МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ПУЛЮЯ

**Кафедра математичних
методів в інженерії**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з розділу

<u>ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ</u>

курсу вищої математики

для студентів інженерних та економічних спеціальностей

Тернопіль - 2015

Укладачі: А.В. Каплун, д.пед.н., доц.
В.Б.Валяшек, к.ф.-м.н.
Г.В. Козбур

Відповідальна за випуск: Г.В.Козбур

Рецензенти: д.ф.-м.н., проф. В.А. Кривень

Методичні вказівки розглянуто і схвалено на засіданні кафедри математичних методів в інженерії. Протокол № 9 від 16.04.15 р.

Рекомендовано до друку методичною радою факультету комп'ютерно-інформаційних систем та програмної інженерії. Протокол № 7 від 29.04.15 р.

ВСТУП

Методичні вказівки “Інтегральне числення” укладені відповідно до програми курсу вищої математики для втузів. У кожному розділі подано короткі теоретичні відомості та приклади розв’язування типових задач.

Дані методичні вказівки містять розділи:

- невизначений інтеграл;
- визначений та невластивий інтеграли;
- застосування визначеного інтеграла

та корисні додатки з елементарної теорії раціональних дробів, наближених методів інтегрування та довідку з важливими кривими.

Методичні вказівки рекомендовані для практичних занять та самостійної роботи студентів заочної форми навчання при вивченні курсу вищої математики.

Також вказівки можуть бути корисними для студентів денної форми навчання при розв’язувані індивідуальних завдань з розділу “Інтегральне числення функцій одної змінної”.

ЧАСТИНА І.   НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розділ 1   Первісна функція і невизначений інтеграл. Основні властивості та методи інтегрування

1.1 Основні поняття та означення

Як відомо, основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ від заданої функції $f(x)$. Основною задачею інтегрального числення є обернена: за заданою функцією $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна від якої була б рівною $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення. Функцію $F(x)$ називають ***первісною*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо у всіх точках цього відрізка виконується рівність

$$\boxed{F'(x) = f(x)}, \qquad (1.1)$$

або

$$\boxed{d\,F(x) = f(x)dx}. \qquad (1.2)$$

Так, наприклад, для будь-якого $x \in (-\infty;+\infty)$ виконується рівність $(\sin x)' = \cos x$, тоді кажуть, що функція $\sin x$ є первісною для функції $\cos x$ на всій числовій осі. Для всіх x, що належать проміжку $(0;+\infty)$ виконується рівність $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, в цьому випадку $\ln x$ – первісна функція для $\dfrac{1}{x}$ на додатній півосі OX.

Зауважимо, що задача знаходження первісної функції для заданої $f(x)$ розв’язується неоднозначно: якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, то і функція $F(x)+C$ теж буде первісною для $f(x)$, якщо C – довільна стала. Справді,

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x). \qquad (1.3)$$

Тобто, якщо $f(x)$ має на заданому проміжку первісну функцію $F(x)$, то, надаючи C довільних числових значень, отримаємо безліч первісних функцій виду $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$.

Означення. Множину всіх первісних для функції $f(x)$ називають ***невизначеним інтегралом*** і позначають $\int f(x)\,dx$.

Таким чином, згідно означення

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}, \qquad (1.4)$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

Наприклад, $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C,$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C \qquad \text{і т. д.}$$

Знаходження первісної і невизначеного інтеграла для даної функції $f(x)$ називають інтегруванням цієї функції. Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання.

Щоб перевірити, чи правильно виконане інтегрування, достатньо продиференціювати результат і отримати при цьому підінтегральну функцію.

На запитання про існування первісних (чи невизначеного інтеграла) для функції $f(x)$ дає відповідь теорема.

Т е о р е м а. Для всякої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a,b]$, існує на цьому відрізку первісна функція.

1.2 Основні властивості невизначеного інтеграла

I. Похідна від невизначеного інтеграла рівна підінтегральній функції, а диференціал – підінтегральному виразу:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \\ &d\int f(x)dx = f(x)\,dx. \end{aligned}} \tag{1.5}$$

II. Невизначений інтеграл від похідної чи диференціала дорівнює самій функції плюс довільна стала C:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int F'(x)dx = F(x) + C\,, \\ &\int dF(x) = F(x) + C. \end{aligned}} \tag{1.6}$$

III. Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\boxed{\int A\, f(x)dx = A\int f(x)dx}\,. \tag{1.7}$$

IV. Невизначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від кожної з цих функцій:

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}\,. \tag{1.8}$$

1.3 Таблиця найпростіших інтегралів

1.	$\int 1 \cdot dx = x + C$	12.	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
2.	$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \ (m \neq -1)$	13.	$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \left| \cos x \right| + C$
3.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	14.	$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \left| \sin x \right| + C$
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15.	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5.	$\int e^x dx = e^x + C$	16.	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
6.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln \left| x \right| + C$	17.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7.	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	18.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$
8.	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	19.	$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$
9.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	20.	$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$
10.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	21.	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$
11.	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4} \right) \right| + C$	22.	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$

Кожна із формул таблиці справедлива для тих значень змінної x, що належать області визначення підінтегральної функції $f(x)$.

Таблицю найпростіших інтегралів, як і основну таблицю похідних, слід запам’ятати.

Повторимо, що кожний результат інтегрування можна перевірити шляхом диференціювання.

1.4 Основні методи інтегрування

В найпростіших випадках, коли заданий інтеграл є табличним, задача інтегрування зводиться до застосування відповідної формули.

Наприклад, $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$; $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$;

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C;$$

$$\int \frac{1}{x^2+7} dx = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{x}{\sqrt{7}} + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2-2} \right| + C \quad \text{і т.д.}$$

В інших випадках потрібно шляхом відповідних тотожних перетворень та правильного вибору методу звести даний інтеграл до однієї чи декількох табличних формул інтегрування, якщо це можливо.

Далі ми розглянемо ***основні методи інтегрування:***

1. метод безпосереднього інтегрування;
2. метод заміни змінної (метод підстановки);
3. метод інтегрування за частинами.

1.4.1 Метод безпосереднього інтегрування

1°. Якщо підінтегральна функція є сумою декількох функцій, інтеграли від яких є табличними, то використовують властивість лінійності невизначеного інтеграла, що є комбінацією властивостей III і IV (див.1.2):

$$\boxed{\int [A_1 f(x) \pm A_2 g(x)] dx = A_1 \int f(x)\, dx \pm A_2 \int g(x)\, dx}. \qquad (1.9)$$

Зауважимо, що немає потреби після кожного інтегрування додавати сталу C, оскільки сума декількох таких сталих теж є сталою, яку записують після останнього інтегрування.

<u>П р и к л а д и</u>

1.1. $\int (2x^3 + 3x - 4) dx = 2\int x^3 dx + 3\int x\, dx - 4\int dx = 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} - 4x + C$.

1.2. $\int \left(3sh\, x - 2\cos x + \frac{1}{x} \right) dx = 3\int sh\, x\, dx - 2\int \cos x\, dx + \int \frac{1}{x} dx = 3ch\, x - 2\sin x + \ln|x| + C$.

1.3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$.

1.4. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx +$

$+\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

2°. Часто ефективним є використання незалежності виду невизначеного інтеграла від позначення аргумента. Тобто, якщо справедлива формула

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

де x – незалежна змінна і $F'(x) = f(x)$, то має місце формула

$$\boxed{\int f(u)\, du = F(u) + C}, \qquad (1.10)$$

де $u = u(x)$ – довільна неперервно-диференційовна функція.

На основі цієї властивості отримаємо узагальнену таблицю найпростіших інтегралів:

1.	$\int du = u + C$	12.	$\int \frac{1}{\sin u} du = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\| + C$
2.	$\int u^m dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C,\ (m \neq -1)$	13.	$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\|\cos u\| + C$
3.	$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$	14.	$\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\|\sin u\| + C$
4.	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	15.	$\int \frac{1}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$
5.	$\int e^u du = e^u + C$	16.	$\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
6.	$\int \frac{1}{u} du = \ln\|u\| + C$	17.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin\frac{u}{a} + C$
7.	$\int \cos u\, du = \sin u + C$	18.	$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a}} du = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right\| + C$
8.	$\int \sin u\, du = -\cos u + C$	19.	$\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$
9.	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tg} u + C$	20.	$\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$
10.	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctg} u + C$	21.	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} du = \operatorname{th} u + C$
11.	$\int \frac{1}{\cos u} du = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{p}{4}\right)\right\| + C$	22.	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} du = -\operatorname{cth} u + C$

Вибираючи різним чином функцію u, ми можемо суттєво розширити область застосування таблиці інтегралів.

З а у в а ж е н н я. Тут і надалі допоміжні коментарі та підстановки будемо записувати в процесі розв’язування прикладів у фігурних дужках.

П р и к л а д и

1.5. $\int \sin x\, d(\sin x) = \{u = \sin x\} = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$.

1.6. $\int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = \{u = \sqrt{x}\} = \int e^u du = e^u + C = e^{\sqrt{x}} + C$.

1.7. $\int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \{u = \ln x\} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$.

1.8. $\int sh(x^2) d(x^2) = \{u = x^2\} = \int sh\, u\, du = ch\, u + C = ch(x^2) + C$ і т.д.

Інтеграли такого типу можна отримати шляхом в н е с е н н я п і д з н а к д и ф е р е н ц і а л а деякої частини підінтегральної функції.

П р и к л а д и

1.9. $\int e^{x^2} \cdot 2x\, dx = \{2x\, dx = d(x^2)\} = \int e^{x^2} d(x^2) = \{u = x^2\} = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$.

1.10. $\int \sin^4 x \cdot \cos x\, dx = \{\cos x\, dx = d(\sin x)\} = \int \sin^4 x\, d(\sin x) = \{u = \sin x\} =$

$= \int u^4\, du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(\sin x)^5}{5} + C$.

1.11. $\int \frac{\sqrt{tg\, x}}{\cos^2 x} dx = \int (tg\, x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left\{ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(tg\, x) \right\} = \int (tg\, x)^{\frac{1}{2}} d(tg\, x) =$

$= \{u = tg\, x\} = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}(tg\, x)^{\frac{3}{2}} + C$.

1.12. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2 + 1} \cdot e^x\, dx = \{e^x\, dx = d(e^x)\} = \int \frac{1}{(e^x)^2 + 1} d(e^x) = \{u = e^x\} =$

$= \int \frac{1}{u^2 + 1} du = arctg\, u + C = arctg(e^x) + C$.

1.13. $\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = d(\arcsin x) \right\} =$

$= \int \frac{1}{\arcsin x} d(\arcsin x) = \{u = \arcsin x\} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\arcsin x| + C$.

У всіх прикладах використано відому з диференціального числення формулу

$$\boxed{u'(x)dx = du}. \qquad (1.11)$$

Так, $2xdx = (x^2)'dx = d(x^2)$, $\cos x\, dx = (\sin x)' dx = d(\sin x)$ і т.д.

Корисними для подальшого розв'язування прикладів будуть такі властивості диференціала:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\quad dx = d(x+b), \\ 2.\quad dx = \dfrac{1}{a}d(ax), \\ 3.\quad dx = \dfrac{1}{a}d(ax+b) \end{array}} \qquad (1.12)$$

де a,b - довільні числа, $a \neq 0$.

П р и к л а д и

1.14. $\int \frac{dx}{x+2} = \{dx = d(x+2)\} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \{u = x+2\} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x+2| + C$.

1.15. $\int \sin(4x)\,dx = \left\{ dx = \frac{1}{4}d(4x) \right\} = \int \sin(4x) \cdot \frac{1}{4}d(4x) = \frac{1}{4}\int \sin(4x)\,d(4x) = \{u = 4x\} =$

$= \frac{1}{4}\int \sin u\,du = -\frac{1}{4}\cos u + C = -\frac{1}{4}\cos(4x) + C$.

1.16. $\int \sqrt[3]{4x-1}dx = \left\{ dx = \frac{1}{4}d(4x-1) \right\} = \frac{1}{4} \cdot \int (4x-1)^{\frac{1}{3}}d(4x-1) =$

$= \{u = 4x-1\} = \frac{1}{4} \cdot \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{4} \cdot \frac{3u^{4/3}}{4} + C = \frac{3}{16}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-1)^4} + C$ і т. д.

Як підсумок варто з а п а м ' я т а т и правило: якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}. \qquad (1.13)$$

Тобто $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$,

$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$,

$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$,

$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$,

$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ і т.д.

1.4.2 Метод заміни змінної (метод підстановки)

Якщо інтеграл $\int f(x)dx$ не може бути знайдений шляхом безпосереднього інтегрування, то часто з допомогою введення нової змінної інтегрування вдається видозмінити підінтегральний вираз $f(x)dx$ і звести таким чином даний інтеграл до табличного чи такого, спосіб знаходження якого відомий.

Розглянемо два основних правила підстановки.

1°. Незалежну змінну замінюють певною диференційовною функцією, наприклад,

$$x = f(t),$$

тоді $dx = f'(t)\,dt$ і інтеграл $\int f(x)dx$ набуде вигляду

$$\int f[f(t)]\cdot f'(t)\,dt.$$

Таким чином, перетворення інтеграла здійснюється за формулою

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f[f(t)]\cdot f'(t)\,dt}. \qquad (1.14)$$

Якщо функцію $f(t)$ вибрано вдало, то отриманий інтеграл буде простішим від вихідного.

Після закінчення інтегрування необхідно повернутись до попередньої змінної інтегрування x. Для цього слід виразити з рівності $x = f(t)$ змінну t за правилом знаходження оберненої функції і підставити отриманий вираз в знайдену первісну.

<u>Приклади</u>

1.17. $$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left\{\begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ t = \sqrt{x} \end{matrix}\right\} = \int \frac{2t\,dt}{(1+t^2)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctg\,t + C = 2arctg\,\sqrt{x} + C.$$

1.18. $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \left\{\begin{matrix} x = a\,tg\,t \\ dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \\ t = arctg\,\dfrac{x}{a} \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{\left(a^2\,tg^2\,t + a^2\right)^2} = \frac{1}{a^3}\int \frac{dt}{\cos^2 t\,(tg^2 t+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{dt}{\cos^2 t\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) == \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2a^3}\left(arctg\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sin\left(2arctg\,\frac{x}{a}\right)\right) + C.$$

1.19. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{aligned} & x = \frac{1}{t} \\ & dx = -\frac{1}{t^2}\,dt \\ & t = \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} == \left\{ 2t\,dt = d(t^2+1) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = \left\{ u = t^2+1 \right\} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{t^2+1} + C =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C\,.$$

2°. Функцію незалежної змінної $y\,(x)$ замінюють новою змінною інтегрування

$$y\,(x) = z\,.$$

Тоді перехід від заданого інтегралу до такого, що має бути простішим, здійснюється згідно формули

$$\boxed{\int f[y\,(x)]\cdot y\,'(x)\,dx = \int f\,(z)\,dz}\,. \qquad (1.15)$$

Легко бачити, що таку підстановку доцільно використовувати у тому випадку, коли підінтегральну функцію можна подати у вигляді добутку двох співмножників: виразу, що містить функцію $y\,(x)$, і її похідну.

Вміння правильно вибрати потрібну підстановку залежить від рівня знань студента та досягається досвідом.

Після завершення інтегрування необхідно, як і в попередньому випадку, повернутись до старої змінної, підставивши замість z вираз $y\,(x)$.

П р и к л а д и

1.21. $$\int \sqrt[3]{1+4\sin x}\cdot\cos x\,dx = \left\{ \begin{aligned} & 1+4\sin x = z \\ & d(1+4\sin x) = 4\cos x\,dx = dz \\ & \cos x\,dx = \frac{1}{4}\,dz \end{aligned} \right\} = \int \sqrt[3]{z}\cdot\frac{1}{4}\,dz = \frac{1}{4}\int z^{\frac{1}{3}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3z^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(1+4\sin x)^4} + C\,.$$

1.22. $$\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}-5}\,dx = \left\{ \begin{aligned} & e^{3x} = z \\ & d(e^{3x}) = 3e^{3x}dx = dz \\ & e^{3x}dx = \frac{1}{3}\,dz \end{aligned} \right\} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2-5} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{5}}{z+\sqrt{5}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{3x}-\sqrt{5}}{e^{3x}+\sqrt{5}}\right| + C\,.$$

$$1.23.\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{x+1} = z, \quad x = z^2 - 1 \\ &d(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = dz \\ &\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2dz \end{aligned} \right\} = 2\int (z^2-1)\,dz = 2\left(\frac{z^3}{3} - z\right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1} + C\,.$$

$$1.24.\ \int \frac{dx}{2^x+1} = \int \frac{dx}{2^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)} = \int \frac{2^{-x}\,dx}{1+2^{-x}} = \left\{ \begin{aligned} &2^{-x} = z \\ &d(2^{-x}) = -2^{-x}\ln 2\,dx = dz \\ &2^{-x}\,dx = -\frac{1}{\ln 2}\,dz \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dz}{1+z} =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\cdot \ln|1+z| + C = -\frac{\ln(1+2^{-x})}{\ln 2} + C\,.$$

$$1.25.\ \int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^3+x}}dx = \int \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}dx = \left\{ \begin{aligned} &x + \frac{1}{x} = z \\ &d(x+\frac{1}{x}) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = dz \end{aligned} \right\} = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$= 2\sqrt{z} + C = 2\sqrt{x+\frac{1}{x}} + C\,.$$

$$1.26.\ \int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{1+x^2} = z \\ &d(\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = dz \\ &x\,dx = \sqrt{1+x^2}\,dz = z\,dz \end{aligned} \right\} = \int \frac{z\,dz}{1+z} = \int \frac{(1+z)-1}{1+z}\,dz =$$

$$= \int dz - \int \frac{dz}{1+z} = z - \ln|1+z| + C = \sqrt{1+x^2} - \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) + C\,.$$

1.4.3 Інтегрування за частинами

В деяких випадках ефективним є інтегрування за частинами, що реалізується за формулою

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}. \qquad (1.16)$$

При знаходженні інтеграла із застосуванням цього методу треба дотримуватись такої схеми:

1) розкласти підінтегральний вираз на два множники u і dv (в складі dv обов'язково повинен бути диференціал незалежної змінної);

2) за вибраним виразом u знайти диференціюванням du, а проінтегрувавши dv, визначити v (константу C при цьому не записують);

3) застосувати формулу (1.16) і, переконавшись, що отриманий інтеграл $\int v\,du$ простіший від заданого, знайти його.

Зауважимо, що можна застосовувати формулу інтегрування за частинами послідовно кілька разів.

Розглянемо деякі типи інтегралів, при знаходженні яких слід застосовувати метод інтегрування за частинами:

1°. $\int P_n(x)a^{kx}dx$, $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kx\,dx$, $\int P_n(x)\cos kx\,dx$, де $P_n(x)$ — многочлен n-го степеня відносно x. Тут доцільно вибрати $u = P_n(x)$, при знаходженні du степінь многочлена зменшуватиметься. Якщо $P_n(x)$ — многочлен другого, третього або вищого степеня ($n \ge 2$), то формулу інтегрування за частинами застосовують n разів.

<u>Приклади</u>

1.27. $$\int x\cdot 2^x dx = \left\{\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = 2^x dx, \\ v = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{array}\right\} = x\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \int\frac{2^x}{\ln 2}dx = x\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot x\cdot 2^x -$$

$$-\frac{1}{(\ln 2)^2}\cdot 2^x + C = \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\left(x\ln 2 - 1\right) + C.$$

1.28. $$\int\left(x^2-4x+7\right)e^{2x}dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2-4x+7, & du = (2x-4)dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left(x^2-4x+7\right)e^{2x} -$$

$$-\frac{1}{2}\int(2x-4)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\left(x^2-4x+7\right)e^{2x} - \int(x-2)e^{2x}dx;$$

$$\int(x-2)e^{2x}dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x-2, & du = dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} = (x-2)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(x-2-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{5}{2}\right);$$

$$\int\left(x^2-4x+7\right)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\left(x^2-4x+7\right)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{5}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2-5x+\frac{19}{2}\right)e^{2x} + C.$$

1.29. $$\int x\cdot\sin 2x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \sin 2x\,dx & \\ v = \int\sin 2x\,dx = -\dfrac{1}{2}\cos 2x & \end{array}\right\} = x\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\int\cos 2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

1.30. $\int\left(x^2-5x\right)\cos\frac{x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=x^2-5x, & du=(2x-5)dx \\ dv=\cos\frac{x}{3}dx, & v=\int\cos\frac{x}{3}dx=3\sin\frac{x}{3}\end{matrix}\right\}=\left(x^2-5x\right)\cdot 3\sin\frac{x}{3}-$

$$-3\int(2x-5)\cdot\sin\frac{x}{3}dx=3\left[\left(x^2-5x\right)\sin\frac{x}{3}-\int(2x-5)\cdot\sin\frac{x}{3}dx\right];$$

$$\int(2x-5)\cdot\sin\frac{x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x-5, & du=2dx \\ dv=\sin\frac{x}{3}dx, & v=\int\sin\frac{x}{3}dx=-3\cos\frac{x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$=(2x-5)\cdot(-3\cos\frac{x}{3})-(-3)\cdot 2\int\cos\frac{x}{3}dx=-3(2x-5)\cos\frac{x}{3}+6\cdot 3\sin\frac{x}{3}$; отже

$$\int\left(x^2-5x\right)\cos\frac{x}{3}dx=3\left(x^2-5x\right)\cdot\sin\frac{x}{3}-3\left[-3(2x-5)\cos\frac{x}{3}+6\cdot 3\sin\frac{x}{3}\right]+C=$$

$$=(18x-45)\cos\frac{x}{3}+(3x^2-15x-54)\sin\frac{x}{3}+C.$$

2°. $\int R(x)\ln x\,dx$, $\int R(x)\log_a x\,dx$, $\int R(x)\arcsin x\,dx$, $\int R(x)\arccos x\,dx$, $\int R(x)arctg\,x\,dx$, $\int R(x)arcctg\,x\,dx$, де $R(x)$ - многочлен від x або степінь x.

Вибираємо за u відповідно функції: $\ln x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\,x$ чи $arcctg\,x$, тоді $dv=R(x)dx$.

П р и к л а д и

1.31. $\int arctg\,x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=arctg\,x, \\ du=\dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv=dx,\quad v=x\end{matrix}\right\}=arctg\,x\cdot x-\int x\cdot\frac{dx}{x^2+1}=x\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$

$$=x\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

1.32.

$$\int x\cdot\ln^2 x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln^2 x, & du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx, & v=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-$$

$$-\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left\{\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx, & v=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left(\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$$

1.33. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx=\left\{\begin{matrix} u=\arcsin x, & du=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=\dfrac{1}{x^2}dx, & v=\int\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}\end{matrix}\right\}=-\arcsin x\cdot\frac{1}{x}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)}} = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = -\frac{\arcsin x}{x} - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right) + C.$$

3°. $\int e^{kx} \sin px\,dx$, $\int e^{kx} \cos px\,dx$, $\int \sin(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Це кругові (циклові) інтеграли. Така назва викликана тим, що двократне застосування формули інтегрування за частинами приводить до початкового інтеграла. Обидва рази вибір частин u і dv проводиться довільним чином. Знаходження інтеграла такого типу зводиться до розв’язування алгебраїчного рівняння, в якому невідомим буде шуканий інтеграл.

П р и к л а д и

1.34. $$\int e^x \sin x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \sin x\,dx, & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{matrix}\right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx;$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \cos x\,dx, & v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{matrix}\right\} = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx;$$

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx;$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x; \qquad \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

1.35. $$\int \cos(\ln x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \cos(\ln x), & du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix}\right\} = x\cos(\ln x) -$$

$$-\int x \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{dx}{x} = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx;$$ знову інтегруємо за частинами:

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \sin(\ln x), & du = \cos(\ln x) \cdot \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix}\right\} = x\sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Таким чином отримуємо:

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx;$$

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x));$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C.$$

4°. Розглянемо на прикладах інтегрування за частинами деяких інтегралів, що не ввійшли до попередніх трьох типів.

П р и к л а д и

1.36. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}, & v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x \end{matrix} \right\} = -x\,ctg\,x + \int ctg\,x\,dx = -x\,ctg\,x +$

$\displaystyle+\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = -x\,ctg\,x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\,ctg\,x + \ln|\sin x| + C$.

1.37. $\displaystyle\int \frac{\ln(arctg\,x)}{1+x^2}dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln(arctg\,x), & du = \dfrac{1}{arctg\,x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x \end{matrix} \right\} = arctg\,x \cdot \ln\left(arctg\,x\right) -$

$\displaystyle-\int arctg\,x \cdot \frac{1}{arctg\,x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = arctg\,x\cdot\ln\left(arctg\,x\right) - \int \frac{1}{1+x^2}dx =$

$= arctg\,x\cdot\ln\left(arctg\,x\right) - arctg\,x + C = arctg\,x\left(\ln\left(arctg\,x\right) - 1\right) + C$.

1.38. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sqrt{x^2+a}, & du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\} = x\sqrt{x^2+a} - \int x\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} -$

$\displaystyle-\int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}\,dx + a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}\,dx +$

$+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$,

$\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}\,dx + +a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$,

$\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C$.

1.39. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sqrt{a^2-x^2}, & du = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

$\displaystyle= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

$\displaystyle= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a}$,

$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a}$,

$\displaystyle2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$,

$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$.

Розділ 2 Інтегрування окремих типів елементарних функцій

2.1 Інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен

1°. Інтеграли типу $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ і $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ знаходять шляхом виділення повного квадрату в тричлені та застосування відповідної підстановки. Вони зводяться до одного з таких табличних інтегралів:

$$\boxed{\int \frac{1}{a^2+u^2}du = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C} \qquad \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \arcsin\frac{u}{a}+C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2-a^2}du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C} \qquad \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{u^2\pm a}}du = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a}\right|+C}$$

П р и к л а д и

2.1. $$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x^2+6x+9)+16} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \left\{\begin{matrix} u=x+3, \\ x=u-3 \\ dx=du \end{matrix}\right\} = \int \frac{du}{u^2+16} =$$
$$= \frac{1}{4}arctg\frac{u}{4}+C = \frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4}+C.$$

2.2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(9x^2-12x+2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((3x)^2-2\cdot 2\cdot(3x)+4-2\right)}} =$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((3x-2)^2-2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = \left\{\begin{matrix} u=3x-2 \\ x=\frac{1}{3}(u+2) \\ dx=\frac{1}{3}du \end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{\sqrt{2}} +$$
$$+C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C.$$

2.3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}} = \left\{\begin{matrix} x+\frac{3}{4}=u \\ x=u-\frac{3}{4} \\ dx=du \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{1}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-\frac{1}{16}}\right|+C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}\right|+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

2°. Інтеграли типу $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ шляхом виділення повного квадрату у підкореневому виразі та введення нової змінної зводиться до одного з інтегралів (див. пр.1.38, 1.39):

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{2}\right) + C}, \qquad (2.1)$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left| x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C}. \qquad (2.2)$$

<u>Приклади</u>

2.4. $\int \sqrt{x^2+2x+6}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2+5}\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x+1 \\ x = u-1 \\ dx = du \end{matrix}\right\} = \int \sqrt{u^2+5}\, du =$

$$= \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+5} + 5\ln\left| u+\sqrt{u^2+5}\right|\right) + C = \frac{1}{2}\left((x+1)\sqrt{(x+1)^2+5} + 5\ln\left| x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+6} + 5\ln\left| x+1+\sqrt{x^2+2x+6}\right|\right) + C.$$

2.5. $\int \sqrt{2-x-x^2}\, dx = \int \sqrt{-(x^2+x-2)}\, dx = \int \sqrt{-\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right)}\, dx =$

$$= \int \sqrt{-\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right)}\, dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x+\frac{1}{2} \\ dx = du \\ x = u-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} = \int \sqrt{\frac{9}{4}-u^2}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u\sqrt{\frac{9}{4}-u^2} + \frac{9}{4}\arcsin\frac{u}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{9}{4}\arcsin\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{4}\arcsin\frac{2x+1}{3}\right) + C.$$

3°. Інтеграли типу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Для знаходження інтегралів даного типу зручно використовувати формули:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C} \qquad (2.3)$$

та

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C} \qquad (2.4)$$

і дотримуватись такої схеми:

у чисельнику підінтегрального дробу шляхом тотожних перетворень виділити вираз, що рівний похідній квадратного тричлена $2ax+b$. Для цього спочатку шляхом домноження (ділення) узгодити коефіцієнт при змінній x, а потім шляхом додавання (віднімання) – сталий доданок.

1) розбити даний інтеграл на суму двох інтегралів;

2) для обчислення першого інтеграла використати формулу (2.3) або (2.4), для другого – спосіб, описаний в п.1°.

Приклади

2.6. $$\int \frac{x+4}{x^2+6x+10}dx = \left\{(x^2+6x+10)' = 2x+6\right\} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6) - \frac{1}{2}\cdot 6 + 4}{x^2+6x+10}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx + \int \frac{dx}{x^2+6x+10}.$$ Знайдемо окремо інтеграли:

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{d(x^2+6x+10)}{x^2+6x+10} = \left\{u = x^2+6x+10\right\} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln\left|x^2+6x+10\right|;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \left\{\begin{matrix} u = x+3 \\ x = u-3 \\ dx = du \end{matrix}\right\} = \int \frac{du}{u^2+1} = arctg\, u = arctg(x+3).$$ Отже,

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+10}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| + arctg(x+3) + C.$$

2.7. $$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \left\{(3-2x-x^2)' = -2-2x\right\} = \int \frac{-\frac{1}{2}(-2-2x) - 1 - 3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2-2x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$$

$$\int \frac{-2-2x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{d(3-2x-x^2)}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \left\{u = 3-2x-x^2\right\} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{3-2x-x^2};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2x-3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((x+1)^2-4\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \left\{\begin{matrix} u = x+1 \\ x = u-1 \\ dx = du \end{matrix}\right\} =$$
$$= \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \arcsin\frac{u}{2} = \arcsin\frac{x+1}{2};$$

$$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3-2x-x^2} - 4\cdot\arcsin\frac{x+1}{2} + C = C - \sqrt{3-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2}$$

4°. Інтеграли типу $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Такі інтеграли з допомогою підстановки $z = \frac{1}{mx+n}$ зводять до інтегралів виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (див. п 1°.).

П р и к л а д и

2.8. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\left\{\begin{aligned}&z=\frac{1}{x}\\&x=\frac{1}{z}\\&dx=-\frac{1}{z^2}dz\end{aligned}\right\}=\int\frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2+2\cdot\frac{1}{z}-1}}=-\int\frac{dz}{z\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}-1}}=$$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{1+2z-z^2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{-(z^2-2z-1)}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{-\left((z-1)^2-2\right)}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{2-(z-1)^2}}=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&u=z-1\\&z=u+1\\&dz=du\end{aligned}\right\}=-\int\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}=\arccos\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\arccos\frac{z-1}{\sqrt{2}}+C=\arccos\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}+C.$$

2.2 Інтегрування раціональних дробів

1°. Загальна схема інтегрування.

Для знаходження інтегралів виду $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени від x, відповідно n-го і m-го степеня, використовують таку схему:

1. Якщо раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправильний ($n \geq m$), то виділяють цілу частину дробу, виконавши ділення чисельника $P_n(x)$ на знаменник $Q_m(x)$ за правилом ділення многочленів. Отримують многочлен степеня $n-m$ і правильний раціональний дріб $\frac{\tilde{P}_s(x)}{Q_m(x)}$. Неправильний раціональний дріб дорівнює сумі цілої частини та правильного раціонального дробу, то $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_{n-m}(x)+\frac{\tilde{P}_s(x)}{Q_m(x)}$, де $s<m$.

2. Правильний дріб $\frac{\tilde{P}_s(x)}{Q_m(x)}$ розкладають на суму найпростіших (елементарних) дробів, для цього попередньо розклавши знаменник $Q_m(x)$ на множники першого та другого степенів (множники другого степеня – квадратні тричлени, для яких $D<0$).

Коефіцієнти розкладу знаходять двома способами:

1) методом н е в и з н а ч е н и х к о е ф і ц і є н т і в;

2) методом ч а с т к о в и х з н а ч е н ь змінної.

Часто комбінують обидва методи.

3. Знаходять інтеграли виділеної цілої частини і всіх найпростіших дробів, результати додають.

Детальніше ознайомитись із елементами теорії раціональних дробів можна в **Додатку 1**.

2°. Інтегрування найпростіших (елементарних) дробів.

Найпростішими, або елементарними, називають дроби чотирьох типів, що отримують при розкладі правильного раціонального дробу:

$$\boxed{\text{I.}\frac{A}{x-a},\quad \text{II.}\ \frac{A}{(x-a)^m},\quad \text{III.}\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad \text{IV.}\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m},} \tag{2.5}$$

де $m \geq 2$, $p^2-4q<0$.

Інтеграли від дробів I та II типів знаходять шляхом зведення їх до табличних:

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int(x-a)^{-m}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C.$$

Інтегрування дробів III типу розглянуто в 2.1, п. 1°, 3°.

Інтеграли від елементарних дробів IV типу після виділення повного квадрата в знаменнику і застосування відповідної підстановки зводять до таких:

$$\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} \quad \text{і} \quad \int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Перший з них легко обчислюється методом безпосереднього інтегрування:

$$\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m} = \frac{1}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-m}d\left(t^2+a^2\right) = \left\{t^2+a^2=u\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-m}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-m+1}}{-m+1}+C = \frac{1}{2(1-m)u^{m-1}}+C = \frac{1}{2(1-m)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}+C.$$

Для обчислення інтеграла $\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$ використовують підстановку $t = tg\, z$ (для $m = 2,3,4$; див пр.1.19) або m-кратне використання рекурентної формули

$$I_m = \frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{2(m-1)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}\right]. \tag{2.6}$$

3°. Приклади знаходження інтегралів від дробово-раціональних функцій.

П р и к л а д и

2.9. $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$.

Підінтегральний дріб – правильний, тому розкладемо його на суму елементарних дробів. Оскільки $x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x+3)(x-2)$, то $\frac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$, де A, B, C – підлягають визначенню. Зведемо дроби у правій частині до спільного знаменника:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A(x+3)(x-2)+B\,x(x-2)+C\,x(x+3)}{x(x+3)(x-2)}.$$

Прирівняємо чисельники рівних дробів з рівними знаменниками:

$$x^2+x-1 = A(x+3)(x-2)+B\,x(x-2)+C\,x(x+3).$$

Для визначення A, B, C використаємо метод часткових значень (див. Додаток 1), надаючи змінній x значень –3; 0; 2.

При $x=-3$: $9-3-1 = A\cdot 0+B\cdot(-3)\cdot(-5)+C\cdot 0,$

$5 = 15B,\ B=\frac{1}{3}.$

При $x=0$: $-1 = A\cdot 3\cdot(-2)+B\cdot 0+C\cdot 0,$

$-1=-6A,\ A=\frac{1}{6}.$

При $x=2$: $4+2-1 = A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 2\cdot 5,$

$5=10C,\ C=\frac{1}{2}.$

Отже, $\frac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x+3}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}$, тому

$$\int\frac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x+3}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right)dx = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+C = \ln\sqrt[6]{x(x+3)^2(x-2)^3}+C.$$

2.10. $\int\frac{x^5-5x^4+x^3-8x^2+x}{(x-1)^3}dx$.

Підінтегральний дріб – неправильний, тому виконаємо піднесення до кубу в знаменнику і виконаємо ділення:

$$
\begin{array}{r|l}
x^5-5x^4+x^3-8x^2+x & x^3-3x^2+3x-1 \\
\underline{-\;x^5-3x^4+3x^3-x^2} & \overline{x^2-2x-8} \\
-\;-2x^4-2x^3-7x^2+x & \\
\underline{-2x^4+6x^3-6x^2+2x} & \\
-\;-8x^3-x^2-x & \\
\underline{-8x^3+24x^2-24x+8} & \\
-25x^2+23x-8 &
\end{array}
$$

Отже, $\dfrac{x^5-5x^4+x^3-8x^2+x}{(x-1)^3}=x^2-2x-8+\dfrac{-25x^2+23x-8}{(x-1)^3}$.

Розкладемо на суму найпростіших дробів залишковий правильний дріб:

$\dfrac{-25x^2+23x-8}{(x-1)^3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}$. Для визначення коефіцієнтів розкладу A, B, C використаємо метод невизначених коефіцієнтів. Зведемо дроби в правій частині до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$-25x^2+23x-8=A(x-1)^2+B(x-1)+C,$

$-25x^2+23x-8=Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C.$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x:

$$
\begin{array}{l||l}
x^2 & -25=A \\
x^1 & 23=-2A+B \\
x^0 & -8=A-B+C
\end{array}
$$

Звідси знаходимо $A=-25,\ B=-27,\ C=-10$, отже,

$\dfrac{-25x^2+23x-8}{(x-1)^3}=\dfrac{-25}{x-1}+\dfrac{-27}{(x-1)^2}+\dfrac{-10}{(x-1)^3}$.

Остаточно отримаємо

$$\int\frac{x^5-5x^4+x^3-8x^2+x}{(x-1)^3}dx=\int\left(x^2-2x-8-\frac{25}{x-1}-\frac{27}{(x-1)^2}-\frac{10}{(x-1)^3}\right)dx=$$

$$=\int x^2dx-2\int x\,dx-8\int dx-25\int\frac{dx}{x-1}-27\int\frac{dx}{(x-1)^2}-10\int\frac{dx}{(x-1)^3}=\frac{x^3}{3}-x^2-8x-$$

$$-25\ln|x-1|-27\cdot\left(-\frac{1}{x-1}\right)-10\cdot\left(-\frac{1}{2(x-1)^2}\right)+C=\frac{x^3}{3}-x^2-8x-25\ln|x-1|+$$

$$+\frac{27}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}+C.$$

2.11. $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Підінтегральний дріб – неправильний, виділимо цілу частину:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad\quad +1 & x^3-x^2+x-1 \\
\hline
-\;x^4-x^3+x^2-x \quad & x+1 \\
\hline
x^3-x^2+x+1 & \\
-\;x^3-x^2+x-1 & \\
\hline
2 &
\end{array}
$$

Отже, $\dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}=x+1+\dfrac{2}{x^3-x^2+x-1}$.

Розкладемо на суму елементарних дробів залишковий правильний дріб, попередньо виконавши тотожні перетворення у знаменнику:

$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x^2+1)(x-1)$. Тоді

$$\frac{2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}, \qquad 2=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1).$$

Для знаходження чисел A, B, C використаємо комбінований метод часткових значень і невизначених коефіцієнтів. Спочатку покладемо $x=1$, отримаємо рівність $2=C(1+1)$, $C=1$. Таким чином, рівність для визначення коефіцієнтів набуде вигляду:

$2=(Ax+B)(x-1)+x^2+1$ або $2=Ax^2+Bx-Ax-B+x^2+1$.

Для того, щоб визначити A, B, тепер достатньо виписати лише 2 умови згідно методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l\|l} x^2 & 0=A+1,\;\; A=-1 \\ x^0 & 2=-B+1,\;\; B=-1 \end{array}$$

Отже, $A=-1, B=-1, C=1$. Тоді

$$\frac{2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-1\cdot x-1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}=-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1};$$

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(x+1-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int x\,dx+\int dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx-$$

$$-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x-1}=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-arctg\,x+\ln|x-1|+C.$$

2.12. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(4+x^2\right)^2}$.

Підінтегральний дріб $\dfrac{1}{x\left(4+x^2\right)^2}$ – правильний, його знаменник вже записаний у вигляді добутку множників 1-го та 2-го степенів, тому відразу перейдемо до розкладу його на найпростіші дроби.

$$\frac{1}{x\left(4+x^2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{4+x^2}+\frac{Dx+E}{\left(4+x^2\right)^2},$$ звідси

$$1=A\left(4+x^2\right)^2+(Bx+C)x\left(4+x^2\right)+(Dx+E)x,$$

$$1=16A+8Ax^2+Ax^4+4Bx^2+4Cx+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex.$$

Згідно методу невизначених коефіцієнтів отримаємо 5 рівнянь для визначення п'яти невідомих коефіцієнтів розкладу A, B, C, D, E:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0=A+B \\ x^3 & 0=C \\ x^2 & 0=8A+4B+D \\ x^1 & 0=4C+E \\ x^0 & 1=16A \end{array}$$

Отримаємо $A=\frac{1}{16},\ B=-\frac{1}{16},\ C=0,\ D=-\frac{1}{4},\ E=0$. Тоді

$$\frac{1}{x\left(4+x^2\right)^2}=\frac{\frac{1}{16}}{x}+\frac{-\frac{1}{16}x}{4+x^2}+\frac{-\frac{1}{4}x}{\left(4+x^2\right)^2},$$ і, нарешті,

$$\int\frac{dx}{x\left(4+x^2\right)^2}=\int\left(\frac{\frac{1}{16}}{x}+\frac{-\frac{1}{16}x}{4+x^2}+\frac{-\frac{1}{4}x}{\left(4+x^2\right)^2}\right)dx=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{16\cdot 2}\int\frac{2x\,dx}{4+x^2}-\frac{1}{4\cdot 2}\int\frac{2x\,dx}{\left(4+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{32}\ln(x^2+4)-\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{4+x^2}\right)+C=\frac{1}{32}\ln\frac{x^2}{x^2+4}+\frac{1}{8\left(4+x^2\right)}+C.$$

4°. Інколи досить ефективними при інтегруванні раціональних дробів є штучні прийоми, деякі з них продемонструємо на прикладах.

П р и к л а д и

2.13. $$\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(x^2+4\right)-x^2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+4}=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C=$$

$$=C-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\cdot arctg\frac{x}{2}.$$

2.14. $$\int\frac{dx}{x^2-2x-15}=\int\frac{dx}{(x-5)(x+3)}=\frac{1}{8}\int\frac{(x+3)-(x-5)}{(x-5)(x+3)}dx=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-5}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{1}{8}\ln|x-5|-\frac{1}{8}\ln|x+3|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-5}{x+3}\right|+C.$$

2.15. $\int \frac{x^4}{x-1}dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)+1}{x-1}dx = \int (x+1)(x^2+1)dx +$

$$+\int \frac{dx}{x-1} = \int \left(x^3+x^2+x+1\right)dx + \int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$

2.3 Інтегрування деяких видів тригонометричних виразів

1°. Інтеграли виду $\int \sin nx \cos mx\, dx$, $\int \sin nx \sin mx\, dx$, $\int \cos nx \cos mx\, dx$.

При знаходженні таких інтегралів слід подати добуток тригонометричних функцій у вигляді суми за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)] \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)] \end{aligned}}$$

П р и к л а д

2.16. $\int \sin 2x \cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin\left(2x+\frac{x}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{x}{3}\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int \sin\frac{7}{3}x\,dx +$

$$+\frac{1}{2}\int \sin\frac{5}{3}x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cos\frac{7}{3}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cos\frac{5}{3}x + C = -\frac{3}{14}\cos\frac{7}{3}x - \frac{3}{10}\cos\frac{5}{3}x + C.$$

2°. Інтеграли виду $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$, де $n-$ ціле додатне число.

Тут розглядають два випадки:

а) n – парне, тобто $n = 2k$. В цьому разі понижують степінь тригонометричної функції за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 a &= \frac{1}{2}(1-\cos 2a) \\ \cos^2 a &= \frac{1}{2}(1+\cos 2a) \end{aligned}}$$

б) n – непарне, тобто $n = 2k+1$. Застосовують так званий спосіб “відщеплення”, тобто відокремлюють від підінтегральної функції множник $\sin x$ чи $\cos x$ і вносять його під знак диференціала. Парний степінь $2k$ тригонометричної функції, яка залишилась, приводять до виразу, що містить кофункцію, за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 a &= 1-\cos^2 a \\ \cos^2 a &= 1-\sin^2 a \end{aligned}}$$

Інтеграл, що отримується в результаті таких перетворень, знаходиться безпосередньо.

П р и к л а д и

2.17. $\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(\int dx + \int \cos 4x\,dx\right) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) +$$

$$+C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C\,.$$

2.18. $\int \sin^7(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin^7(3x)\,d(3x) = \{3x = t\} = \frac{1}{3}\int \sin^7 t\,dt = \frac{1}{3}\int \sin^6 t\cdot\sin t\;dt =$

$$= -\frac{1}{3}\int \left(\sin^2 t\right)^3 d(\cos t) = -\frac{1}{3}\int \left(1-\cos^2 t\right)^3 d(\cos t) = \{\cos t = u\} = -\frac{1}{3}\int \left(1-u^2\right)^3 du =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \left(1-3u^2+3u^4-u^6\right)du = -\frac{1}{3}\left(\int du - 3\int u^2 du + 3\int u^4 du - \int u^6 du\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(u - u^3 + \frac{3u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + C = -\frac{1}{3}\left(\cos t - \cos^3 t + \frac{3\cos^5 t}{5} - \frac{\cos^7 t}{7}\right) + C =$$

$$= C - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\cos^3(3x) - \frac{1}{5}\cos^5(3x) + \frac{1}{21}\cos^7(3x)\,.$$

3°. Інтеграли виду $\int \sin^m x\,\cos^n x\;dx$.

Розглянемо випадки:

а) якщо одне з чисел m і n – непарне, то до нього застосовують спосіб "відщеплення" (див. п. 2°, б);

б) якщо обидва показники степенів m і n – непарні числа, то спосіб "відщеплення" застосовують до меншого з них;

в) якщо обидва числа m і n – парні, то використовують формули пониження степеня тригонометричних функцій:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 a &= \frac{1}{2}(1+\cos 2a) \\ \sin^2 a &= \frac{1}{2}(1-\cos 2a) \\ \cos a\cdot\sin a &= \frac{1}{2}\sin 2a \end{aligned}}$$

П р и к л а д и

2.19. $\int \sin^4 x\,\cos^3 x\;dx = \int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\;dx = \int \sin^4 x\cdot(1-\sin^2 x)\,d(\sin x) =$

$$= \{\sin x = u\} = \int u^4\left(1-u^2\right)du = \int u^4 du - \int u^6 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C\,.$$

2.20. $\int \cos^3 x \cdot \sin^9 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^9 x \cdot \cos x\, dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\sin^9 x\, d(\sin x) =$

$$= \{\sin x = u\} = \int \left(1-u^2\right)u^9 du = \int u^9 du - \int u^{11} du = \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^{12}}{12} + C = \frac{\sin^{10} x}{10} - \frac{\sin^{12} x}{12} + C.$$

2.21. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x\, dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot (1+\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x\, dx + \int \sin^2 2x \cos 2x\, dx\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x)\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3}\right] + C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

4°. Інтеграл виду $\int \mathrm{tg}^n\, x\, dx$, $\int \mathrm{ctg}^n\, x\, dx$, n – ціле додатне число, $n \geq 2$.

Такі інтеграли можна знаходити двома способами:

1) використати підстановку $\mathrm{tg}\, x = u$ (відповідно $\mathrm{ctg}\, x = u$) і звести інтеграл від тригонометричної функції до інтегралу від раціонального дробу. Знаходження інтегралів від раціональних дробів розглянуто в 2.2.

2) відокремити від підінтегральної функції множник $\mathrm{tg}^2\, x$ (чи $\mathrm{ctg}^2\, x$), застосувати до нього одне з тотожних перетворень:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{tg}^2\, x &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ \mathrm{ctg}^2\, x &= \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \end{aligned}}$$

Отриманий інтеграл розбити на суму двох інтегралів, в першому з них виконати внесення під знак диференціала $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg}\, x)$ або $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\mathrm{ctg}\, x)$ і звести до табличного. Другий – подібний до початкового, проте степінь тригонометричної функції рівний $n-2$.

П р и к л а д и

2.22. $\int \mathrm{tg}^4\, x\, dx = \left\{\begin{matrix} \mathrm{tg}\, x = u, \ x = \mathrm{arctg}\, u \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \end{matrix}\right\} = \int u^4 \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{u^4 + u^2 - u^2 - 1 + 1}{u^2+1} du =$

$$= \int \frac{u^2(u^2+1) - (u^2+1) + 1}{u^2+1} du = \int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right) du = \frac{u^3}{3} - u + \mathrm{arctg}\, u + C =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3\, x}{3} - \mathrm{tg}\, x + \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) + C = \frac{\mathrm{tg}^3\, x}{3} - \mathrm{tg}\, x + x + C.$$

2.23. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \operatorname{ctg} x\,dx =$

$$= -\int \operatorname{ctg} x\,d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C.$$

5°. Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція відносно $\sin x$, $\cos x$.

Розглянемо випадки застосування різних тригонометричних підстановок.

1) Якщо $R(\sin x, \cos x)$ змінює свій знак при заміні $\sin x$ на $-\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, доцільно застосувати підстановку $\cos x = z$;

2) якщо $R(\sin x, \cos x)$ змінює свій знак при заміні $\cos x$ на $-\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, доцільно застосувати підстановку $\sin x = z$;

3) якщо $R(\sin x, \cos x)$ не змінюється при одночасній заміні $\sin x$ на $-\sin x$ і $\cos x$ на $-\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, доцільно використовувати підстановку $\operatorname{tg} x = z$.

<u>П р и к л а д и</u>

2.24. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \left\{\begin{array}{l} \cos x = z, \quad x = \arccos z \\ \sin x = \sqrt{1-z^2} \\ dx = -\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \end{array}\right\} = -\int \frac{\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}}{z^2\sqrt{1-z^2}} = -\int \frac{dz}{(1-z^2)z^2} =$

$$= -\int \frac{(1-z^2)+z^2}{(1-z^2)z^2}dz = -\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$$

2.25 $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx = \left\{\begin{array}{l} \sin x = z, \quad x = \arcsin z \\ \cos x = \sqrt{1-z^2} \\ dx = \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \end{array}\right\} = \int \frac{\left(\sqrt{1-z^2}\right)^5}{z^4} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{(1-z^2)^2}{z^4}dz =$

$$= \int \frac{1-2z^2+z^4}{z^4}dz = \int \frac{dz}{z^4} - 2\int \frac{dz}{z^2} + \int dz = -\frac{1}{3z^3} + \frac{2}{z} + z + C = C - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x.$$

2.26. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = z, \quad x = \operatorname{arctg} z, \quad dx = \dfrac{dz}{1+z^2} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \sin x = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{array}\right\} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{3\cdot\frac{1}{1+z^2} + 4\cdot\frac{z^2}{1+z^2}} =$

$$= \int \frac{dz}{3+4z^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$$

З а у в а ж е н н я. Підстановку $\operatorname{tg} x = z$ доцільно використовувати для всіх інтегралів виду $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}$.

4) За допомогою у н і в е р с а л ь н о ї тригонометричної підстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ можна будь-який інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція відносно $\sin x$, $\cos x$, звести до інтеграла від раціональної функції. В цьому випадку

$$\boxed{\begin{gathered} tg\frac{x}{2} = z, \quad \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \\ x = 2arctg\, z, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}. \end{gathered}}$$

<u>П р и к л а д</u>

2.27. $$\int \frac{1-\sin x}{\sin x(1-\cos x)}dx = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \ x = 2\operatorname{arctg} z, \ dx = \frac{2dz}{1+z^2} \\ \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1-\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\cdot\left(1-\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}\cdot\frac{2dz}{1+z^2} =$$

$$= \int \frac{1+z^2-2z}{2z\left(1+z^2-1+z^2\right)}\cdot 2dz = \int \frac{z^2-2z+1}{2z^3}dz = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} - \int\frac{dz}{z^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{z} - \frac{1}{4z^2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + ctg\frac{x}{2} - \frac{1}{4}ctg^2\frac{x}{2} + C.$$

З а у в а ж е н н я. Підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ доцільно використовувати для всіх інтегралів виду $\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$.

6°. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{\sin^m x}$, $\int \frac{dx}{\cos^m x}$.

1) Якщо m – парне число, то від підінтегрального дробу відокремлюють множник $\frac{1}{\sin^2 x}$ (чи $\frac{1}{\cos^2 x}$) і використовують той факт, що $\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x)$ або $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x)$. Для підінтегральної функції $\frac{1}{\sin^{m-2} x}$ $\left(\text{чи } \frac{1}{\cos^{m-2} x}\right)$ застосовують тотожне перетворення

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\operatorname{ctg}^2 x} \quad \text{або} \quad \boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

2) Якщо m – непарне число, то застосовують універсальну тригонометричну підстановку:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=z\,,\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2}\,,\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}\,.$$

Інтеграл $\int\frac{dx}{\cos^m x}$ за допомогою формули зведення $\cos x=\sin\left(x+\frac{p}{2}\right)$ і підстановки $x+\frac{p}{2}=t$ приводять до $\int\frac{dt}{\sin^m t}$.

<u>Приклади</u>

2.28. $\int\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int(1+\mathrm{ctg}^2\,x)\,d(\mathrm{ctg}\,x)=-\int d(\mathrm{ctg}\,x)-\int\mathrm{ctg}^2\,x\;d(\mathrm{ctg}\,x)=$

$=-\mathrm{ctg}\,x-\frac{\mathrm{ctg}^3\,x}{3}+C$.

2.29. $$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{p}{2}\right)}=\left\{x+\frac{p}{2}=t\right\}=\int\frac{dt}{\sin^3 t}=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{tg}\frac{t}{2}=z\\ \sin t=\frac{2z}{1+z^2}\\ dt=\frac{2dz}{1+z^2}\end{array}\right\}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(1+z^2)^2}{z^3}dz=\frac{1}{4}\int\frac{1+2z^2+z^4}{z^3}dz=\frac{1}{4}\int\left(z^{-3}+\frac{2}{z}+z\right)dz=\frac{1}{4}\left(\frac{z^{-2}}{-2}+2\ln|z|+\frac{z^2}{2}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}+C=C-\frac{1}{8}\mathrm{ctg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{4}\right)\right|+\frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{4}\right).$$

2.4 Найпростіші інтеграли від гіперболічних функцій

Методи інтегрування виразів, що містять гіперболічні функції $sh\,x,\,ch\,x,\,th\,x,\,cth\,x$, аналогічні до методів інтегрування тригонометричних функцій, описаних в п.2.3, з врахуванням основних залежностей між гіперболічними функціями.

Відомо, що гіперболічні функції визначаються так:

$$\boxed{sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}},\qquad \boxed{ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}},$$

$$\boxed{th\,x=\frac{sh\,x}{ch\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}},\quad \boxed{cth\,x=\frac{ch\,x}{sh\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}.$$

Основні співвідношення між гіперболічними функціями:

$ch^2x-sh^2x=1,\qquad ch^2x+sh^2x=ch\,2x\,,\qquad sh\,2x=2sh\,x\,ch\,x\,,$

$$sh(x \pm y) = sh\,x\,ch\,y \pm ch\,x\,sh\,y, \quad ch(x \pm y) = ch\,x\,ch\,y \pm sh\,x\,sh\,y,$$

$$sh^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x - 1), \quad ch^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x + 1),$$

$$1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}, \quad 1 - cth^2 x = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Безпосереднім диференціюванням можна одержати:

$$(sh\,x)' = ch\,x, \qquad (ch\,x)' = sh\,x,$$

$$(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}, \qquad (cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Нагадаємо найпростіші інтеграли від гіперболічних функцій:

$$\boxed{\begin{array}{l} \int sh\,x\,dx = ch\,x + C \\ \int ch\,x\,dx = sh\,x + C \\ \int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C \\ \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C \\ \int th\,x\,dx = \ln|ch\,x| + C \\ \int cth\,x\,dx = \ln|sh\,x| + C \end{array}}$$

<u>Приклади</u>

2.30. $\int \mathrm{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1 + \mathrm{ch}\,2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2x\right) + C.$

2.31. $\int \mathrm{th}^3 x\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)\mathrm{th}\,x\,dx = \int \mathrm{th}\,x\,dx - \int \mathrm{th}\,x \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \int \mathrm{th}\,x\,dx - \int \mathrm{th}\,x\,d(\mathrm{th}\,x) =$

$= \ln|\mathrm{ch}\,x| - \frac{1}{2}\mathrm{th}^2 x + C.$

Інтеграл виду $\int R(sh\,x,\, ch\,x)dx$, де $R(sh\,x,\, ch\,x)$ є раціональна функція від $sh\,x,\ ch\,x$, підстановкою $z = th\frac{x}{2}$ приводиться до інтеграла від раціонального дробу. В цьому випадку

$$\boxed{z = th\frac{x}{2}, \quad sh\,x = \frac{2z}{1 - z^2}, \quad ch\,x = \frac{1 + z^2}{1 - z^2}, \quad dx = \frac{2}{1 - z^2}dz}$$

і заданий інтеграл буде мати вигляд

$$\int R(sh\,x,\, ch\,x)dx = \int R\left(\frac{2z}{1 - z^2}, \frac{1 + z^2}{1 - z^2}\right)\frac{2}{1 - z^2}dz.$$

П р и к л а д

$$2.32.\ \int\frac{1+sh\,x}{sh\,x(1+ch\,x)}dx=\left\{\begin{array}{c} th\frac{x}{2}=z,\quad x=2arcth\,z \\ sh\,x=\frac{2z}{1-z^2},\ ch\,x=\frac{1+z^2}{1-z^2}, \\ dx=\frac{2dz}{1-z^2}\end{array}\right\}=\int\frac{1+\frac{2z}{1-z^2}}{\frac{2z}{1-z^2}\left(1+\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)}\cdot\frac{2dz}{1-z^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z}+2-z\right)dz=\frac{1}{2}\left(\ln|z|+2z-\frac{z^2}{2}\right)+C=th\frac{x}{2}-\frac{1}{4}th^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|th\frac{x}{2}\right|+C.$$

2.5 Інтегрування ірраціональних функцій

Розглянемо типи ірраціональних функцій, інтеграли від яких зводяться до інтегралів від раціональних функцій (р а ц і о н а л і з у ю т ь с я) внаслідок застосування тієї чи іншої підстановки.

1°. Інтеграли типу $\int R(x,\sqrt[r]{x},\sqrt[s]{x},...)dx$, де R – раціональна функція відносно $x,\sqrt[r]{x},\sqrt[s]{x},...$, раціоналізується з допомогою підстановки $x=t^m$, де m – найменше спільне кратне чисел $r,s,...$

П р и к л а д

$$2.33.\ \int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}dx=\left\{\begin{array}{l} x=t^6,\ t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5dt\end{array}\right\}=\int\frac{\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(t^6\right)^{\frac{2}{3}}-\left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}}6t^5dt=6\int\frac{t^2\cdot t^5}{t^4-t^3}dt=$$

$$=6\int\frac{t^7}{t^3(t-1)}dt=6\int\frac{t^4}{t-1}dt=6\int\frac{(t^4-1)+1}{t-1}dt=6\left(\int\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t-1}dt+\int\frac{dt}{t-1}\right)=$$

$$=6\left(\int(t^3+t^2+t+1)dt+\int\frac{dt}{t-1}\right)=6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

2°. Інтеграли типу $\int R(x,\sqrt[r]{ax+b},\sqrt[s]{ax+b},...)dx$, де R – раціональна функція відносно своїх аргументів $x,\sqrt[r]{ax+b},\sqrt[s]{ax+b},...$, раціоналізується з допомогою підстановки $ax+b=t^m$, де m – найменше спільне кратне чисел r,s, ...

П р и к л а д

$$2.34.\ \int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}=\left\{\begin{array}{l} x+1=t^2,\ t=\sqrt{x+1} \\ x=t^2-1,\ dx=2t\,dt\end{array}\right\}=\int\frac{2t\,dt}{t+t^3}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\,\mathrm{arctg}\,t+C=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x+1}+C.$$

3°. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ...\right)dx$, R – раціональна функція відносно своїх аргументів $x, \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ...,$ знаходять за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, де m – найменше спільне кратне чисел r, s, ...

П р и к л а д

2.35. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2, \quad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad 1-x = t^2 + t^2 x, \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2} \end{array} \right\} =$

$$= \int t \cdot \frac{-\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = -4\int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = -4 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = -2\int \frac{dt}{1-t^2} + 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\, t + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

4°. Інтеграли виду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$, $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Методи інтегрування і підстановки, що дозволяють звести такі інтеграли до табличних, розглянуті в 2.1.

5°. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$ зводять до інтегралів $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – раціональна функція відносно своїх аргументів, шляхом використання т р и г о н о м е т р и ч н и х підстановок.

Розглянемо випадки:

1) $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ раціоналізується введенням підстановки $x = a\sin t$.

2) $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$ раціоналізується введенням підстановки $x = \frac{a}{\cos t}$.

3) $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$ раціоналізується введенням підстановки $x = a\,tg\,t$.

П р и к л а д и

2.36. $$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\\ t=\arcsin x\end{array}\right\}=\int\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\cdot\cos t\,dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\sin t}-\int\sin t\,dt=\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+\cos t+C=\ln\left|tg\frac{\arcsin x}{2}\right|+\cos(\arcsin x)+C.$$

2.37. $$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-9}}=\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{\cos t},\quad t=\arccos\dfrac{3}{x}\\ dx=\dfrac{3\sin t}{\cos^2 t}dt\end{array}\right\}=\int\frac{\dfrac{3\sin t}{\cos^2 t}}{\left(\dfrac{9}{\cos^2 t}+2\right)\sqrt{\dfrac{9}{\cos^2 t}-9}}dt=$$

$$=\int\frac{\sin t}{(9+2\cos^2 t)\sqrt{tg^2 t}}dt=\int\frac{\cos t\,dt}{9+2\cos^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{9+2(1-\sin^2 t)}=\{\sin t=u\}=\int\frac{du}{11-2u^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{11}{2}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}+u}{\sqrt{\frac{11}{2}}-u}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{22}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{11}-\sqrt{2}\sin t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{22}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+\sqrt{2}\sin(\arccos\frac{3}{x})}{\sqrt{11}-\sqrt{2}\sin(\arccos\frac{3}{x})}\right|+C=\left\{\sin\left(\arccos\frac{3}{x}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{22}}\ln\left|\frac{x\sqrt{11}+\sqrt{2}\sqrt{x^2-9}}{x\sqrt{11}-\sqrt{2}\sqrt{x^2-9}}\right|+C.$$

2.38. $$\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^4}dx=\left\{\begin{array}{l}x=a\,tg\,t\\ t=arctg\,\dfrac{x}{a}\\ dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt\end{array}\right\}=\int\frac{\sqrt{a^2+a^2tg^2t}}{a^4tg^4t}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{\dfrac{1}{\cos t}}{\dfrac{\sin^4 t}{\cos^4 t}\cdot\cos^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}=\{\sin t=u\}=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{u^4}=\frac{1}{a^2}\cdot\left(-\frac{1}{3u^3}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{3a^2\sin^3 t}+C=-\frac{1}{3a^2\sin^3\left(arctg\,\dfrac{x}{a}\right)}+C=-\frac{\cos ec^3\left(arctg\,\dfrac{x}{a}\right)}{3a^2}+C.$$

6°. Інтеграли від диференціальних біномів.

Диференціальним біномом називають вираз $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, де m,n,p – раціональні числа, не всі цілі.

Згідно теореми Чебишева інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ може бути знайдений в замкнутому вигляді лише у трьох випадках:

1) p – ціле число (підстановка $x=t^s$, де s – спільний знаменник дробів m і n);

2) $\frac{m+1}{n}$ – ціле число (підстановка $a+bx^n=t^s$, де s – знаменник дробу p);

3) $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число (підстановка $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$, де s – знаменник дробу p).

Приклади

2.39. $$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx=\left\{\begin{matrix} m=-\frac{1}{2}, \quad n=\frac{1}{3}, \quad p=-2 \\ x=t^6, \quad t=x^{\frac{1}{6}}, \quad dx=6t^5dt\end{matrix}\right\}=\int\left(t^6\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}\cdot 6t^5dt=$$

$$=6\int t^{-3}\left(1+t^2\right)^{-2}t^5dt=6\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=6\int\frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2}dt=6\int\frac{dt}{1+t^2}-6\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=$$

$$=6\operatorname{arctg}t-6\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\sin\left(2\operatorname{arctg}t\right)\right)\right]=3\operatorname{arctg}\left(x\right)^{\frac{1}{6}}-3\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(x\right)^{\frac{1}{6}}\right)+C.$$

Первісну інтеграла $\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ взято з розділу 1, пр. 1.19.

2.40. $$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\left\{\begin{matrix} m=-\frac{1}{2}, \quad n=\frac{1}{4}, \quad p=\frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n}=2 \\ 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3, \quad t=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ x=(t^3-1)^4, \quad dx=4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\left((t^3-1)^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt=12\int\left(t^3-1\right)^{-2}\cdot t\cdot(t^3-1)^3\cdot t^2dt=12\int t^3(t^3-1)dt=$$

$$=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=\frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7-3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4+C.$$

2.41. $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\left\{\begin{matrix} m=-4, \quad n=2, \quad p=-\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n}+p=-2 \\ \frac{1+x^2}{x^2}=t^2, \ 1+x^2=x^2t^2, \quad \frac{1}{x^2}+1=t^2 \\ x^2=(t^2-1)^{-1}, \ x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}, \ dx=-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot t\,dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\int\left((t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4}\cdot\left[t^2\cdot\left((t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot t\,dt=-\int(t^2-1)dt=-\frac{t^3}{3}+t+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\right)^3+\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}+C=C-\frac{1}{3}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

ЧАСТИНА II. ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛИ

Розділ 3 Визначений інтеграл. Основні правила обчислення

3.1 Основні поняття та означення

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Здійснимо розбиття відрізка $[a,b]$ точками x_k ($k=\overline{1,n}$) довільним чином так, що

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < ... < x_n = b$,

довжина k-го відрізка $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$.

На кожному з елементарних відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ довільним чином виберемо точку x_k і обчислимо значення функції в цій точці $f(x_k)$. Побудуємо суму

$$f(x_1)\cdot\Delta_1 + f(x_2)\cdot\Delta_2 + ... + f(x_k)\cdot\Delta_k + ... + f(x_n)\cdot\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta_k . \qquad (3.1)$$

Отриманий вираз називається ***інтегральною сумою*** функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і його значення залежить як від способу розбиття x_k, так і від вибору точок $x_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Нехай при необмеженому збільшенні числа відрізків розбиття ($n \to \infty$) довжина найбільшого з них буде прямувати до нуля $\max \Delta_k \to 0$.

<u>О з н а ч е н н я.</u> Якщо існує границя $\lim\limits_{\max\Delta_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)\Delta_k$, яка не залежить ні від способу розбиття $[a,b]$ на відрізки, ні від вибору точок x_k на цих відрізках, то ця границя називається ***визначеним (означеним) інтегралом*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Тобто, згідно з означенням,

$$\lim_{\max\Delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\Delta_k = \int_a^b f(x)\,dx . \qquad (3.2)$$

Числа a і b називаються відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування, $[a,b]$ – проміжком інтегрування. Функцію $f(x)$ називають інтегровною на $[a,b]$. Умови існування визначеного інтеграла дає така теорема.

<u>Т е о р е м а.</u> Всяка неперервна на $[a,b]$ функція є інтегровною на цьому відрізку.

Обчислювати визначений інтеграл шляхом граничного переходу в інтегральній сумі, як правило, недоцільно. Для цього існує формула, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралом, а саме формула Н ь ю т о н а – Л е й б н і ц а

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}, \qquad (3.3)$$

де $F(x)$ - одна з первісних неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$.

З а у в а ж е н н я. Якщо $f(x)$ задана графічно чи таблично, а також у випадках, коли первісна аналітично заданої функції $f(x)$ не виражається через елементарні функції, інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ обчислюють наближеними методами (див. Додаток 3).

3.2 Основні властивості визначеного інтеграла

I. Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du .$$

II. Визначений інтеграл змінює свій знак при перестановці меж інтегрування:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx . \qquad (3.4)$$

III. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b A\, f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx . \qquad (3.5)$$

IV. Визначений інтеграл від суми функцій рівний сумі визначених інтегралів від доданків:

$$\int_a^b [\, f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx . \qquad (3.6)$$

V. Якщо відрізок $[a,b]$ розбитий точкою c на частини $[a,c]$ і $[c,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx . \qquad (3.7)$$

VI. Визначений інтеграл з рівними межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 . \qquad (3.8)$$

VII. Визначений інтеграл від диференціала дорівнює різниці верхньої та нижньої меж інтегрування:

$$\int_a^b dx = b - a . \qquad (3.9)$$

VIII. Якщо $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

IX. Якщо $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

X. Якщо m та M - відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на $[a,b]$, то значення визначеного інтеграла можна оцінити подвійною нерівністю

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) .$$

3.3 Основні правила обчислення визначеного інтеграла

Для обчислення означеного інтеграла справедливі всі методи знаходження невизначеного інтеграла, а саме:

а) безпосереднє застосування формули Ньютона-Лейбніца;
б) метод заміни змінної (підстановки) у визначеному інтегралі;
в) метод інтегрування за частинами визначеного інтеграла.

3.3.1 Безпосереднє застосування формули Ньютона-Лейбніца

Згідно формули Ньютона-Лейбніца обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ зводиться до знаходження первісної $F(x)$ і подальшого обчислення значення виразу $F(b)-F(a)$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}.$$

Приклади

3.1. $\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}dx = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^1 = 2\left(e^{\frac{1}{2}} - e^0\right) = 2\left(\sqrt{e}-1\right).$

3.2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{p}{6} - 0 = \frac{p}{6}.$

3.3. $\int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} \frac{d(\sin x)}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(\sin x)^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg|_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} = \frac{3}{2}\left[\left(\sin\left(-\frac{p}{4}\right)\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\sin\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}}\right] =$

$= \frac{3}{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1\right).$

3.4. $\int_{-1}^{7} \frac{dt}{\sqrt{3t+4}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{7} \frac{d(3t+4)}{\sqrt{3t+4}} = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3t+4}\Big|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3\cdot 7+4} - \sqrt{3\cdot(-1)+4}\right) = \frac{2}{3}(5-1) = \frac{8}{3}.$

3.3.2 Метод заміни змінної (підстановки) у визначеному інтегралі

1°. Способи заміни змінної при обчисленні визначеного інтеграла.

Часто для спрощення обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ здійснюють перехід до нової змінної інтегрування (див. 1.4.2).

Розглянемо два способи введення нової змінної.

1) Незалежну змінну $x \in [a,b]$ замінюють деякою функцією $x = f(t)$, яка монотонна і неперервна разом зі своєю похідною $f'(t)$ на відрізку $[t_1, t_2]$, де t_1, t_2 – нові межі інтегрування. Значення t_1 і t_2 знаходять, розв'язавши відповідно рівняння $a = f(t_1)$ і $b = f(t_2)$.

Таким чином, перетворення визначеного інтеграла здійснюють за формулою

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f\left[f(t)\right] \cdot f'(t)dt}. \qquad (3.10)$$

Ввівши нову змінну і змінивши межі інтегрування, після обчислення перетвореного визначеного інтеграла немає потреби повертатись до попередньої змінної, як це робилось при знаходженні невизначеного інтеграла. Зауважимо, що недотримання всіх вимог до функції $f(t)$, що вводиться замість змінної x, може призвести до грубих помилок при обчисленні визначеного інтеграла.

<u>Приклади</u>

3.5. $$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ x = 1 \Rightarrow 1 = 2\sin t,\ t = \dfrac{p}{6} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = 2\sin t,\ t = \dfrac{p}{3} \end{array} \right\} = \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \frac{\left(8\sin^3 t+1\right)2\cos t}{4\sin^2 t \cdot \sqrt{4-4\sin^2 t}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \frac{8\sin^3 t\cos t + \cos t}{\sin^2 t \cdot 2\cos t}dt = 2\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \sin t\,dt + \frac{1}{4}\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} = -2\cos t\Big|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} - \frac{1}{4}ctg\,t\Big|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} =$$

$$= -2\left(\cos\frac{p}{3} - \cos\frac{p}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(ctg\frac{p}{3} - ctg\frac{p}{6}\right) = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{7}{6}\sqrt{3} - 1.$$

3.6. $$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow 0 = \cos t,\ t = \dfrac{p}{2} \\ x = 1 \Rightarrow 1 = \cos t,\ t = 0 \end{array} \right\} = -\int_{\frac{p}{2}}^{0} \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} \cdot \sin t\,dt = \int_0^{\frac{p}{2}} tg\frac{t}{2} \cdot \sin t\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2\frac{t}{2}dt = \int_0^{\frac{p}{2}} (1-\cos t)\,dt = (t - \sin t)\Big|_0^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \left(\frac{p}{2} - \sin\frac{p}{2}\right) = \left(\frac{p}{2} - 1\right).$$

2) Вводять нову змінну інтегрування z, як функцію старої змінної x, тобто $y(x)=z$. Тоді $y'(x)dx=dz$ і перетворення інтеграла здійсниться згідно формули

$$\boxed{\int_a^b f[y(x)]\cdot y'(x)\,dx=\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz} \qquad (3.11)$$

Нові межі інтегрування z_1 і z_2 знаходять, обчисливши відповідно $y(a)$ і $y(b)$, тобто $z_1=y(a)$, $z_2=y(b)$.

П р и к л а д и

3.7. $$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{e^x-1}=z, e^x=z^2+1\\ x=\ln(z^2+1),\ dx=\dfrac{2z}{z^2+1}dz\\ x=0\Rightarrow z=\sqrt{e^0-1}=0\\ x=\ln 2\Rightarrow z=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=1\end{array}\right\}=\int_0^1 z\cdot\frac{2z}{z^2+1}dz=2\int_0^1\frac{(z^2+1)-1}{z^2+1}dz=$$

$$=2\int_0^1 dz-2\int_0^1\frac{dz}{z^2+1}=2z\Big|_0^1-2\,arctg\,z\Big|_0^1=2(1-0)-2(arctg1-arctg0)=2-\frac{p}{2}.$$

3.8. $$\int_1^e\frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}1+\ln x=z,\ \ln x=z-1\\ x=e^{z-1},\ dx=e^{z-1}dz\\ x=1\Rightarrow z=1+\ln 1=1\\ x=e\Rightarrow z=1+\ln e=2\end{array}\right\}=\int_1^2\frac{\sqrt[4]{z}}{e^{z-1}}\cdot e^{z-1}dz=\int_1^2 z^{\frac{1}{4}}dz=\frac{4z^{\frac{5}{4}}}{5}\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{\frac{5}{4}}-1\right)=\frac{4}{5}(2\sqrt[4]{2}-1).$$

2°. Інтеграли виду $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, де $f(x)$ – парна або непарна функція.

Особливе місце серед визначених інтегралів займають інтеграли, проміжок інтегрування яких є симетричним відносно початку координат, а підінтегральна функція є парною або непарною.

Згідно властивості V визначеного інтеграла (див. 3.2)

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx.$$

Для обчислення інтеграла $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ використаємо підстановку $x=-z$ і використаємо той факт, що для непарної функції $f(-x)=-f(x)$, а для парної $f(-x)=f(x)$.

а) $f(x)$ – непарна функція. Тоді

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ dx=-dz \\ x=-a \Rightarrow z=a \\ x=0 \Rightarrow z=0 \end{array}\right\} = -\int_{a}^{0} f(-z)dz = \int_{a}^{0} f(z)dz = \int_{a}^{0} f(x)dx.$$

Отже, $I = \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$.

б) $f(x)$ – парна функція.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ dx=-dz \\ x=-a \Rightarrow z=a \\ x=0 \Rightarrow z=0 \end{array}\right\} = -\int_{a}^{0} f(-z)dz = -\int_{a}^{0} f(z)dz = \int_{a}^{0} f(z)dz = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Отже, $I = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Отримані результати варто запам'ятати:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f(x) - \text{непарна;} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{якщо } f(x) - \text{парна}. \end{cases}} \qquad (3.12)$$

3.3.3 Метод інтегрування за частинами

Для обчислення деяких типів визначених інтегралів використовують метод інтегрування за частинами. Випадки застосування методу аналогічні до описаних в 1.4.3.

Функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ вважають неперервними разом із своїми похідними $u'(x)$ та $v'(x)$ на проміжку інтегрування $[a, b]$, тоді формула інтегрування за частинами визначеного інтеграла має вигляд

$$\boxed{\int_{a}^{b} u\,dv = u\,v\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,du}. \qquad (3.13)$$

<u>Приклади</u>

3.9. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x}dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} x\cdot e^{-x}dx = \left\{\begin{array}{ll} u=x, & du=dx \\ dv=e^{-x}dx, & v=-e^{-x} \end{array}\right\} = -xe^{-x}\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} + \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} -$

$- e^{-x}\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = -\left(\ln 4\cdot e^{-\ln 4} - \ln 2\cdot e^{-\ln 2}\right) - \left(e^{-\ln 4} - e^{-\ln 2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

3.10. $\int\limits_{0}^{\frac{p}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, \quad du = dx; \qquad dv = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx, \\ v = \int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int -\dfrac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} \end{matrix} \right\} = x \cdot \frac{1}{\cos x}\Bigg|_0^{\frac{p}{3}} - \int\limits_0^{\frac{p}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{\cos\frac{p}{3}} -$

$$-\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{p}{3}} = \frac{2p}{3} - \left(\ln\left|tg\left(\frac{5p}{12}\right)\right| - \ln\left|tg\left(\frac{p}{4}\right)\right|\right) = \frac{2p}{3} - \ln\left|tg\left(\frac{5p}{12}\right)\right|.$$

Розділ 4 Невласні інтеграли

Для розглянутих нами в розділі 3 визначених інтегралів суттєвими були дві обставини:

1) проміжок інтегрування $[a,b]$ був відрізком із скінченними межами;

2) підінтегральна функція $f(x)$ була неперервною на $[a,b]$.

Інтеграли, для яких порушується перша або друга умови, називаються ***невласними інтегралами*** першого або другого роду відповідно.

4.1 Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (І роду)

Інтегрування в цьому випадку ведеться на проміжках $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ чи $(-\infty, +\infty)$.

1°. Інтеграли виду $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Якщо $f(x)$ – неперервна для всіх $a \le x < +\infty$, то вона неперервна і на будь-якому відрізку $[a,b]$, де $b \ge a$, і визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ існує. Таким чином, дослідження невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ зводиться до обчислення визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ шляхом граничного переходу при $b \to +\infty$:

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx}. \qquad (4.1)$$

У випадку, коли така границя є скінченим числом, інтеграл виду 1° називають ***збіжним***, якщо ж така границя є нескінченою або взагалі не існує, то такий інтеграл називають ***розбіжним***.

П р и к л а д и

4.1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx$.

За формулою (4.1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-2x}dx$, тому

$$\int\limits_0^{b} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^b = \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_b^0 = \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-2b}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^{2b}}\right);$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^{2b}}\right)\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{2b}} = \left\{\begin{array}{l} e^{2b} \to +\infty \\ \dfrac{1}{e^{2b}} \to 0 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$ – збіжний.

2°. Інтеграли виду $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ визначаються аналогічно. Вважаючи функцію $f(x)$ неперервною на $(-\infty,\, b]$, а тому і на будь-якому відрізку $[a,b]$, де $a \le b$, отримують

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx} \qquad (4.2)$$

Коли ця границя є скінченним числом, інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ називають ***збіжним***, в протилежному випадку – ***розбіжним***.

П р и к л а д и

4.2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \sin\left(2x+\frac{p}{4}\right)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 \sin\left(2x+\frac{p}{4}\right)dx$;

$$\int\limits_a^0 \sin\left(2x+\frac{p}{4}\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{p}{4}\right)\Big|_a^0 = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{p}{4} - \cos\left(2a+\frac{p}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(2a+\frac{p}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\cos\left(2a+\frac{p}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\cos\left(2a+\frac{p}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{a\to-\infty}\cos\left(2a+\frac{p}{4}\right)$ не існує, то $\int\limits_{-\infty}^{0}\sin\left(2x+\frac{p}{4}\right)dx$ - розбіжний.

3°. Інтеграли виду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ при умові, що $f(x)$ – неперервна на всій числовій осі, визначають як суму двох невласних інтегралів виду 1° і 2°:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx\,, \quad (4.3)$$

де c – довільне дійсне число.

Інтеграли (4.3) вважають збіжним, якщо збігаються о б и д в а невласні інтеграли $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ і $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, тобто існують і є скінченними обидві границі в правій частині формули (4.3). У протилежному випадку інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ називають розбіжним.

4.2 Невласні інтеграли від розривних функцій (ІІ роду)

Підінтегральна функція $f(x)$ терпить розрив ІІ роду, тобто є необмеженою на одному із кінців відрізка $[a,b]$ або у внутрішній точці $c\in[a,b]$. Розглянемо випадки:

1°. Функція $f(x)$ має розрив поблизу точки $x=b$, але інтегровна на проміжку $[a;\ b-e]$, де $e>0$ – довільне як завгодно мале число, тому існує визначений інтеграл $\int_{a}^{b-e} f(x)\,dx$. Тоді дослідження невласного інтеграла зводиться до обчислення визначеного інтеграла і знаходження границі згідно формули

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{e\to 0}\int_{a}^{b-e} f(x)\,dx}\,. \qquad (4.4)$$

Якщо така границя є скінченною, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, у протилежному випадку – ***розбіжним***.

<u>П р и к л а д и</u>

4.3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\ln x}$.

$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ розривна при $x=1$, тому $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{e\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-e} \frac{dx}{x\ln x}$;

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-e} \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\frac{1}{2}}^{1-e} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-e} = \ln\left|\ln(1-e)\right| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right|;$$

$$\lim_{e\to 0}\left[\ln\left|\ln(1-e)\right| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right|\right] = \left\{\begin{matrix} 1-e \to 1 \\ \ln(1-e)\to 0 \\ \ln\left|\ln(1-e)\right| \to -\infty \end{matrix}\right\} = -\infty - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| = -\infty\,.$$

Отже, інтеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\ln x}$ – розбіжний.

2°. Функція $f(x)$ має нескінчений розрив в околі точки $x=a$, але інтегровна на проміжку $[a+d;\, b]$, де $d>0$ – довільне як завгодно мале число. Тоді, аналогічно до 1°,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\int_{a+d}^{b} f(x)\,dx}. \tag{4.5}$$

Якщо така границя існує, причому скінченна, то невласний інтеграл ***збігається***, якщо ж границя нескінченна чи взагалі не існує, то інтеграл вважають ***розбіжним***.

<u>П р и к л а д и</u>

4.4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ розривна при $x=1$, тому $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{d\to 0}\int_{1+d}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

$$\int_{1+d}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} = \int_{1+d}^{2} \frac{(x-1)+1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_{1+d}^{2}\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}\right)\Bigg|_{1+d}^{2} =$$

$$=\left(\frac{2}{3}+2\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{d^3}+2\sqrt{d}\right)=\frac{8}{3}-2\left(\frac{\sqrt{d^3}}{3}+\sqrt{d}\right);$$

$\lim_{d\to 0}\left[\frac{8}{3}-2\left(\frac{\sqrt{d^3}}{3}+\sqrt{d}\right)\right]=\frac{8}{3}-2\cdot 0=\frac{8}{3}$, тому інтеграл $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$ – збіжний.

3°. Функція $f(x)$ є необмеженою в точці $x=c$, яка знаходиться всередині інтервалу $(a,\, b)$. Тоді невласний інтеграл розбивають на два невласні інтеграли згідно формули

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4.6}$$

Дослідження інтегралів, отриманих у правій частині рівності (4.6), описане в пп. 1° і 2°.

Тоді невласний інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ ***збігається***, якщо збігаються о б и д в а інтеграли $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_c^b f(x)\,dx$, і ***розбігається***, якщо хоч один з цих інтегралів виявиться розбіжним.

4.3 Заміна змінної та інтегрування за частинами у невласних інтегралах

Оскільки невласні інтеграли є границями визначених (власних) інтегралів, то для них справедливі основні властивості та правила обчислення визначених інтегралів, зокрема, формула інтегрування за частинами та формула заміни змінної (див. 3.3.2, 3.3.3). при використанні цих формул необхідно лише здійснити відповідний граничний перехід.

Зауважимо, що в результаті застосування цих методів інтегрування даний невласний інтеграл може перейти у визначений (власний) інтеграл.

<u>П р и к л а д и</u>

4.5. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ - невласний I роду. Виконаємо заміну змінних:

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2} \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \to \infty \Rightarrow t \to 0 \end{array} \right\} = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{інтеграл є} \\ \text{визначеним} \end{array} \right\} = \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 0 = \frac{p}{4}.$$

4.6. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ - невласний II роду (розрив в точці $x = 2$). Виконаємо заміну:

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2\sin t,\ dx = 2\cos t\, dt \\ x = 0 \Rightarrow 0 = 2\sin t,\ t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow 2 = 2\sin t,\ t = \frac{p}{2} \end{array} \right\} = \int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{8\sin^3 t \cdot 2\cos t\, dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = 8\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \sin^3 t\, dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{інтеграл є} \\ \text{визначеним} \end{array} \right\} =$$

$$= -8\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} (1-\cos^2 t)\, d(\cos t) = 8\int\limits_{\frac{p}{2}}^{0} (1-\cos^2 t)\, d(\cos t) = 8\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\frac{p}{2}}^{0} = 8\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{16}{3}.$$

4.4 Ознаки збіжності невласних інтегралів

Часто для дослідження на збіжність невласних інтегралів від функцій, первісні для яких знаходяться важко або й взагалі не знаходяться в замкнутому вигляді, використовують ознаки збіжності. Ось деякі з них:

I. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ – невід'ємні для $x \ge a$, причому $f(x) \le g(x)$, тоді, якщо збігається $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$, то і збігається $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$; якщо розбігається $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, то розбігається $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$.

II. Нехай для функцій $f(x)$ і $g(x)$ існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k,\quad 0<k<\infty$. Тоді невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються (чи розбігаються) одночасно.

III. Нехай функція $f(x)$ при $x\ge a$ набуває значень різних знаків. Тоді, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

З а у в а ж е н н я 1. Для визначення збіжності невласних інтегралів від розривних функцій застосовують ознаки, аналогічні до сформульованих для інтегралів з нескінченними межами інтегрування.

З а у в а ж е н н я 2. При дослідженні на збіжність невласних інтегралів часто використовують порівняння із інтегралами $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^p}$ і $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$. Наведемо для довідки, що $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^p}$ збігається при $p<1$ і розбігається при $p\ge 1$; $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ збігається при $p>1$ і розбігається, якщо $p\le 1$.

П р и к л а д и

4.7. Дослідити на збіжність $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{arctg\,x}{x}dx$. Використаємо ознаку II. Для порівняння виберемо $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$ – розбіжний. Тоді $f(x)=\dfrac{arctg\,x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{arctg\,x}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}arctg\,x=\frac{p}{2}.$$ Отже, $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{arctg\,x}{x}dx$ теж розбігається.

4.8. Дослідити на збіжність $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}dx$. Використаємо ознаку III і розглянемо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|dx$. Оскільки $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\le\dfrac{1}{x^2}$, і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ – збіжний, то згідно ознаки I інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|dx$ теж збігається, а, отже, і даний $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}dx$. Останній у цьому випадку називається а б с о л ю т н о з б і ж н и м .

ЧАСТИНА III. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Розділ 5 Застосування визначеного інтеграла до деяких задач геометричного, фізичного та економічного змісту

5.1 Обчислення площ плоских фігур

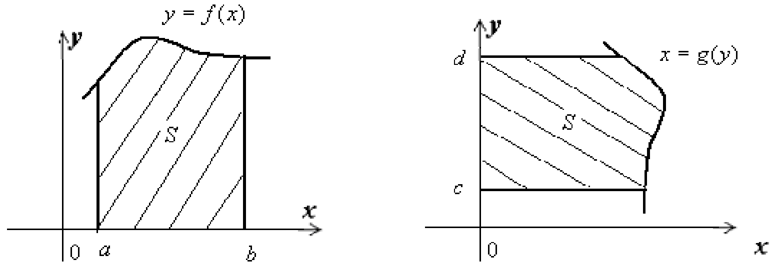
1°. Площа криволінійної трапеції в декартових координатах.

Для знаходження площі криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, віссю OX і кривою $y = f(x)$ (рис.1,а) використовують формулу

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}. \qquad (5.1)$$

Якщо фігура обмежена кривою $x = g(y)$, прямими $y = c$, $y = d$ та віссю OY (рис.1,б), то для знаходження її площі використовують формулу

$$\boxed{S = \int_c^d g(y)\,dy}. \qquad (5.2)$$



а) б)

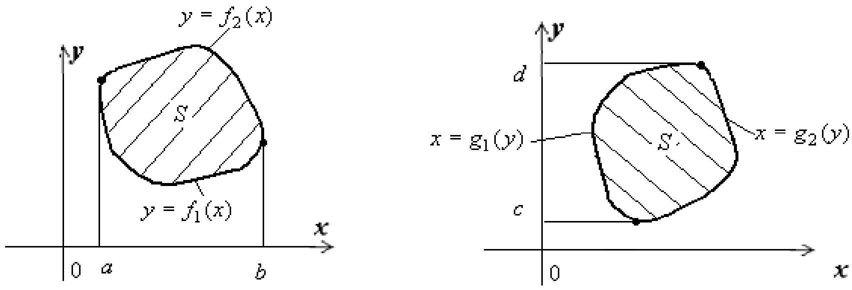
Рисунок 1

У випадку, коли фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, причому для $a \le x \le b$ виконується $f_2(x) \ge f_1(x)$ (рис.2,а), використовують формулу

$$\boxed{S = \int_a^b [\, f_2(x) - f_1(x)]\,dx}. \qquad (5.3)$$

Аналогічно, для знаходження площі фігури, обмеженої кривими $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, де $g_2(y) \ge g_1(y)$ для всіх $y \in [c; d\,]$ (рис.2,б), використовують формулу

$$\boxed{S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]\,dy}. \qquad (5.4)$$



а) б)

Рисунок 2

З а у в а ж е н н я 1. Фігури складніших форм розбивають на частини прямими, паралельними до осі OX (чи OY). Тоді шукана площа обчислюється як сума площ отриманих фігур.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо фігура або якась частина розміщені під віссю OX (рис.3), то за площу цієї фігури беруть додатне число

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)\,dx} \quad \text{або} \quad \boxed{S=\int_a^b \left|f(x)\right|dx}.$$

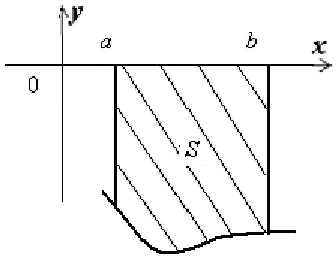


Рисунок 3

2°. Випадок параметричного задання кривої, що обмежує фігуру.

Якщо криву задано параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$, причому $t_1\le t\le t_2$, то

$$\boxed{S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt}. \qquad (5.5)$$

Межі зміни параметра t, якщо їх не задано, визначають, розв'язавши рівняння $x(t_1)=a$ і $x(t_2)=b$ відносно t, при умові, що $a\le x\le b$.

3°. Задання кривої в полярних координатах.

Для знаходження площі криволінійного сектора, обмеженого кривою $r=r(f)$, півпрямими $f=f_1$ і $f=f_2$, що виходять із полюса полярної системи координат (рис.4), використовують формулу

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_{f_1}^{f_2} r^2(f)\,df}. \qquad (5.6)$$

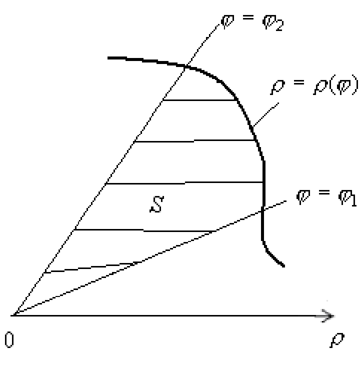


Рисунок 4

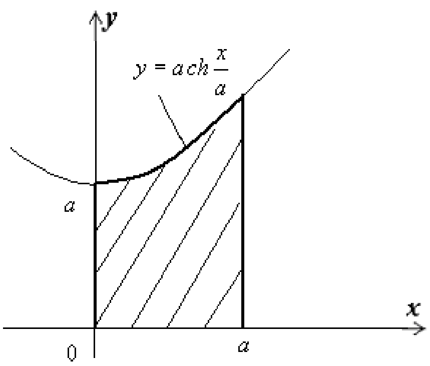
З а у в а ж е н н я. Рівняння деяких важливих кривих в декартових чи полярних координатах, а також у параметричній формі, наведені в Додатку 2.

П р и к л а д и

5.1. Обчислити площу фігури, обмеженої ланцюговою лінією $y = a\,ch\frac{x}{a}$ та прямими $x=0$, $x=a$ $(a>0)$, $y=0$.

Для знаходження площі криволінійної трапеції, що спирається на вісь OX, використовуємо формулу (5.1).

Тоді



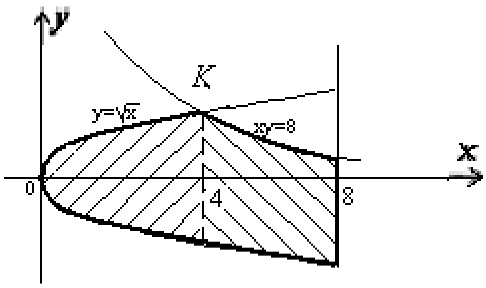
$$S = \int_0^a a\,ch\frac{x}{a}dx = a^2\int_0^a ch\frac{x}{a}d\left(\frac{x}{a}\right) = a^2 sh\frac{x}{a}\Big|_0^a = a^2\left(sh1 - sh0\right) =$$

$$= a^2 sh1 = a^2\,\frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{a^2}{2e}\left(e^2-1\right) \text{ (кв.од).}$$

5.2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = x$, гіперболою $xy = 8$ та прямою $x = 8$.

Знайдемо координати точки K перетину гіперболи та параболи:

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ xy = 8; \end{cases} \begin{cases} y^2 = x, \\ y^3 = 8; \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 2; \end{cases} \Rightarrow \quad K(4;2).$$



Шукана площа S буде сумою площ S_1 та S_2. Тут S_1 – площа параболічного сегмента для $0 \le x \le 4$. Врахуємо симетричність фігури відносно осі OX і рівняння верхньої вітки параболи $y = \sqrt{x}$:

$$S_1 = 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{4}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\cdot 8 = \frac{32}{3} \text{ (кв.од.).}$$

S_2 – площа фігури, обмеженої зверху гіперболою $y = \frac{8}{x}$, знизу віткою параболи $y = -\sqrt{x}$ та прямими $x = 4$, $x = 8$. В цьому випадку за формулою (5.3)

$$S_2 = \int_4^8\left(\frac{8}{x} - \left(-\sqrt{x}\right)\right)dx = 8\int_4^8\frac{dx}{x} + \int_4^8\sqrt{x}\,dx = 8\ln x\Big|_4^8 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_4^8 = 8(\ln 8 - \ln 4) + \frac{2}{3}\left(8^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= 8\ln 2 + \frac{2}{3}\left(16\sqrt{2} - 8\right) = 8\ln 2 + \frac{32}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{3} \text{ (кв.од.).}$$

Отже, шукана площа

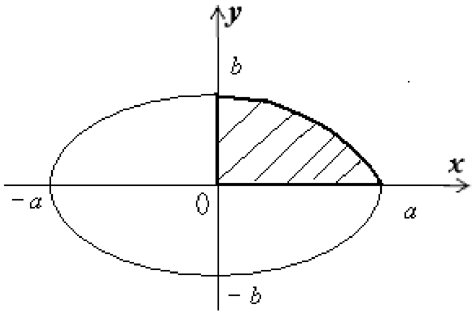
$$S = S_1 + S_2 = \frac{32}{3} + 8\ln 2 + \frac{32}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{3} = 8\ln 2 + \frac{16}{3}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) \text{ (кв.од.).}$$

5.3. Обчислити площу еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

З огляду на симетрію фігури відносно осей координат обмежимось обчисленням четвертої частини шуканої площі (для $0 \le x \le a$).

Запишемо параметричні рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$



і врахуємо, що при $x=0$ $t_1=\frac{\pi}{2}$, при $x=a$ $t_2=0$.

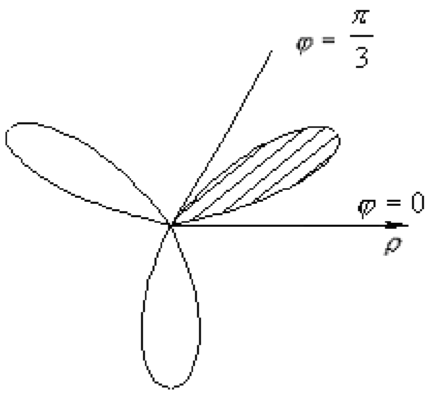
Застосуємо формулу (5.5):

$$\frac{1}{4}S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(a\cos t)'dt=-ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi ab}{4}.$$

Тоді площа еліпса $S=4\cdot\frac{\pi ab}{4}=\pi ab$ (кв.од.).

5.4. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho=2\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).



Лінію задано в полярних координатах, тому з умови $\rho\ge 0$ отримаємо:

$$\rho=2\sin 3\varphi,\quad \sin 3\varphi\ge 0,$$

$$0+\frac{2\pi n}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\quad n\in Z.$$

Тобто, в межах однієї пелюстки (наприклад, при $n=0$) φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{3}$. Площу однієї пелюстки знайдемо, використавши формулу (5.6):

$$\frac{1}{3}S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin 3\varphi)^2\,d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3\varphi\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi=\left(\varphi-\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin 2\pi=\frac{\pi}{3}\text{(кв.од.)}.$$

Отже, шукана площа буде $S=3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$ (кв.од.).

5.2 Обчислення об’ємів тіл

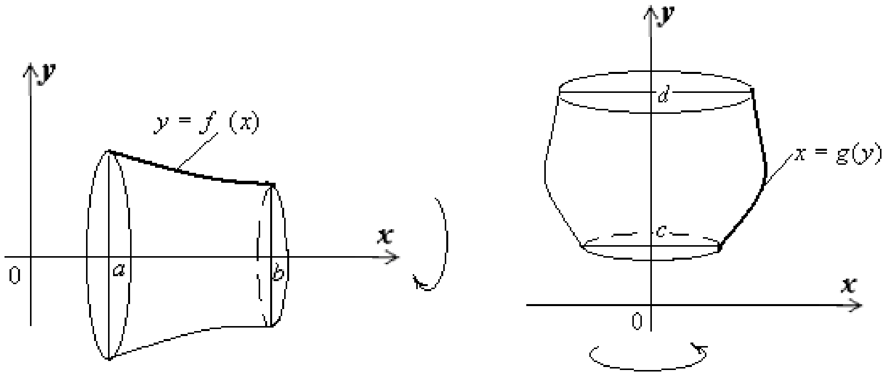
1°. Об’єм тіла обертання.

Якщо тіло утворене внаслідок обертання навколо осі OX криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис.5, а), то для знаходження об’єму використовують формулу

$$\boxed{V = p\int_a^b [\,f(x)]^2\,dx} \qquad (5.7)$$

Аналогічно, при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = g(y)$, прямими $y = c$, $y = d$, $x = 0$ навколо осі OY (рис.5, б) отримують тіло, об’єм якого

$$\boxed{V = p\int_c^d [g(y)]^2\,dy} \qquad (5.8)$$



а) б)

Рисунок 5

2°. Знаходження об’єму тіла за поперечними перерізами.

Якщо відома площа $S(x)$ довільного поперечного перерізу тіла, зробленого площиною, перпендикулярною до осі OX, причому в межах тіла $a \le x \le b$ (рис.6), то об’єм можна знайти за формулою

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}. \qquad (5.9)$$

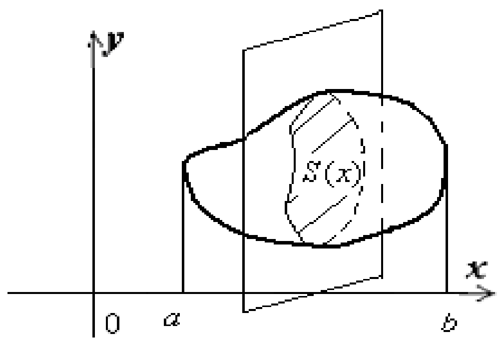


Рисунок 6

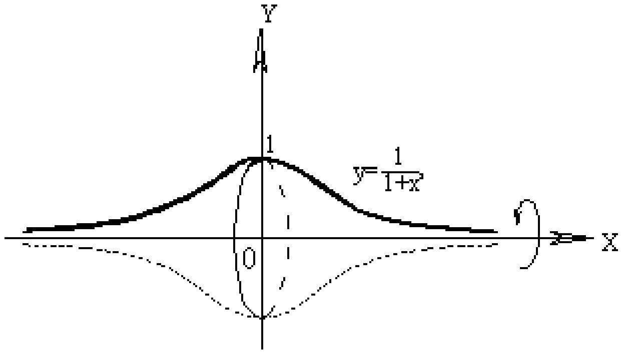
Аналогічно, здійснюючи перерізи тіла площинами, перпендикулярними до осі OY (чи OZ) і отримуючи відповідно площі $Q(y)$ $(c \le y \le d)$, чи $P(z)$ $(r \le z \le s)$, отримаємо формули:

$$\boxed{V = \int_c^d Q(y)\,dy}, \tag{5.10}$$

$$\boxed{V = \int_r^s P(z)\,dz}. \tag{5.11}$$

П р и к л а д и

5.5. Обчислити об'єм нескінченого веретена, утвореного внаслідок обертання кривої $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (локон Аньєзі) навколо асимптоти.



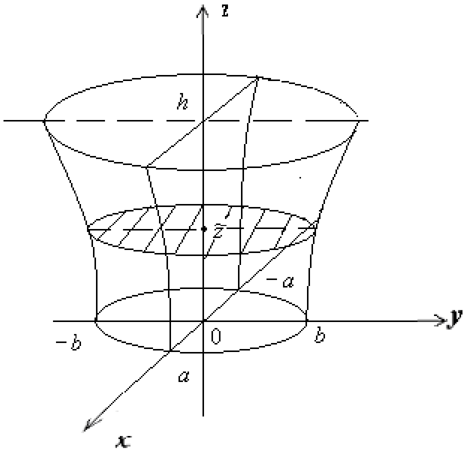
Асимптотою кривої є вісь OX $(-\infty < x < +\infty)$, тому знайдемо половину шуканого об'єму для $0 \le x < +\infty$, застосувавши формулу (5.7).

$$\frac{1}{2}V = p\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = \left\{\begin{array}{ll} x = tg\,t, & dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ x = 0 & \Rightarrow \quad t = 0 \\ x \to +\infty & \Rightarrow \quad t \to \dfrac{p}{2} \end{array}\right\} = p\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{1+tg^2 t}\right)^2 \frac{dt}{\cos^2 t} = p\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^4 t}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= p\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{p}{2}\int_0^{\frac{p}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{p}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2} = \frac{p^2}{4} \text{ (куб.од.).}$$

Тоді $V = \dfrac{p^2}{2}$ (куб.од.).

5.6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ і площинами $z = 0$, $z = h$.



Здійснимо переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі OZ на відстані $\bar{z}$ від початку координат $0 < \bar{z} < h$. Тоді рівняння перерізу отримаємо, підставивши $z = \bar{z}$ в рівняння гіперболоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\bar{z}^2}{c^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + \bar{z}^2}{c^2}, \text{ або}$$

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2+\lambda^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(c^2+\lambda^2)}{c^2}}=1$$ - рівняння еліпса з півосями $\frac{a\sqrt{c^2+\lambda^2}}{c}$, $\frac{b\sqrt{c^2+\lambda^2}}{c}$.

Як відомо, площа еліпса дорівнює добутку півосей і числа p (див. задачу 5.3).

Тому площа поперечного перерізу $P=p\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot(c^2+\lambda^2)$.

Замінивши λ біжучою координатою z, $0\le z\le h$, отримаємо площу поперечного перерізу як функцію координати z:

$$P(z)=\frac{p\,ab}{c^2}(c^2+z^2).$$

Тоді згідно формули (5.11) отримаємо:

$$V=\int_0^h\frac{p\,ab}{c^2}(c^2+z^2)dz=\frac{p\,ab}{c^2}\int_0^h(c^2+z^2)dz=\frac{p\,ab}{c^2}\left[c^2z\Big|_0^h+\frac{z^3}{3}\Big|_0^h\right]=\frac{p\,ab}{c^2}\left[c^2h+\frac{h^3}{3}\right]=$$

$$=p\,ab\left(h+\frac{h^3}{3c^2}\right)=p\,abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)\text{(куб.од.)}.$$

5.3 Знаходження довжини дуги плоскої кривої

Якщо крива задана в декартових координатах рівнянням $y=f(x)$, причому $a\le x\le b$, то для знаходження довжини лінії використовують формулу

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}. \qquad (5.12)$$

Якщо криву задано параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, то довжину лінії знаходять за формулою

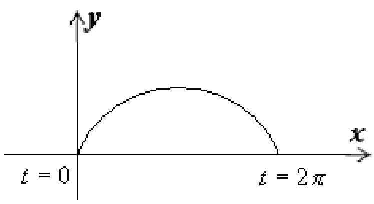
$$\boxed{L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}. \qquad (5.13)$$

Якщо криву задано в полярних координатах рівнянням $r=r(f)$ і $f_1\le f\le f_2$, то її довжину обчислюють за формулою

$$\boxed{L=\int_{f_1}^{f_2}\sqrt{r^2+(r')^2}\,df}. \qquad (5.14)$$

<u>П р и к л а д и</u>

5.7. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.



Для визначення меж зміни параметра t розв'яжемо рівняння $y=0$:

$y=0$ або $a(1-\cos t)=0$, $\cos t=1$, $t=2p\,n,\ n\in Z$.

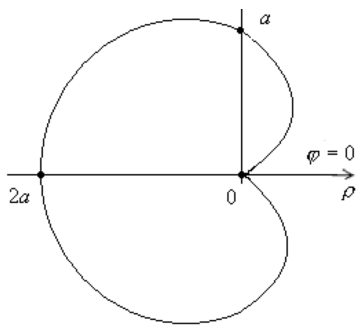
При $n=0$ і $n=1$ отримаємо відповідно $t_1=0$ і $t_2=2p$.

Тоді, застосувавши (5.13), отримаємо:

$$L=\int\limits_0^{2p}\sqrt{\left[a(t-\sin t)'\right]^2+\left[a(1-\cos t)'\right]^2}\,dt=a\int\limits_0^{2p}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=a\int\limits_0^{2p}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\,a\int\limits_0^{2p}\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_{2p}^{0}=4a(\cos 0-\cos p)=8a \text{ (од.довжини).}$$

5.8. Знайти довжину дуги кардіоїди $r=a(1-\cos f)$.



Криву задано в полярних координатах; умова $r\ge 0$ виконується для всіх значень f, тому межами інтегрування будуть $f_1=0$ і $f_2=2p$.

Внаслідок парності функції косинус маємо $r(f)=r(-f)$, отже, крива симетрична відносно прямої, що містить полярну вісь. Тому обчислимо половину шуканої довжини, використавши формулу (5.14):

$$\frac{1}{2}L=\int\limits_0^{p}\sqrt{a^2(1-\cos f)^2+\left[a(1-\cos f)'\right]^2}\,df=a\int\limits_0^{p}\sqrt{1-2\cos f+\cos^2 f+\sin^2 f}\,df=$$

$$=a\int\limits_0^{p}\sqrt{2-2\cos f}\,df=4a(\cos 0-\cos\frac{p}{2})=4a \text{ (од.довжини).}$$

Отже, довжина дуги кардіоїди $L=8a$ (од.довжини).

При обчисленні інтеграла використали результати попередньої задачі.

5.4 Знаходження площі поверхні обертання

При обертанні навколо деякої осі крива утворює поверхню обертання.

Якщо крива, задана рівнянням $y=f(x)$, $x\in[a;b]$ обертається навколо осі OX, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$\boxed{P=2p\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}. \qquad (5.15)$$

Якщо крива задана параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, то площа поверхні обертання навколо осі OX знаходиться за формулою

$$\boxed{P=2p\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt}. \qquad (5.16)$$

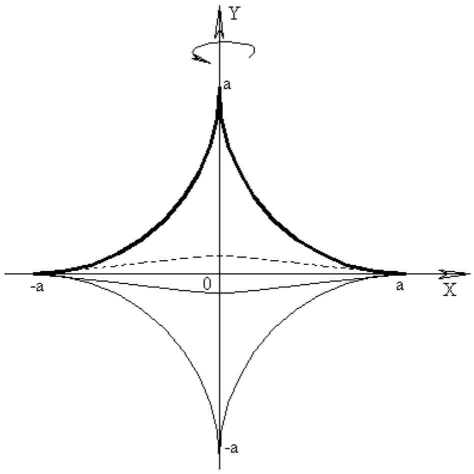
Якщо крива задана рівнянням в полярних координатах $r=r(f)$, $f_1\le f\le f_2$, то площа поверхні, утвореної обертанням кривої навколо полярної осі r, обчислюється за формулою

$$\boxed{P=2p\int\limits_{f_1}^{f_2} r(f)\sqrt{r^2(f)+\left[r'(f)\right]^2}\,df}. \qquad (5.17)$$

П р и к л а д

5.9. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі OY.

Внаслідок симетрії астроїди відносно осі OY будемо обчислювати площу половини поверхні ($0 \le y \le a$). Використаємо параметричні рівняння астроїди:



$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

та визначимо межі зміни параметра t:

при $y = 0$ $\quad t = 0$; $\qquad$ при $y = a$ $\quad t = \frac{p}{2}$.

Тоді за формулою (5.16)

$$P = 2p\int_0^{\frac{p}{2}} a\sin^3 t \cdot \sqrt{\left((a\cos^3 t)'\right)^2 + \left((a\sin^3 t)'\right)^2}\,dt =$$

$$= 2p\,a\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^3 t \cdot \sqrt{\left(3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$= 6p\,a^2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^3 t \cdot \sqrt{\cos^4 t\cdot\sin^2 t + \sin^4 t\cdot\cos^2 t}\,dt = 6p\,a^2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^3 t\cdot\sin t\cdot\cos t\ dt =$$

$$= 6p\,a^2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^4 t\,d(\sin t) = 6p\,a^2\cdot\left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{6}{5}p\,a^2(\sin^5\frac{p}{2} - \sin^5 0) = \frac{6}{5}p\,a^2 \text{ (куб.од.)}.$$

Отже, площа поверхні обертання астроїди $P = \frac{12}{5}p\,a^2$ (куб.од.)

5.5 Знаходження роботи змінної сили

Роботу неперервної змінної сили $F(x)$, що виконується при переміщенні матеріальної точки із положення $x = a$ в положення $x = b$ в напрямку осі OX, обчислюють за формулою

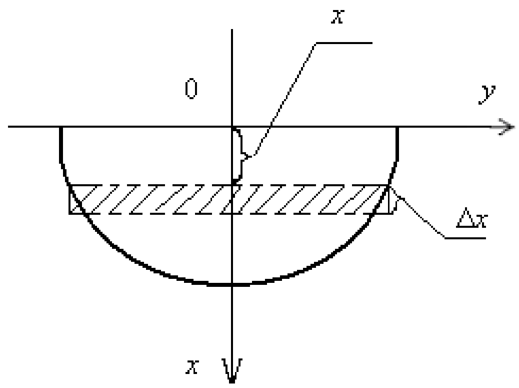
$$\boxed{A = \int_a^b F(x)\,dx}. \qquad (5.18)$$

З а у в а ж е н н я. Інколи при розв’язуванні задач фізичного змісту використовують такий прийом: розглядаючи елемент аргументу Δx, визначають наближено елемент досліджуваної величини ΔQ, що відповідає проміжку Δx. Якщо аргумент x змінюється від a до b, то значення досліджуваного параметра отримують при інтегруванні ΔQ в межах від a до b, тобто

$$Q = \int_a^b \Delta Q\,dx.$$

П р и к л а д

5.10. Обчислити роботу, яку необхідно витратити на викачування води із котла, який має формулу півкулі з радіусом R .



Робота, необхідна для підняття тіла масою m на висоту h, рівна mgh, де g - прискорення вільного падіння тіла. Але різні шари води знаходяться на різній глибині і, звичайно, робота для їх викачування буде різною. Підрахуємо роботу ΔA, необхідну для підняття шару води висотою Δx , який знаходиться на глибині x від вільної поверхні води.

Наближено будемо вважати шар води циліндричним тілом, радіус якого y , висота Δx , густина $r = 1$. Тоді $\Delta A \approx \Delta m\, g\, h = p\ y^2\, r\ g\, x\, \Delta x$.

Радіус елементарного шару y знайдемо з рівняння кола, отриманого в перерізі: $y^2 = R^2 - x^2$. Тому $\Delta A \approx p\ r\ g\left(R^2 - x^2\right) x \Delta x$. Вся робота A , яку необхідно виконати для викачування води, буде рівна

$$A = \int_0^R p\ r\ g\left(R^2 x - x^3\right)dx = p\ r\ g\left(\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = p\ r\ g\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{1}{4} p\ r\ g\, R^4 .$$

Отже, $A = \frac{1}{4} p\ r\ g\, R^4$.

5.6 Знаходження кординат центра ваги

Для визначення координат центра ваги матеріальної однорідної лінії зі сталою густиною ($r = const$), заданої в декартових координатах рівнянням $y = f(x)$, $a \le x \le b$, використовують формули:

$$\boxed{x_C = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx}, \qquad y_C = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx}}. \qquad (5.19)$$

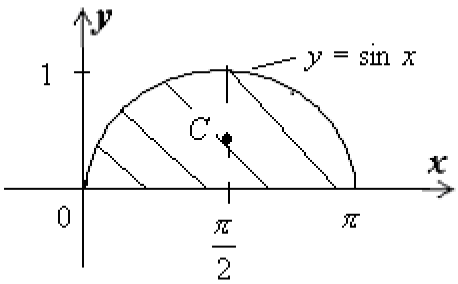
Для визначення координат центра ваги матеріальної однорідної криволінійної трапеції зі сталою густиною ($r = const$), обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю OX , використовують формули:

$$\boxed{x_C = \frac{\int_a^b x\cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad y_C = \frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}}. \qquad (5.20)$$

З а у в а ж е н н я. Якщо однорідна матеріальна лінія чи фігура має вісь симетрії, то її центр ваги лежить на цій осі.

П р и к л а д

5.11. Знайти центр ваги плоскої пластинки, густина якої вважається сталою ($r = 1$), обмеженої лініями: $y = \sin x$, $x = 0$, $x = p$, $y = 0$.



Пластина має вісь симетрії $x = \frac{p}{2}$ і рівномірно розподілену густину, тому центр ваги знаходиться на цій осі: $x_C = \frac{p}{2}$.

Для знаходження y_C використаємо другу з формул (5.20), попередньо обчисливши два інтеграли:

$$\int_0^p (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^p (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^p = \frac{p}{2},$$

$$\int_0^p \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^p = \cos 0 - \cos p = 1-(-1) = 2. \text{ Тому } y_C = \frac{\frac{p}{2}}{2\cdot 2} = \frac{p}{8}.$$

Отже, центр ваги пластинки знаходиться в точці $C\left(\frac{p}{2}; \frac{p}{8} \right)$.

5.7 Знаходження статичних моментів та моментів інерції

Якщо матеріальну однорідну криву задано в декартових координатах рівнянням $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то статичні моменти дуги цієї кривої відносно осей координат OX, OY обчислюються відповідно за формулами:

$$\boxed{M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx, \qquad M_y = \int_a^b x\sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx}, \quad (5.21)$$

а моменти інерції можна знайти так:

$$\boxed{I_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\,dx}, \quad (5.22)$$

Для знаходження статичних моментів відносно осей OX і OY матеріальної однорідної криволінійної трапеції, обмеженої лініями в декартових координатах $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, використовують формули:

$$\boxed{M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx, \qquad M_y = \int_a^b x\cdot f(x)\,dx}, \quad (5.23)$$

для знаходження моментів інерції – формули:

$$\boxed{I_x = \frac{1}{4}\int_a^b f^3(x)\,dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx}, \quad . \quad (5.24)$$

5.8 Знаходження об’єму продукції та дисконтованої суми

Якщо відомо функцію продуктивності праці $P(t)$, де t – час, то об’єм продукції, виготовленої протягом відрізку часу $[t_1, t_2]$ обчислюється за формулою

$$\boxed{V = \int\limits_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt}. \qquad (5.25)$$

Якщо прибуток, що змінюється з часом, описується функцією $f(t)$ і на нього неперервно нараховуються складні відсотки із питомою процентною ставкою r, то загальна дисконтована сума капіталу за проміжок часу $[0, T]$ обчислюється за формулою

$$\boxed{S = \int\limits_{0}^{T} f(t)e^{-rt}\,dt}. \qquad (5.26)$$

<u>Приклад</u>

5.12. Компанія повинна обрати одну із двох можливих стратегій розвитку:

1) вкласти 10 млн. гривень у нове обладнання і одержувати 3 млн. гривень прибутку кожного року протягом 10 років;

2) закупити на 15 млн. гривень більш досконале обладнання, яке дозволить одержати 5 млн. гривень прибутку щорічно протягом 7 років.

Яку стратегію треба обрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна ставка 10%?

Якщо $f(t)$ є прибуток за час t і $r = \dfrac{R}{100}$ є номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t = 0$ та $t = T$ дорівнює $\int\limits_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$.

При $R = 10$ маємо $r = 0{,}1$. Тому для першої стратегії дійсне значення прибутку за 10 років буде

$$P_1 = \int\limits_0^{10} 3e^{-0{,}1t}\,dt - 10 = \left[-30e^{-0{,}1t}\right]\Big|_0^{10} - 10 = 30\left(1 - e^{-1}\right) - 10 = 8{,}96 \text{ (млн.гр.)}.$$

Для другої стратегії одержимо:

$$P_2 = \int\limits_0^{7} 5e^{-0{,}1t}\,dt - 15 = 50\left(1 - e^{-0{,}7}\right) - 15 = 10{,}17 \text{ (млн.гр.)}.$$

Отже, друга стратегія краща, ніж перша і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку компанії.

Додаток 1

Елементарна теорія раціональних дробів

1°. Види раціональних дробів.

Дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають ***раціональним***, якщо його чисельник і знаменник – многочлени. Раціональний дріб називають ***правильним***, якщо степінь n многочлена $P_n(x)$ менший від степеня m многочлена $Q_m(x)$, у протилежному випадку $(n \geq m)$ раціональний дріб називають ***неправильним***.

Із неправильного раціонального дробу завжди можна виділити цілу частину (многочлен). Це досягається шляхом ділення чисельника на знаменник за правилом ділення многочленів. Отже, ***всякий неправильний раціональний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена і правильного дробу***:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{P_s(x)}{Q_m(x)}, \quad \text{де } s < m.$$

Найпростішими (елементарними) раціональними дробами називають правильні дроби чотирьох типів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad \text{IV. } \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n},$$

де $n \geq 2$, $p^2 - 4q < 0$; A, B – деякі числа.

2°. Розклад многочлена на множники.

Якщо при $x = x_1$ многочлен

$$Q_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m \tag{1}$$

перетворюється в нуль, тобто $P(x_1) = 0$, то число x_1 називають ***коренем*** многочлена. Многочлен m-го степеня може мати не більше m різних коренів. Якщо серед коренів многочлена число x_1 зустрічається r разів, то x_1 називається r-кратним коренем многочлена. При $m = 1$ x_1 називають простим коренем.

Якщо числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – дійсні корені многочлена (1) кратностей $a, b, \ldots, g$ відповідно, то цей многочлен можна розкласти на множники

$$Q_m(x) = a_0 (x - x_1)^a (x - x_2)^b \ldots (x - x_k)^g , \tag{2}$$

причому $a + b + \ldots + g = m$.

Якщо ж многочлен (1) має не тільки дійсні, але й комплексні корені, то справедлива формула

$$Q_m(x) = a_0(x-x_1)^a (x-x_2)^b \ldots (x-x_m)^g (x^2+p_1x+q_1)^r (x^2+p_2x+q_2)^s \ldots (x^2+p_kx+q_k)^t , \tag{3}$$

причому $a + b + \ldots + g + 2(r + s + \ldots + t) = m$.

Квадратичні множники $x^2 + p_j x + q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ мають від'ємні дискримінанти $p_j^2 - 4q_j < 0$ і, відповідно, комплексно спряжені пари коренів. Тому на множники першого степеня з дійсними коефіцієнтами не розкладаються.

3°. Розклад правильного раціонального дробу на елементарні (найпростіші) дроби.

Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\dfrac{P_s(x)}{Q_m(x)}$ представлений у вигляді (3). Тоді цей дріб можна подати у вигляді суми елементарних дробів. У цій сумі кожному множнику виду $(x-x_1)^a$ відповідає вираз, що містить елементарні дроби I та II типів:

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_a}{(x-x_1)^a},$$

а кожному множнику $(x^2+p_1x+q_1)^r$ – вираз, що містить дроби III та IV типів:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+p_1x+q_1)^r}.$$

Коефіцієнти розкладу $A_1, A_2, \ldots, A_a$, $M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_r, N_r$ – шукані дійсні числа.

Якщо у розкладі правильного дробу на елементарні дроби отримано **лише дроби I-го типу**, то для визначення коефіцієнтів розкладу використовують ***метод часткових значень***. З цією метою зводять елементарні дроби із невизначеними коефіцієнтами до спільного знаменника $Q_m(x)$ і прирівнюють многочлен із невизначеними коефіцієнтами, отриманий у чисельнику, до многочлена $P_s(x)$. Тоді змінній x надають послідовно значень $x_1, x_2, \ldots, x_m$, де $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – усі різні дійсні прості корені знаменника $Q_m(x)$. Таким чином отримують систему m рівностей для визначення m коефіцієнтів розкладу.

Якщо у розкладі правильного дробу на елементарні дроби отримано **не лише дроби I-го типу**, то для визначення коефіцієнтів розкладу використовують ***метод невизначених коефіцієнтів***. З цією метою зводять елементарні дроби із невизначеними коефіцієнтами до спільного знаменника $Q_m(x)$ і прирівнюють многочлен із невизначеними коефіцієнтами, отриманий у чисельнику, до многочлена $P_s(x)$. Тоді прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x у правій і лівій частинах рівності і приходять до розв'язування лінійної системи рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу.

<u>П р и к л а д 1.</u> Розкласти на суму найпростіших дробів: $\dfrac{2x^2+3x+5}{\left(x^2+1\right)^3(x-2)^2(x-3)^3}$.

Знаменник дробу розкладений на прості множники: $\left(x^2+1\right)^3$, $(x-2)^2$, $(x-3)^3$.

Множнику $\left(x^2+1\right)^3$ буде відповідати сума трьох найпростіших дробів, оскільки показник степеня при x^2+1 дорівнює 3: $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\dfrac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}+\dfrac{M_3x+N_3}{\left(x^2+1\right)^3}$, множнику $(x-2)^2$ — сума двох найпростіших дробів, бо показник степеня при $x-2$ дорівнює 2: $\dfrac{A_1}{x-2}+\dfrac{A_2}{(x-2)^2}$, множнику $(x-3)^3$— сума трьох найпростіших дробів, оскільки показник степеня при $x-3$ дорівнює 3: $\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}+\frac{B_3}{(x-3)^3}$. Таким чином, розклад буде мати вигляд:

$$\frac{2x^2+3x+5}{\left(x^2+1\right)^3(x-2)^2(x-3)^3}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+1\right)^3}++\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+$$

$$\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}+\frac{B_3}{(x-3)^3},$$

де $M_1,N_1,M_2,N_2,M_3,N_3,\ A_1,A_2,B_1,B_2,B_3$ — дійсні коефіцієнти, які потрібно визначити.

<u>П р и к л а д 2.</u> Виділити цілу частину з неправильного раціонального дробу $R(x)=\frac{3x^5-2x^3+4}{x^2+x+1}$.

Виконаємо ділення чисельника на знаменник:

$$\begin{array}{r|l}
3x^5-2x^3+4 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
-\ \ 3x^5+3x^4+3x^3 & 3x^3-3x^2-2x+5 \\ \cline{1-1}
-3x^4-5x^3+4 & \\
-\ \ -3x^4-3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1}
-2x^3+3x^2+4 & \\
-\ \ -2x^3-2x^2-2x & \\ \cline{1-1}
5x^2+2x+4 & \\
-\ \ 5x^2+5x+5 & \\ \cline{1-1}
-3x-1 \leftarrow \text{залишок} &
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x^5-2x^3+4}{x^2+x+1}=\underbrace{3x^3-3x^2-2x+5}_{\text{многочлен}}+\underbrace{\frac{-3x-1}{x^2+x+1}}_{\text{правильний рац.дріб}}$$

<u>П р и к л а д 3.</u> Розкласти правильний раціональний дріб на найпростіші та визначити коефіцієнти розкладу: $\frac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}$.

Знаменник вже розкладений на найпростіші множники, тому

$$\frac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}=\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A}{x-2}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A,B,C,D,E. Оскільки серед найпростіших дробів є дроби III та IV типів, то застосуємо метод невизначених коефіцієнтів.

Для цього приведемо всі дроби в правій частині до спільного знаменника:

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A}{x-2}=\frac{(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2)}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}+\frac{(Dx+E)(x-2)}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}+\frac{A\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}.$$

Тоді

$$\frac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}=\frac{(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2)+(Dx+E)(x-2)+A\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}.$$

З рівності чисельників

$2x^2+2x+13=(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2)+(Dx+E)(x-2)+A\left(x^2+1\right)^2$, або

$2x^2+2x+13=$

$=Bx^4+Cx^3+Bx^2+Cx-2Bx^3-2Cx^2-2Bx-2C+Dx^2+Ex-2Dx-2E+Ax^4+2Ax^2+A.$

Прирівняємо коефіцієнти многочленів у лівій та правій частинах рівності при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0=A+B, \\ x^3 & 0=-2B+C, \\ x^2 & 2=2A+B-2C+D, \\ x^1 & 2=-2B+C-2D+E, \\ x^0 & 13=A-2C-2E \end{array}$$

Звідси $A=1,\ \ B=-1,\ \ C=-2,\ \ D=-3,\ \ E=-4.$

Таким чином, $\dfrac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}=-\dfrac{x+2}{x^2+1}-\dfrac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}+\dfrac{1}{x-2}.$

П р и к л а д 4. Розкласти на найпростіші дроби $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}.$

Раціональний дріб – правильний, тому розкладемо його на суму елементарних дробів. Оскільки $x^3+x^2-6x=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$, то

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x+3)(x-2)+B\,x(x-2)+C\,x(x+3)}{x(x+3)(x-2)}.$$

Зауважимо, що серед найпростіших маємо лише дроби І типу. Прирівняємо чисельники рівних дробів:

$x^2+x-1=A(x+3)(x-2)+B\,x(x-2)+C\,x(x+3)$.

Для визначення A, B, C використаємо метод часткових значень, надаючи змінній x значень –3; 0; 2.

При $x=-3$: $\quad 9-3-1=A\cdot 0+B\cdot(-3)\cdot(-5)+C\cdot 0, \quad 5=15B, \quad B=\dfrac{1}{3}.$

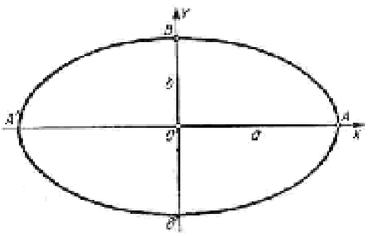
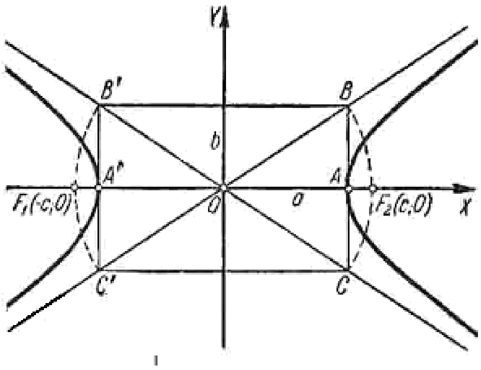
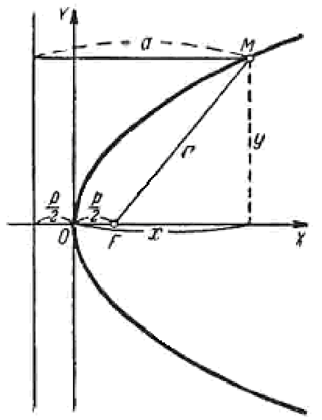
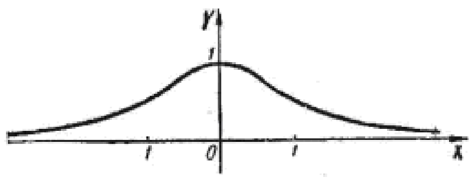
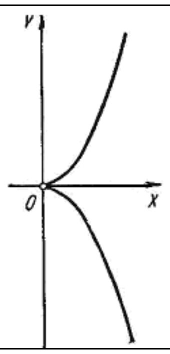
При $x=0$: $\quad -1=A\cdot 3\cdot(-2)+B\cdot 0+C\cdot 0, \quad -1=-6A, \quad A=\dfrac{1}{6}.$

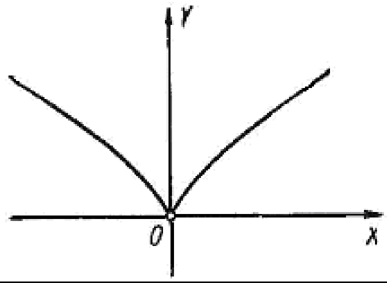
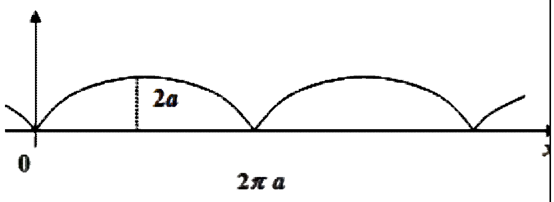
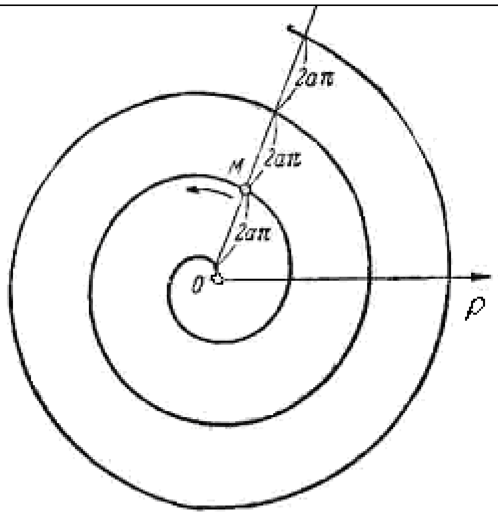
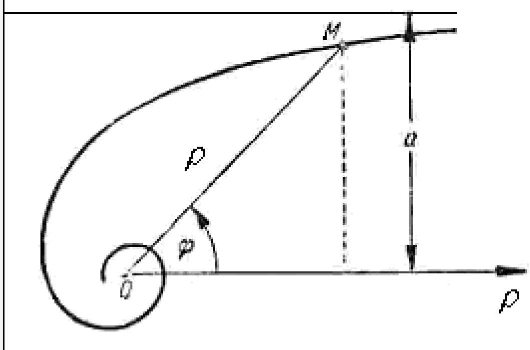
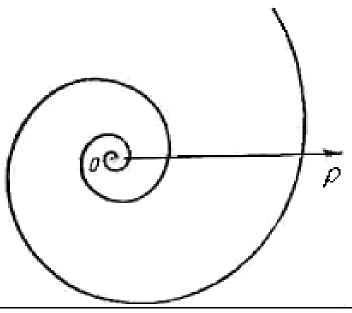
При $x=2$: $\quad 4+2-1=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 2\cdot 5, \quad 5=10C, \quad C=\dfrac{1}{2}.$

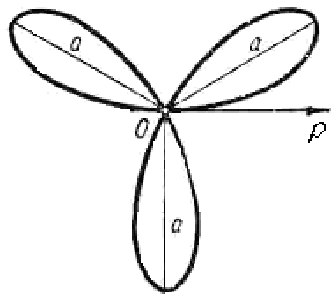
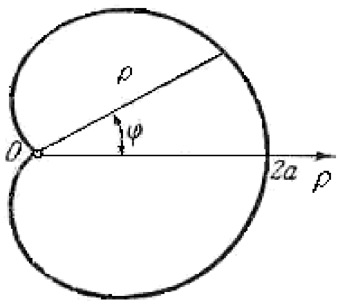
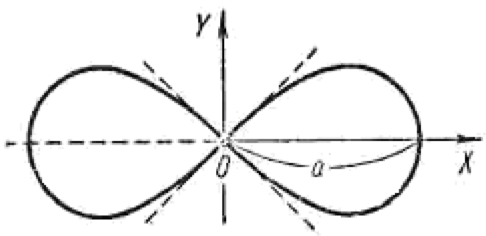
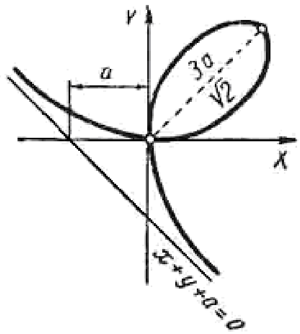
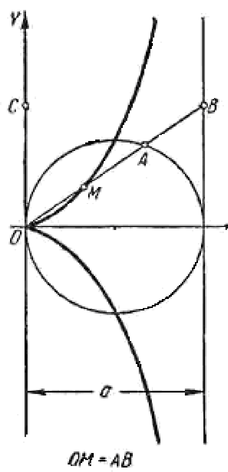
Отже, $\dfrac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{x}+\dfrac{\frac{1}{3}}{x+3}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-2}.$

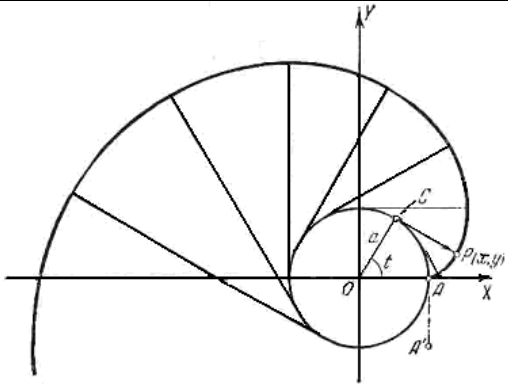
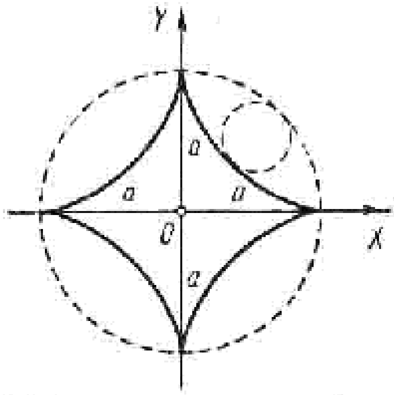
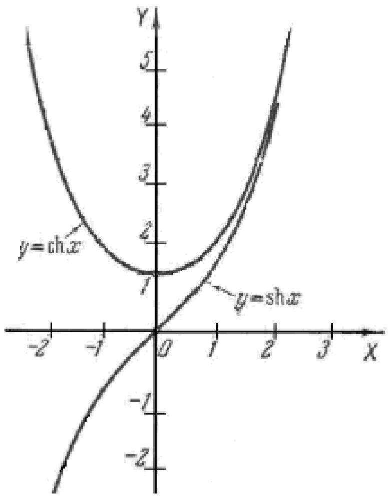
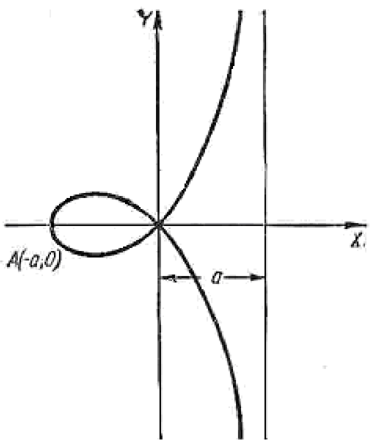
Д о д а т о к 2

Деякі важливі криві

Еліпс		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ або $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$
Гіпербола		$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ або $\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$
Парабола		$y^2=2px$
Локон Аньєзі		$y=\dfrac{1}{1+x^2}$
Півкубічна парабола		$y^2=x^3$ або $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$

Парабола Нейля		$y = x^{\frac{2}{3}}$ або $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$
Циклоїда		$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$
Спіраль Архімеда		$r = a j \quad (r \geq 0)$
Гіперболічна спіраль		$r = \dfrac{a}{j} \quad (r > 0)$
Логарифмічна спіраль		$r = e^{a j}$

Трипелюсткова троянда		$r = a\sin 3\varphi \quad (r \geq 0)$
Кардіоїда		$r = a(1+\cos\varphi)$
Лемніската Бернуллі		$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ або $r^2 = a^2\cos 2\varphi$
Лист Декарта		$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$
Цісоїда Діоклеса		$y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$ або $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$

<table>
<tr>
<td>Евольвента кола</td>
<td>
</td>
<td>$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Гіпоциклоїда (астроїда)</td>
<td>
</td>
<td>$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$ або $$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Графіки гіперболічних функцій</td>
<td>
</td>
<td>$y = sh\,x$
$y = ch\,x$</td>
</tr>
<tr>
<td>Строфоїда</td>
<td>
</td>
<td>$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$$</td>
</tr>
</table>

Д о д а т о к 3

Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай потрібно знайти визначений інтеграл $I=\int_a^b f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$. Якщо знайдена первісна $F(x)$ підінтегральної функції $f(x)$, то інтеграл може бути обчислений за формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Якщо ж первісну знайти неможливо, або $f(x)$ задана графічним чи табличним способом, то для обчислення інтеграла застосовують наближені формули, точність яких може бути як завгодно високою.

Задача наближеного обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ рівносильна до задачі наближеного обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, відрізком $[a;\ b]$ осі OX та вертикальними прямими $x=a$, $x=b$. Детальною оцінкою точності наближених формул займаються інші розділи математики, тут це питання не розкриваємо.

Розглянемо три способи наближеного обчислення $\int_a^b f(x)dx$.

1. Формула прямокутників

Відрізок $[a,b]$ розбивають на n частин рівної довжини $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. На кожному з частинних відрізків функцію $f(x)$ замінюють сталими величинами $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$, які є значеннями функції $f(x)$ на кінцях цих відрізків. Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнює площі східчастої фігури, що складається з прямокутників однакової ширини (рис. 1).

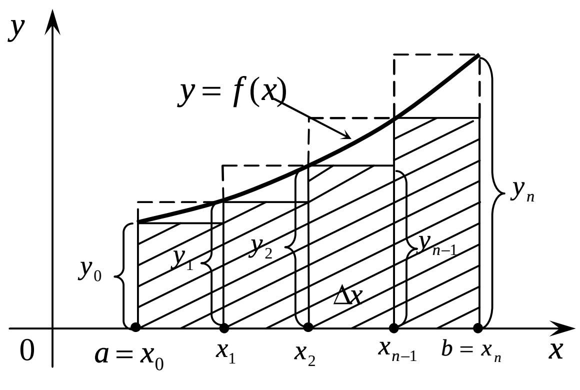


Рисунок 1

Тоді:

– якщо значення $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ обчислені на лівих кінцях частинних відрізків, тобто $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, ..., $y_{n-1}=f(x_{n-1})$ (фігура заштрихована на рисунку), то:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})}; \qquad (1)$$

– якщо значення $y_1,\ y_2, ..., y_n$ обчислені на правих кінцях частинних відрізків, тобто $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ ..., y_n = f(x_n)$ (фігура показана на рисунку пунктиром), то:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n).} \qquad (2)$$

Для підвищення точності результату необхідно збільшити число n елементів розбиття відрізка $[a,b]$.

2. Формула трапецій

Формула трапецій аналогічна до формул прямокутників, але $f(x)$ замінюють на кожному з відрізків довжиною Δx лінійною функцією, а площу – сумою площ трапецій (рис. 2):

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right).} \qquad (3)$$

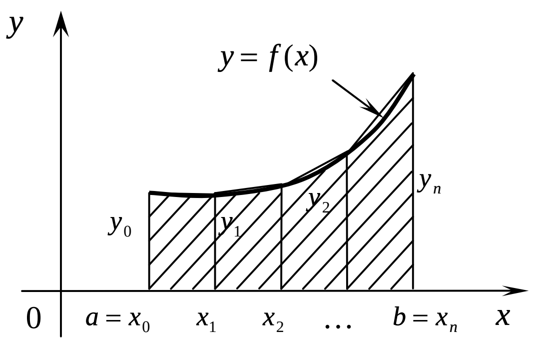


Рисунок 2

Формула трапецій при однаковому об’ємі роботи дає результат, точніший від отриманого за формулами прямокутників.

3. Формула парабол (Сімпсона)

Формула парабол передбачає заміну графіка функції $f(x)$ на частинних відрізках довжиною Δx дугами парабол (рис. 3).

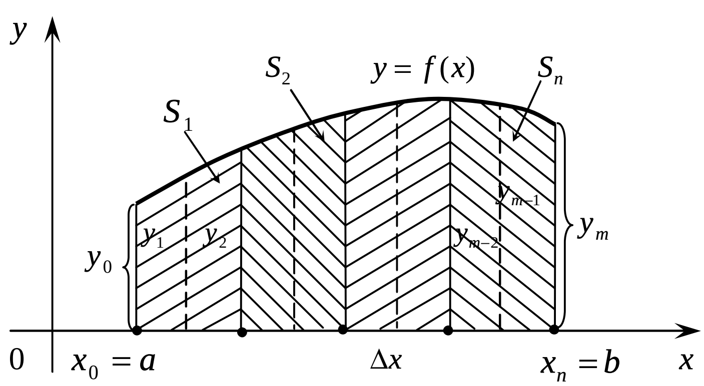


Рисунок 3

Для цього розбивають відрізок $[a,b]$ на парне число $2n$ відрізків однакової довжини $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$ і через кожні 3 точки $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}), M_i(x_i, y_i), M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ проводять дугу параболи. Тоді наближене значення визначеного інтеграла знаходять так:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1})\right]}. \quad (4)$$

Заданої точності можна досягнути значно меншою кількістю операцій порівняно з формулами прямокутників чи трапецій.

П р и к л а д. Обчислити інтеграл $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

Розіб’ємо відрізок $[0; 1]$ на 10 рівних частин. Тоді $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$.

Складемо таблицю значень підінтегральної функції (табл. 1).

Таблиця 1

x	$y = e^{x^2}$
0	1
0,1	1,01005
0,2	1,040811
0,3	1,094174
0,4	1,173511
0,5	1,284025
0,6	1,433329
0,7	1,632316
0,8	1,896481
0,9	2,247908
1	2,718282

За першою формулою прямокутників отримуємо

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0{,}1 \cdot \left(y_0 + y_1 + ... + y_9\right) = 1{,}381261.$$

За другою формулою прямокутників отримуємо

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0{,}1 \cdot \left(y_1 + y_2 + ... + y_{10}\right) = 1{,}553089.$$

За формулою трапецій

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_9\right) = 1{,}467175.$$

За формулою Сімпсона

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{0{,}1}{3}\left[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right] = 1{,}462681.$$

З а у в а ж е н н я. Результат, отриманий із використанням формули трапецій, є середнім арифметичним результатів першої та другої формул прямокутників.

Література

1. Барковський В.В. Вища математика для економістів / В. Барковський, Н.Барковська – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский / М.: Наука, 1988. — 432 с..
3. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. — 3-те вид., випр. — К.: Техніка, 2007. — 600 с.: іл. — ISBN 966-575-050-X (повне зібрання), ISBN 966-575-055-0 (ч. 1).
4. Евдокимов М.А. Интегральное исчисление и его приложения: Учебник / М.А. Евдокимов, Л.В. Лиманова – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2008. – 208 с.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г. С. Бараненков [и др.]; ред. Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1978.
6. Игнатьева А.В. Курс высшей математики / А.В. Игнатьева [и др.]; – М.: Высшая школа, 1968 – 685 с.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике – Изд. 5-е. - Харьков: "Вища школа", 1972. - 368 с.
8. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах – М.: Наука, 1973. – 400 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов – М.: Наука, 1985.—560 с..
10. Справочник по высшей математике. Выгодский М.Я. - М.: АСТ: Астрель, 2006. — 991с.
11. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч. І – К.: Вища школа, 1978. - 384 с.

ЗМІСТ

Розділ 4 Невласні інтеграли

ЧАСТИНА III. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Розділ 5 Застосування визначеного інтеграла до деяких задач геометричного, фізичного та економічного змісту