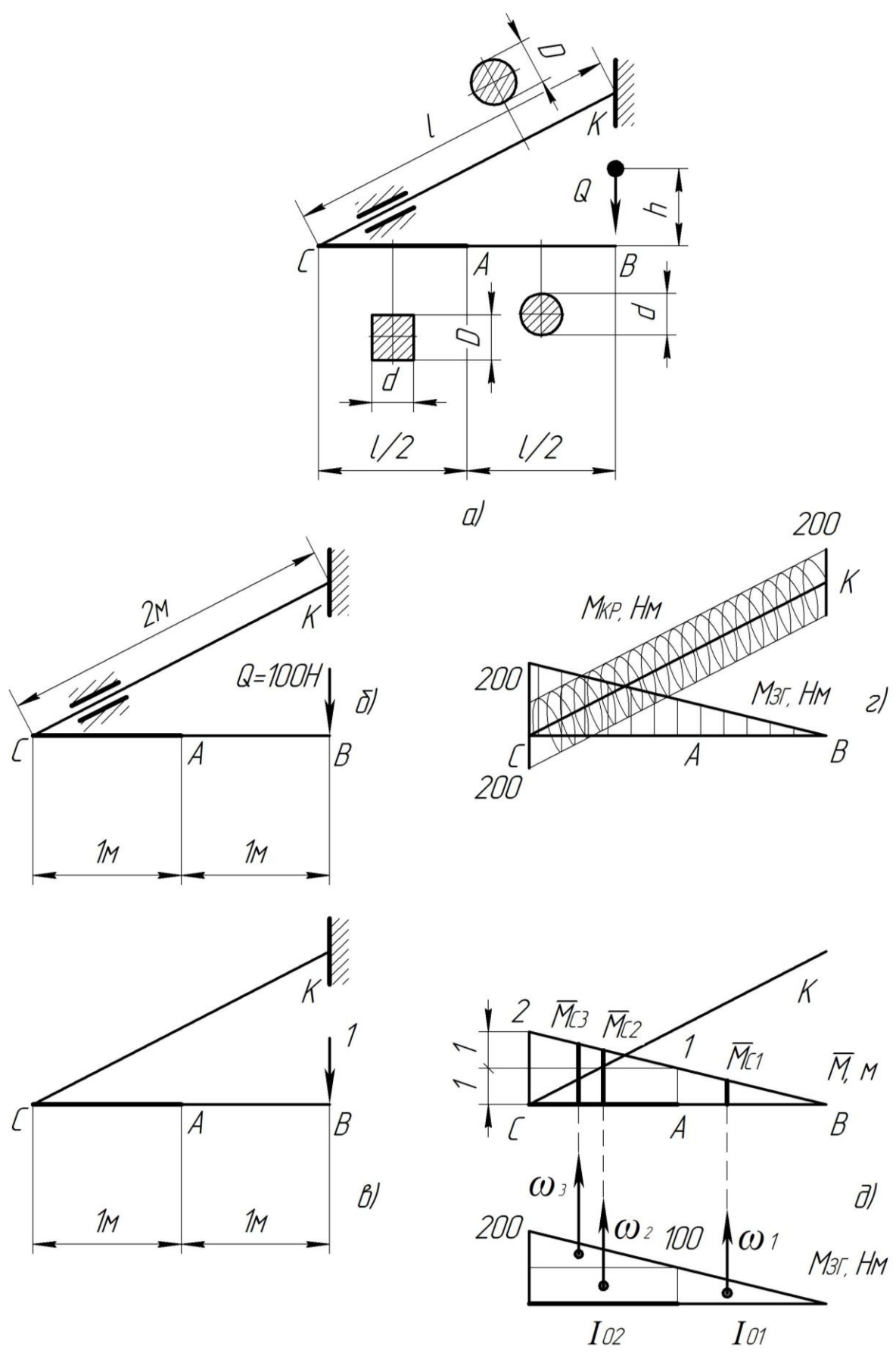


Рисунок 12.4

$$\varphi = \frac{M_{KP.CK} \cdot l_{CK}}{G \cdot I_P} = \frac{200 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,1 \cdot 10^{-8}} = 0,0199 \text{ рад};$$

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = 25,1 \text{ см}^4 = 25,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$\Delta l_{CT.3Г}$ – переміщення перетину B від деформації згину ділянки BC , визначаємо графоаналітичним методом розв'язку інтегралу Мора (рис. 12.4г)

$$\begin{aligned} \Delta l_{CT.3Г} &= \frac{\omega_1 \cdot M_{C1}}{E \cdot I_{01}} + \frac{1}{E \cdot I_{02}} (\omega_2 \cdot M_{C2} + \omega_3 \cdot M_{C3}) = \\ &= \frac{50 \cdot 0,667}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12,56 \cdot 10^{-8}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 21,3 \cdot 10^{-8}} (100 \cdot 1,5 + 50 \cdot 1,667) = \\ &= 6,79 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

де $\omega_1 = 0,5 \cdot 100 = 50$;

$M_{C1} = 0,667$;

$\omega_2 = 100 \cdot 1 = 100$;

$M_{C2} = 1,5$;

$\omega_3 = 50$;

$M_{C3} = 1 + 0,667 = 1,667$;

$$I_{01} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4 = 12,56 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{02} = \frac{d \cdot D^3}{12} = \frac{4^4}{12} = 21,3 \text{ см}^4 = 21,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо динамічний коефіцієнт

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{0,0466}} = 5,74.$$

Визначаємо максимальні динамічні напруження та переміщення перетину B у момент падіння вантажу:

$$\sigma_{D.A} = \sigma_{CT.A} \cdot k_D = 15,9 \cdot 5,74 = 91,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{D.C} = \sigma_{CT.C} \cdot k_D = 18,7 \cdot 5,74 = 107 \text{ МПа};$$

$$\tau_{D.CK} = \tau_{CT.CK} \cdot k_D = 15,9 \cdot 5,74 = 91,3 \text{ МПа};$$

$$f_D = \delta_{CT} \cdot k_D = 0,0466 \cdot 5,74 = 0,268 \text{ м}.$$

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608с.
2. Варіанти задач для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Опір матеріалів». Частина 1 [Текст] / Т.І. Рибак, А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2003. – 24с.
3. Варіанти задач і приклади їх розв'язку для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Опір матеріалів». Частина 1. Для студентів напрямів підготовки «Інженерна механіка», «Машинобудування» [Текст] / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик, О.В. Ферендюк. – Тернопіль, 2010. – 80с.
4. Дарков, А.В., Шпиро, Г.С. Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1969.
5. Иосилевич, Г.Б. Прикладная механика [Текст] / Г.Б. Иосилевич и др. – М.: Высшая школа, 1989.
6. Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов [Текст] / Г.М. Ицкович. – М.: Высшая школа, 1986. – 352с.
7. Заблонский, К.И. Прикладная механика [Текст] / К.И. Заблонский и др. – М.: Высшая школа, 1989.
8. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Визначення переміщень при згині» [Текст] / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2006. – 35с.
9. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Розрахунок кривих брусів. Розрахунок на стійкість центрально стиснутих стержнів» [Текст] / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2002. – 30с.
10. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Складний опір» [Текст] / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2001. – 32с.
11. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Статично невизначені системи» для напрямів підготовки «Інженерна механіка» і «Машинобудування» денної та заочної форм навчання [Текст] / Т.І. Рибак, А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2007. – 35с.
12. Опір матеріалів [Текст]; за ред. С.Е. Гарфа. – К.: Вища школа, 1972. – 230с.
13. Опір матеріалів [Текст]; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 1974. – 304с.

14. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності [Текст]; за заг. ред. В.Т. Піскунова: у 2ч., 5 кн. [Текст]. – К.: Вища школа, 1995.
15. Опір матеріалів. Теорія і практика розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів механізмів та споруд: навч. посібник [Текст] /В.С. Кравчук, П.М. Калініченко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко; за ред. О.Ф. Дашенка. – Одеса: ВМВ, 2009. – 316с.
16. Опір матеріалів. Методичний посібник для виконання контрольних робіт. Частина 2. Для студентів денної та заочної форм навчання [Текст] /А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2011. – 92с.
17. Посацький, Л.С. Опір матеріалів [Текст] /Л.С. Посацький. – Львів: в-во Львівського університету, 1973. – 440с.
18. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] /Миролюбов И.Н. и др. – М.: Высшая школа, 1974.
19. Рибак, Т.І. Пошукове конструювання на базі оптимізації ресурсу мобільних сільськогосподарських машин. Навчальний посібник [Текст] / Т.І. Рибак. – Тернопіль, 2002. – 332с.
20. Сопротивление материалов: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных [Текст] / А.В. Дарков, Б.Н. Кутуков. – М.: Высшая школа, 1985.
21. Сопротивление материалов [Текст] /Под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 775с.
22. Технічна механіка [Текст] /О.О. Ердеді, І.В. Аникін, Ю.О. Медведєв, О.С. Чуйков. – К.: Вища школа, 1983. – 368с.
23. Техническая механика [Текст] /А.А. Эрдеди, И.В. Аникин, Ю.А. Медведєв, А.С. Чуйков. – М.: Высшая школа, 1980. – 446с.
24. Хомик, Н.І. Технічна механіка: курс лекцій [Текст] /Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль, 2011. – 208с.
25. Хомик, Н.І. Технічна механіка: навчально-методичний посібник до курсової роботи [Текст] /Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2013. – 192с.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

(повна назва вищого навчального закладу)

технічної механіки, сільськогосподарських машин і транспортних технологій

(повна назва кафедри, циклової комісії)

КУРСОВА РОБОТА

з Опору матеріалів

(назва дисципліни)

на тему: _____

Студента (ки) 2 курсу ХС групи

=(прізвище та ініціали)

напряму підготовки машинобудування
спеціальності Машини та обладнання
сільськогосподарського виробництва

Керівник _____

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала _____

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

Члени комісії

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

м. Тернопіль - 20 рік

ЗМІСТ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Задача №1. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу і стиску	3
Задача №2. Розрахунок статично невизначеної стержневої системи	7
Задача №3. Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів	10
Задача №4. Розрахунок вала на кручення	14
Задача №5. Аналіз напруженого стану	19
Задача №6. Побудова епюр перерізуючих сил і згинальних моментів для консолі	22
Задача №7. Побудова епюр перерізуючих сил і згинальних моментів для балки на двох опорах	24
Задача №8. Розрахунок на міцність при згині балок	26
Задача №9. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при згині балок	30
Задача №10. Розрахунок статично невизначеної рами	35
Задача №11. Підбір поперечного перетину балки при деформації косоного згину	40
Задача №12. Розрахунок вала на згин з крученням	44
Задача №13. Розрахунок на стійкість стиснутого стержня	48
Задача №14. Визначення максимальних динамічних напружень і переміщень при ударі	50

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ			
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата	Зміст курсової роботи	Літ.	Арк.	Аркушів
Розроб.		Антонюк В.І					2	1
Перевір.		Довбуш А.Д.						
Консульт.								
Н. контр.								
Затв.		Рибак Т.І.				ФХМ, гр. ХС-21		

ЗАДАЧА 3

Визначення моментів інерції плоских перетинів

Для заданої плоскої фігури (рис. 3.1) визначити: положення головних центральних осей інерції; величини осьових моментів інерції та осьових моментів опору відносно них, якщо двотавр №33.

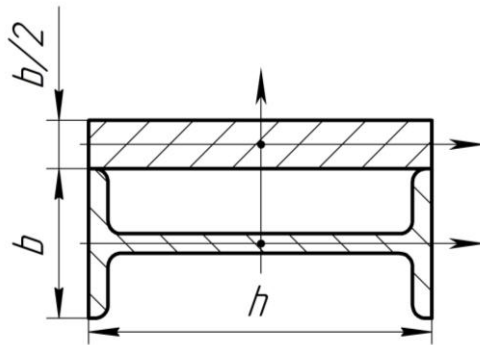


Рисунок 3.1

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ			
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата				
Розроб.	Антонюк В.І.				Визначення моментів інерції плоских перетинів	Літ.	Арк.	Аркшів
Перевір.	Довбун А.Д.						10	3
Консульт.						ФХМ, гр. ХС-21		
Н. контр.								
Затв.	Рибак Т.І.							

Розв'язування задачі 3

Геометричні характеристики вказаного прокатного профілю виписуємо з таблиць сортаменту ГОСТ 8239-72 (додаток 9). Для двотавра № 33 позначаємо їх індексом 1.

$$h_1 = 330 \text{ мм}; b_1 = 140 \text{ мм}; d_1 = 7,0 \text{ мм}; t_1 = 11,2 \text{ мм}; A_1 = 53,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{X1} = 419 \text{ см}^4; I_{Y1} = 9840 \text{ см}^4.$$

Визначаємо геометричні характеристики полоси, позначимо їх індексом 2.

Розміри полоси:

$$b_2 = \frac{h_1}{4} = \frac{330}{4} = 82,5 \text{ мм}; \quad a_2 = h_1 = 330 \text{ мм}.$$

Площа поперечного перетину полоси

$$A_2 = b_2 \cdot a_2 = 8,25 \cdot 33 = 272 \text{ см}^2.$$

Осьові моменти інерції полоси:

$$I_{X2} = \frac{a_2 \cdot b_2^3}{12} = \frac{33 \cdot 8,25^3}{12} = 1544 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y2} = \frac{b_2 \cdot a_2^3}{12} = \frac{8,25 \cdot 33^3}{12} = 24706 \text{ см}^4.$$

Викреслюємо складений перетин у масштабі (рис. 3.2).

Визначаємо координати центра ваги складеного поперечного перетину в системі координат X_1Y_1 :

$$x_C = 0; \quad \text{тому, що вісь } Y \text{ є віссю симетрії};$$

$$y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}}{A_1 + A_2},$$

де y_{C1} – координата центра ваги площі першої фігури (двотавра) до осі X_1 , $y_{C1} = 0$;

y_{C2} – координата центра ваги площі другої фігури (полоси);

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ	Адк.
Зм.	Адк.	№ докум.	Підп.	Дата		11

$$y_{C2} = \frac{140}{2} + \frac{82,5}{2} = 111,25 \text{ мм.}$$

Підставимо значення і отримаємо

$$y_C = \frac{0 + 272 \cdot 111,25}{53,8 + 272} = 92,9 \text{ мм.}$$

Проводимо через точку C головні центральні осі XU (рис. 3.2).
Визначаємо осьові моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} = 9840 + 24706 \approx 34600 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_X &= I_{X1} + A_1 \cdot (-9,29)^2 + I_{X2} + A_2 \cdot (1,835)^2 = \\ &= 419 + 53,8 \cdot (-9,29)^2 + 1544 + 272 \cdot 1,835^2 \approx 5980 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Визначаємо осьові моменти опору відносно центральних осей:

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{5980}{16,29} = 367 \text{ см}^3;$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{x_{\max}} = \frac{34600}{16,5} = 2097 \text{ см}^3;$$

де x_{\max} , y_{\max} – координати точок поперечного перетину
максимально віддалених від осей X та Y (рис. 3.2):

$$y_{\max} = 9,29 + 7 = 16,29 \text{ см};$$

$$x_{\max} = 16,5 \text{ см.}$$

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ	Адк.
Зм.	Адк.	№ докум.	Підп.	Дата		12

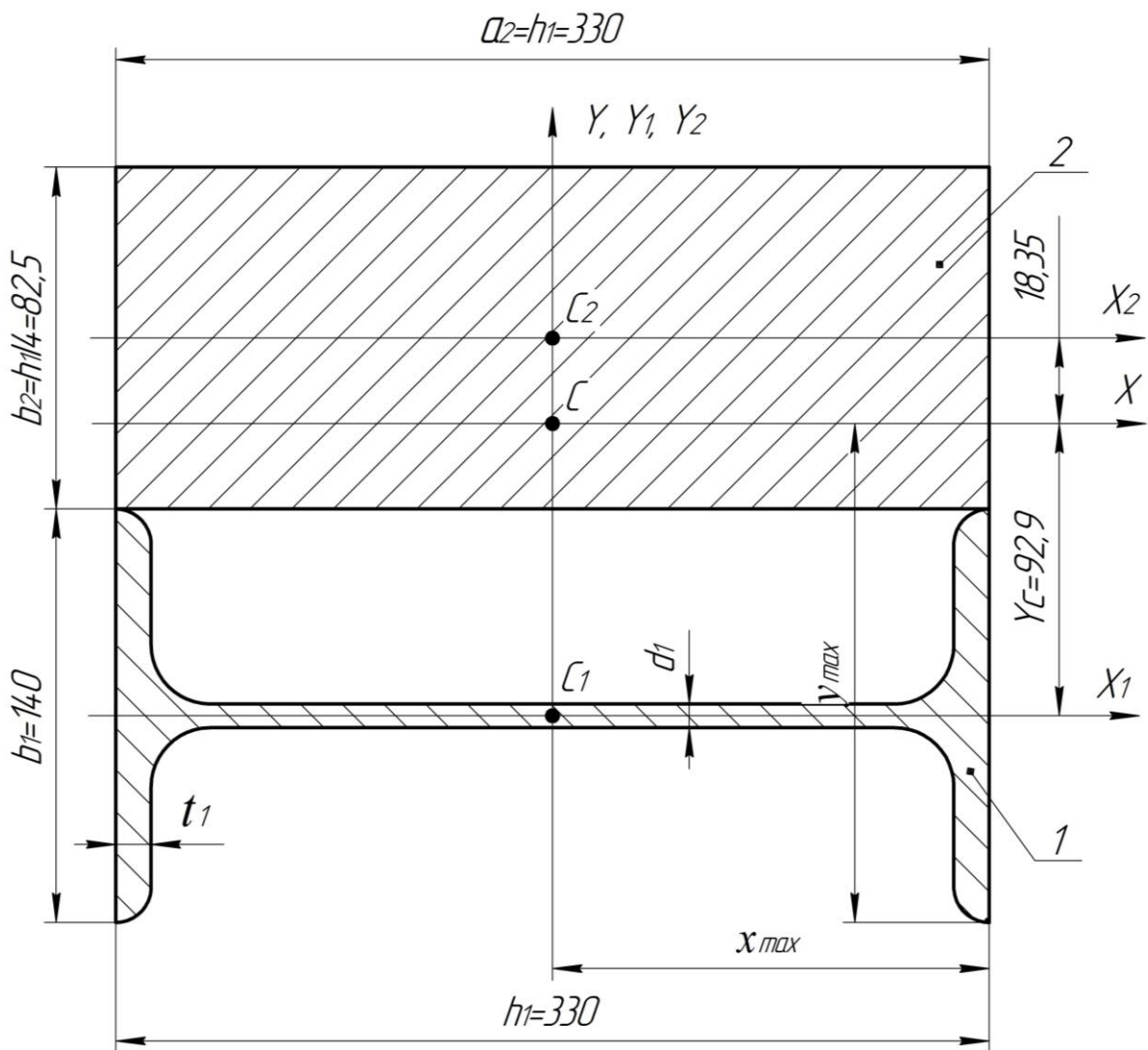


Рисунок 3.2

Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата

КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ

Арк.
13

ЗАДАЧА 4

Розрахунок вала на кручення

На вал (рис. 4.1) насаджено 5 шківів, які передають потужності P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta] = 2 \text{град}/\text{м}$.

Дано: $P_1 = 10 \text{кВт}$; $P_2 = 50 \text{кВт}$; $P_3 = 48 \text{кВт}$; $P_4 = 80 \text{кВт}$.
Матеріал вала – сталь 45, $[\tau] = 50 \text{МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{МПа}$. Частота обертання вала $\omega = 40 \text{с}^{-1}$.

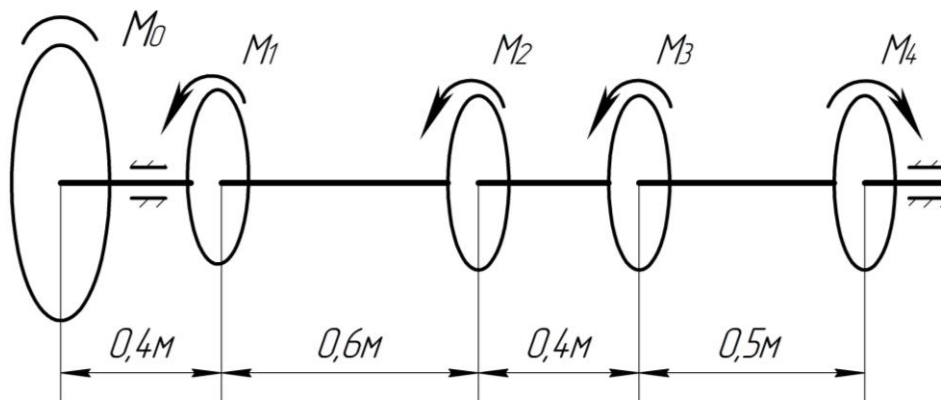


Рисунок 4.1

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ		
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата			
Розроб.	Антонюк В.І.				Літ.	Арк.	Аркшів
Перевір.	Довбвш А.Д.					14	5
Консульт.					ФХМ, гр. ХС-21		
Н. контр.							
Затв.	Рибак Т.І.						
					Розрахунок вала на кручення		

Розв'язування задачі 4

Потужність P_0 визначаємо з рівняння балансу потужностей, записаного з урахуванням напряму дії зосереджених моментів (тертям в опорах нехтуємо)

$$-P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0;$$

звідки

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 10 + 50 + 48 - 80 = 28 \text{ кВт.}$$

Скручувальні моменти M_i ($i=0,1,2,3,4$), які передаються кожним шківом, визначаємо за формулою

$$M_i = \frac{P_i}{\omega}.$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$M_0 = \frac{28}{40} = 0,7 \text{ кНм}; \quad M_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ кНм}; \quad M_2 = \frac{50}{40} = 1,25 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{ кНм}; \quad M_4 = \frac{80}{40} = 2,0 \text{ кНм}.$$

Крутні моменти $M_{КРi}$ ($i=0,1,2,3,4$) на кожній ділянці вала відповідно рівні (рис. 4.2а):

$$M_{КР1} = -M_0 = -0,7 \text{ кНм};$$

$$M_{КР2} = -M_0 + M_1 = -0,7 + 0,25 = -0,45 \text{ кНм};$$

$$M_{КР3} = M_4 - M_3 = 2,0 - 1,2 = 0,8 \text{ кНм};$$

$$M_{КР4} = M_4 = 2,0 \text{ кНм}.$$

Використовуючи отримані значення, будуємо епюру крутних моментів (рис. 4.2б).

З умови міцності на кручення визначаємо діаметр вала

$$d \geq 3 \sqrt{\frac{M_{КР}}{0,2 [\tau]}}.$$

Підставивши значення крутних моментів для кожної ділянки вала, отримаємо:

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ	Адк.
Зм.	Адк.	№ докум.	Підп.	Дата		15

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 41,0 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{0,45}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 35,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 42,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{2,0}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 58,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо діаметри ділянок вала:

$$d_{1\partial} = 42 \text{ мм}; \quad d_{2\partial} = 36 \text{ мм}; \quad d_{3\partial} = 44 \text{ мм}; \quad d_{4\partial} = 58 \text{ мм}.$$

Виконуємо ескіз вала (рис. 4.2в).

Кути закручування окремих ділянок вала визначимо за формулою

$$\varphi_i = \frac{M_{KPi} \cdot l_i}{G \cdot I_{Pi}}, \quad i=1,2,3,4,$$

де l_i – довжина ділянки вала;

G – модуль зсуву, $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$;

I_{Pi} – полярний момент інерції поперечного перетину вала,

$$I_{Pi} = \frac{\pi \cdot d_{i\partial}^4}{32} \cong 0,1 d_{i\partial}^4.$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$\varphi_1 = \frac{-0,7 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,042)^4} = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-0,45 \cdot 0,6}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,036)^4} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{0,8 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,044)^4} = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ	Арк.
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підп.	Дата		16

$$\varphi_4 = \frac{2,0 \cdot 0,5}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,058)^4} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Визначаємо кути закручування перетинів вала B, C, D, E відносно перетину A :

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,10 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,08 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,08 + 1,10) \cdot 10^{-2} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-1,98 + 1,09) \cdot 10^{-2} = -0,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Будуємо епюру кутів закручування вала (рис. 4.2г), прийнявши за початок відліку перетин A .

Перевірку вала на жорсткість проведемо за умовою жорсткості

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де θ_{\max} – максимальний відносний кут закручування вала.

Визначимо відносні кути закручування на кожній ділянці вала:

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1}{l_1} = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{\varphi_2}{l_2} = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \theta_1 = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{\varphi_4}{l_4} = \frac{1,09 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо, що

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} \ll [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Отже, умову жорсткості забезпечено.

					КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ	Арк.
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підп.	Дата		17

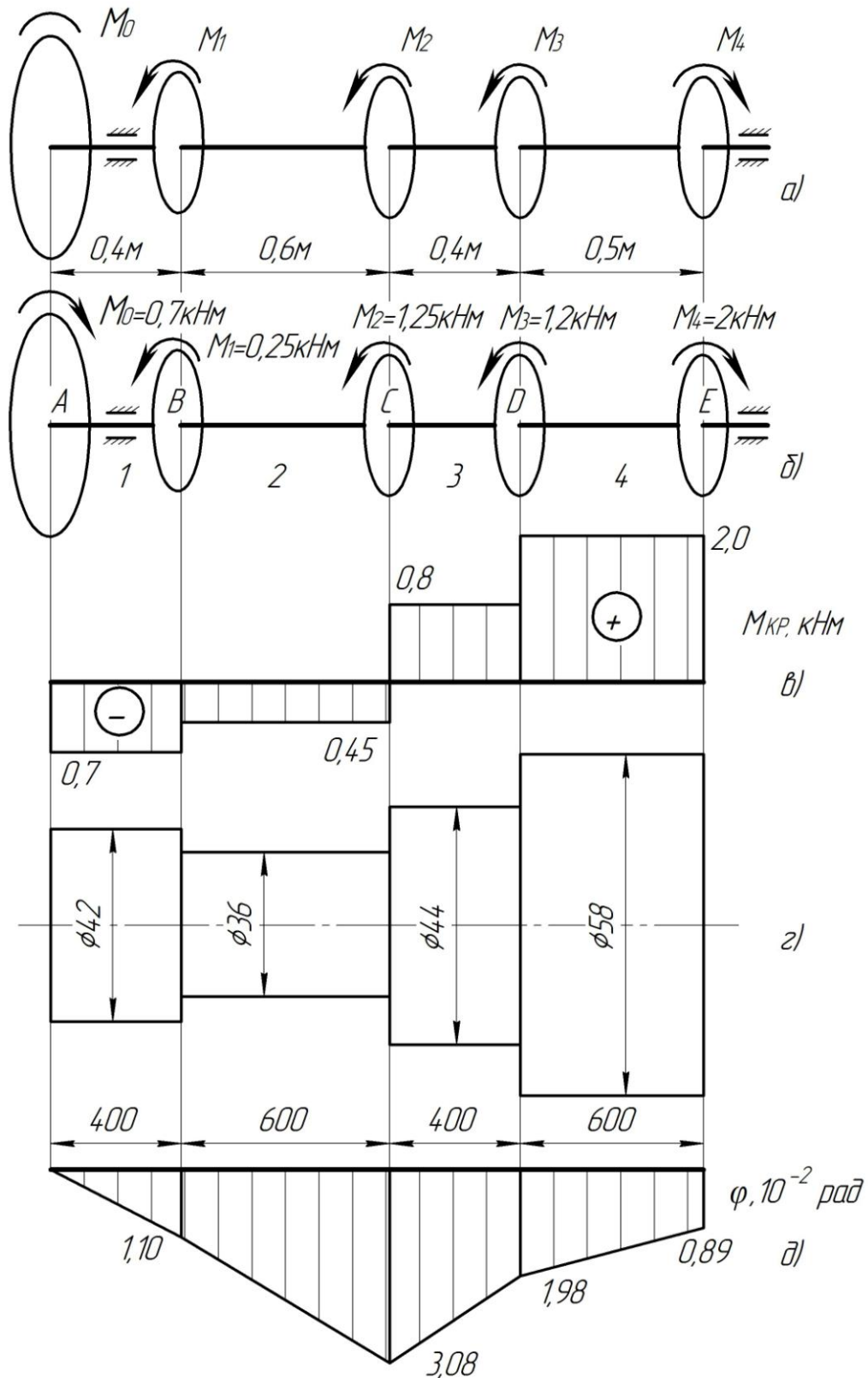


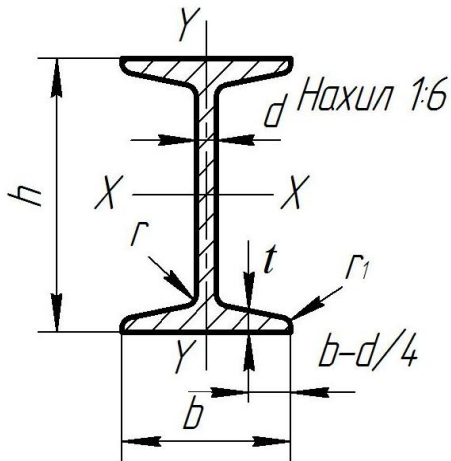
Рисунок 4.2

Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата

КР ОМ 11-199.00.00.000 ПЗ

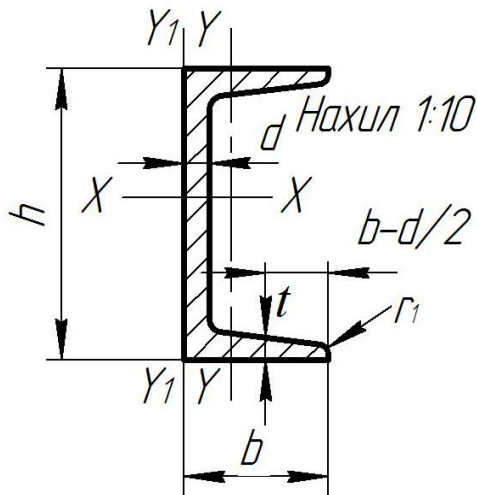
Арк.

18



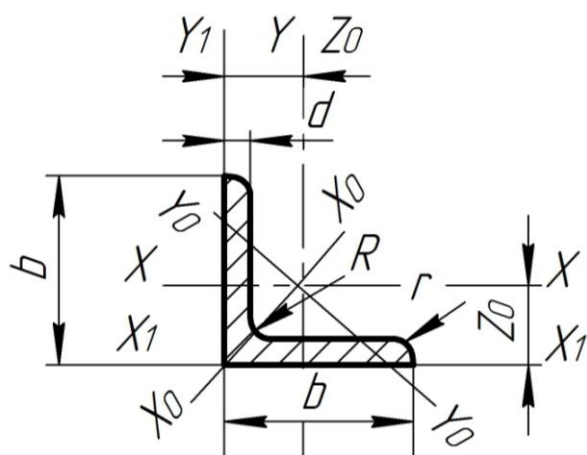
Сталь прокатна. Балки двотаврові. Сортамент. ГОСТ 8239-89

Но- мера про- філю	Розміри				Площа перетину A, см ²	Довідкові величини для осей						
	h	b	d	t		x-x				y-y		
						J _X	W _X	i _x	S _X	J _Y	W _Y	i _y
						см ⁴	см ³	см	см	см ⁴	см ³	см
мм												
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	665	85,9	3,05
45	450	160	6,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	500	170	9,5	15,2	97,3	39120	1560	20,1	899	1040	122	3,28
55	550	180	10,0	16,5	113	54810	1990	22,0	1150	1350	150	3,46
60	600	190	10,8	17,8	131	75010	2500	23,9	1440	1720	181	3,62



Сталь прокатна. Швелери. Сортамент. ГОСТ 8240-89

Номера профілю	Розміри				Площа перетину A , $см^2$	Довідкові величини для осей						
	h	b	d	t		$x-x$			$y-y$			z_0
						J_x	W_x	i_x	J_y	W_y	i_y	
						$см^4$	$см^3$	$см$	$см^4$	$см^3$	$см$	
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	45,4	11,0	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	63,3	13,8	1,87	1,80
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	86,0	17,0	2,04	1,94
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	113	20,5	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	208	31,6	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	642	73,4	3,23	2,75



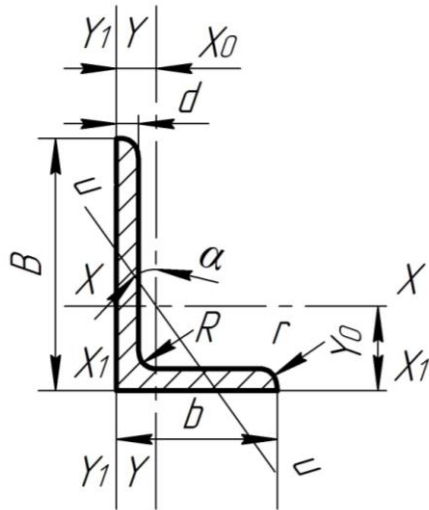
Сталь прокатна кутова рівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8509-86

Номера профілю	Розміри			Площа профілю A , $см^2$	Довідкові величини для осей		
	b	d	R		$x-x$		z_0
					J_x	i_x	
	мм				см	см	см
1	2	3	4	5	6	7	8
2	20 {	3	3,5	1,13	0,40	0,59	0,60
		4		1,46	0,50	0,58	0,64
2,5	25 {	3	3,5	1,43	0,81	0,75	0,73
		4		1,86	1,03	0,74	0,76
2,8	28	3	4	1,62	1,16	0,85	0,80
3,2	32 {	3	4,5	1,86	1,77	0,97	0,89
		4		2,43	2,26	0,96	0,94
3,6	36 {	3	4,5	2,10	2,56	1,10	0,99
		4		2,75	3,29	1,09	1,04
4	40 {	3	5	2,35	3,55	1,23	1,09
		4		3,08	4,58	1,22	1,13
4,5	45 {	3	5	2,65	5,13	1,39	1,21
		4		3,48	6,63	1,38	1,26
		5		4,29	8,03	1,37	1,30
5	50 {	3	5,5	2,96	7,11	1,55	1,33
		4		3,89	9,21	1,54	1,38
		5		4,80	11,2	1,53	1,42
5,6	56 {	3,5	6	3,86	11,6	1,73	1,50
		4		4,38	13,1	1,73	1,52
		5		5,41	16,0	1,72	1,57
6,3	63 {	4	7	4,96	18,9	1,95	1,69
		5		6,13	23,1	1,94	1,74
		6		7,28	27,1	1,93	1,78

Закінчення додатка 11

Сталь прокатна кутова рівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8509-86
(закінчення)

1	2	3	4	5	6	7	8
7	70	4,5	8,0	6,20	29,0	2,16	1,88
		5		6,86	31,9	2,16	1,90
		6		8,15	37,6	2,15	1,94
		7		9,42	43,0	2,14	1,99
		8		10,7	48,2	2,13	2,02
7,5	75	5	9	7,39	39,5	2,31	2,02
		6		8,78	46,6	2,30	2,06
		7		10,1	53,3	2,29	2,10
		8		11,5	59,8	2,28	2,15
		9		12,8	66,1	2,27	2,18
8	80	5,5	9	8,63	52,7	2,47	2,17
		6		9,38	57,0	2,47	2,19
		7		10,8	65,3	2,45	2,23
		8		12,3	73,4	2,44	2,27
9	90	6	10	10,6	82,1	2,78	2,43
		7		12,3	94,3	2,77	2,47
		8		13,9	106	2,76	2,51
		9		15,6	118	2,75	2,55
10	100	6,5	12	12,8	122	3,09	2,68
		7		13,8	131	3,08	2,71
		8		15,6	147	3,07	2,75
		10		19,2	179	3,05	2,83
		12		22,8	209	3,03	2,91
		14		26,3	237	3,00	2,99
11	110	7	12	15,2	176	3,40	2,96
		8		17,2	198	3,39	3,00
12,5	125	8	14	19,7	294	3,87	3,46
		9		22,0	327	3,86	3,40
		10		24,3	360	3,85	3,45
		12		28,9	422	3,82	3,53
		14		33,4	482	3,80	3,61
14	140	16	14	37,8	539	3,78	3,68
		9		24,7	466	4,34	3,78
		10		27,3	512	4,33	3,82
		12		32,5	602	4,31	3,90



Сталь прокатна кутова нерівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8510-86

Номера профілю	Розміри				Площа профілю A , $см^2$	Довідкові величини для осей					
	B	b	d	R		$x-x$		$y-y$		x_1-x_1	y_1-y_1
						J_x	i_x	J_y	i_y	Відстань від центра тяжіння	
	мм					$см^4$	см	$см^4$	см	y_0	x_0
	7	8	9	10		11	12				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,86	0,42
3,2/2	32	20	3	3,5	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	1,08	0,49
			4		1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	1,12	0,53
4/2,5	40	25	3	4,0	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	1,32	0,59
			4		2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	1,37	0,63
4,5/2,8	45	28	3	5	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	1,47	0,64
			4		2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,51	0,68
5/3,2	50	32	3	5,5	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	1,60	0,72
			4		3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,65	0,76
5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	3,16	10,1	1,79	3,30	1,02	1,80	0,82
			4		3,58	11,4	1,78	3,70	1,02	1,82	0,84
			5		4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	1,86	0,88
6,3/4,0	63	40	4	7,0	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	2,03	0,91
			5		4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	2,08	0,95
			6		5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	2,12	0,99
			8		7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	2,20	1,07

Закінчення додатка 12

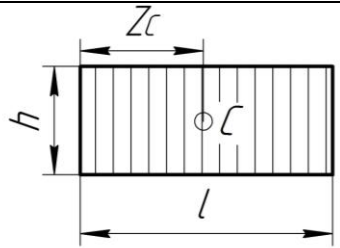
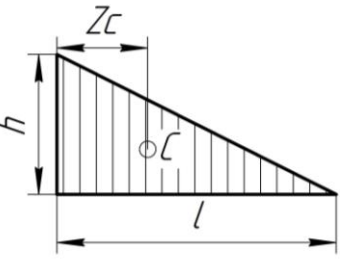
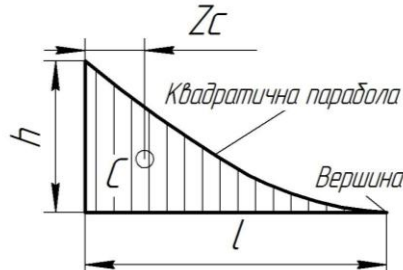

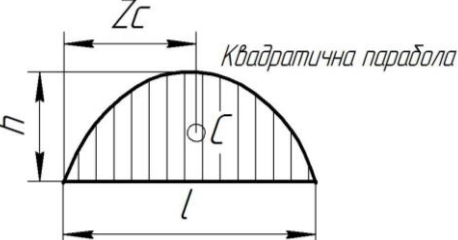
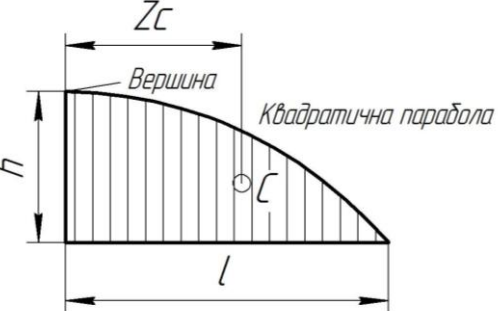
Сталь прокатна кутова нерівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8510-86
(закінчення)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7/4,5	70	45 {	4,5	7,5	5,07	25,3	2,23	8,25	1,28	2,25	1,03
			5		5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	2,28	1,05
7,5/5	75	50 {	5	8	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	2,39	1,17
			6		7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	2,44	1,21
			8		9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	2,52	1,29
8/5	80	50 {	5	8	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	2,6	1,13
			6		7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	2,65	1,17
9/5,6	90	56 {	5,5	9	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	2,92	1,26
			6		8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	2,95	1,28
			8		11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	3,04	1,36
10/6,3	100	63 {	6	10	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	3,23	1,42
			7		11,1	113	3,19	35,0	1,78	3,28	1,46
			8		12,6	127	3,18	39,2	1,77	3,32	1,50
			10		15,5	154	3,15	47,1	1,75	3,40	1,58
11/7	110	70 {	6,5	10	11,4	142	3,53	45,6	2	3,55	1,58
			7		12,3	152	3,52	48,7	1,99	3,57	1,6
			8		13,9	172	3,51	54,6	1,98	3,61	1,54
12,5/8	125	80 {	7	11	14,1	227	4,01	73,7	2,29	4,01	1,8
			8		16	256	4	83,0	2,28	4,05	1,84
			10		19,7	312	3,98	100	2,26	4,14	1,92
			12		23,4	356	3,95	117	2,24	4,22	2
14/9	140	90 {	8	12	18	364	4,49	120	2,58	4,49	2,02
			10		22,2	444	4,47	146	2,56	4,58	2,12

Коефіцієнти зменшення основного допустимого напруження

Гнучкість бруса $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок Ст.0С, Ст.2, Ст.3, Ст.4.	Сталь Ст.5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Площі ω і координати z_C центра тяжіння простих фігур

Фігура	ω	z_C
	$l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{3}l \cdot h$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{1}{4}l \cdot h$	$\frac{1}{5}l$
	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{3}{8}l$

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

**Кафедра технічної механіки,
сільськогосподарських машин і транспортних технологій**

**Довбуш Анатолій Дмитрович
Хомик Надія Ігорівна**

ОПІР МАТЕРІАЛІВ
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
до курсової роботи

Комп'ютерний набір: Рубінець Наталя

Графічне оформлення: Олендер Назар

Папір офсетний. Гарнітура «Таймс». Умов.друк.арк.

Наклад 50прим.