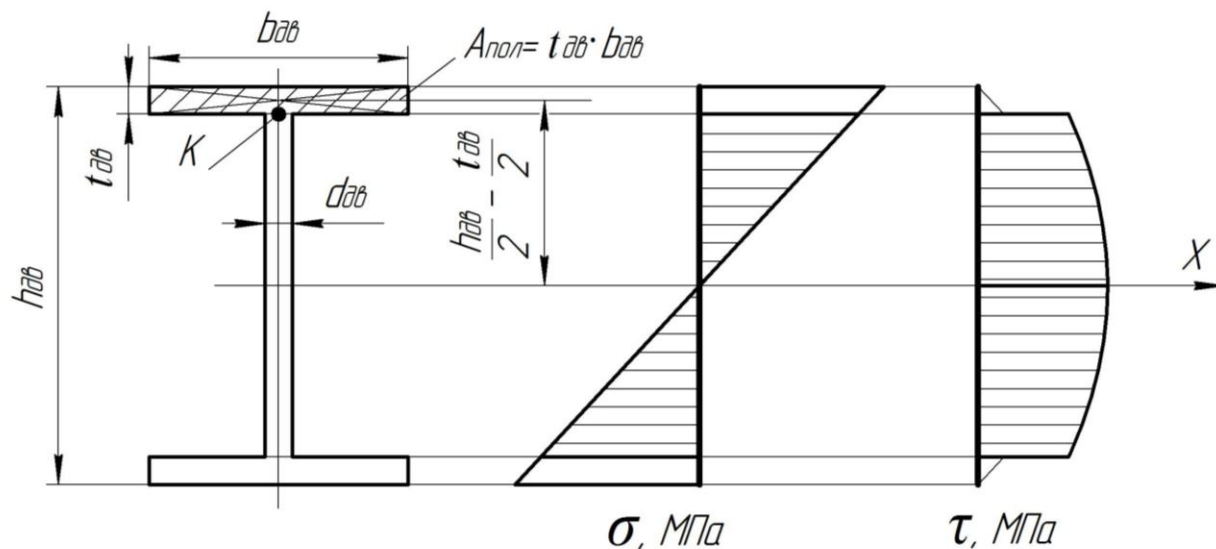


Анатолій Довбуш, Надія Хомик, Тарас Довбуш, Наталія Рубінець

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчально-методичний посібник до курсової роботи
для студентів напрямів підготовки:
«Інженерна механіка», «Машинобудування»,
«Зварювання», «Автомобільний транспорт»
денної та заочної форм навчання

(за скороченим терміном навчання)



Тернопіль
2015

Міністерство освіти і науки України

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

*Кафедра технічної механіки,
сільськогосподарських машин
і транспортних технологій*

ОПР МАТЕРІАЛІВ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

до курсової роботи

для студентів напрямів підготовки:
«Інженерна механіка», «Машинобудування»,
«Зварювання», «Автомобільний транспорт»
денної та заочної форм навчання

(за скороченим терміном навчання)

Тернопіль
2015

УДК 620.10
ББК 34
Д 58

Автори:

А.Д. Довбуш, старший викладач кафедри технічної механіки,
сільськогосподарських машин і транспортних технологій
Н.І. Хомик, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної
механіки, сільськогосподарських машин і транспортних технологій
Т.А. Довбуш, асистент кафедри технічної механіки,
сільськогосподарських машин і транспортних технологій
Н.А. Рубінець, аспірант кафедри технічної механіки,
сільськогосподарських машин і транспортних технологій

Рецензент

М.І. Підгурський, д.т.н., професор, зав. кафедри зварювання
*Розглянуто й затверджено на засіданні кафедри технічної механіки,
сільськогосподарських машин і транспортних технологій,
протокол № 1 від 26.08.2015р.*

*Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії
факультету машинобудування та харчових технологій,
протокол № 1 від 31.08.2015р.*

Довбуш А.Д.

Д 58 Опір матеріалів: навчально-методичний посібник до виконання курсової роботи для студентів за сороченим терміном навчання: / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик, Т.А. Довбуш, Н.А. Рубінець. – Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2015. – 128с.

Пропонований навчально-методичний посібник розроблено відповідно до навчальної програми і призначений для виконання курсової роботи з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів напрямів підготовки: «Інженерна механіка», «Машинобудування», «Зварювання», «Автомобільний транспорт» денної та заочної форм навчання за скороченим терміном навчання. Рекомендований і для студентів інших напрямів підготовки.

Посібник рекомендовано також для самостійної роботи студентів, оскільки він вміщує короткі теоретичні викладки основного матеріалу дисципліни «Опір матеріалів», умови завдань, приклади їх розв'язування, необхідні довідкові дані.

УДК 620.10
ББК 34

© Довбуш А. Д., Хомик Н. І.,
Довбуш Т. А., Рубінець Н.А., 2015

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Вказівки до вибору завдання.....	5
Об'єм, структура і вказівки до виконання курсової роботи.....	5
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.....	7
2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ.....	13
Задача №1 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу і стиску.....	19
Приклад розв'язування задачі №1 Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу (стиску).....	22
Задача №2 Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи.....	25
Приклад розв'язування задачі №2 Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи.....	28
3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ	31
4. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ.....	35
Задача №3 Розрахунок вала на кручення.....	39
Приклад розв'язування задачі №3 Розрахунок вала на міцність і жорсткість.....	42
5. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН.....	46
Задача №4 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах,розрахунок на міцність.....	57
Приклад розв'язування задачі №4 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах, розрахунок на міцність.....	60
6. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ.....	65
Задача №5 Розрахунок статично невизначуваної рами.....	71
Приклад розв'язування задачі №7 методом сил.....	74
7. СУМІСНА ДІЯ ЗГИНУ З КРУЧЕННЯМ.....	79
Задача №6 Розрахунок вала на згин з крученням.....	81
Приклад розв'язування задачі №6 Розрахунок вала на згин з крученням.....	84
8. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ.....	88
Задача №7 Розрахунок на стійкість стисненого стержня.....	94
Приклад розв'язування задачі №7 Розрахунок на стійкість стисненого стержня.....	96
9. ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ.....	99
Задача №8 Визначення максимальних динамічних напружень і переміщень при ударі.....	103
Приклад розв'язування задачі №8.1.....	106
Приклад розв'язування задачі №8.2.....	109
Перелік використаної та рекомендованої літератури	112
Додатки.....	113

ВСТУП

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів споруд і машин.

Елементи машинобудівних і будівельних конструкцій при експлуатації зазнають силової дії різних походжень. Ці сили або прикладені безпосередньо до елемента, або передаються через з'єднані з ним сусідні елементи. Для нормальної роботи інженерної споруди або машини кожен елемент повинен бути таких розмірів і форми, щоб витримував діючі на нього навантаження, не руйнуючись (міцність), не давав зміни розмірів (жорсткість), зберігав початкову форму (стійкість).

Опір матеріалів – теоретико-експериментальна наука. Дослід – теорія – дослід – така діалектика розвитку науки про опір твердих тіл деформуванню і руйнуванню. Однак, наука опору матеріалів не вичерпує всіх питань механіки деформівних тіл. Цим займаються інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, теорія пружності та теорія пластичності.

Опір матеріалів є загальноінженерною наукою, в якій на основі експериментальних даних про властивості матеріалів, з одного боку, та правил теоретичної механіки, фізики і вищої математики, – з другого, викладаються загальні методи розрахунку раціональних розмірів і форм елементів інженерних конструкцій з урахуванням величини і характеру діючих на них навантажень.

Задачі опору матеріалів розв'язуються доволі простими математичними методами з прийняттям ряду припущень і гіпотез, а також з використанням експериментальних даних.

Опір матеріалів має самостійне значення, як дисципліна, знання якої необхідне для всіх інженерних спеціальностей, є базою для вивчення всіх розділів будівельної механіки, основою для вивчення курсу деталей машин та ін. Опір матеріалів дає наукові основи інженерних розрахунків, без яких на сучасному етапі неможливе проектування і створення всієї різноманітності конструкцій сучасного машинобудування і будівництва.

Особливість даного навчально-методичного посібника в тому, що він призначений для виконання курсової роботи з опору матеріалів, яка включає 8 задач, що охоплюють весь курс. У посібнику стисло викладено основний матеріал до теми кожної задачі, наведено умови задач і приклади розв'язку.

У додатках наведено приклад оформлення курсової роботи (титульна сторінка, зміст, приклад розв'язання задачі) й довідкові матеріали, необхідні для її виконання. Все це сприятиме поглибленню вивчення курсу та самостійному виконанню курсової роботи.

Вказівки до вибору завдання

Завдання на курсову роботу студент вибирає за двома останніми цифрами номера залікової книжки; номер розрахункової схеми – за останньою цифрою; варіант (дані з таблиці умови задачі) – за передостанньою цифрою.

Об'єм, структура і вказівки до виконання курсової роботи

Курсова робота з опору матеріалів для студентів, що навчаються за скороченим терміном навчання, містить 8 задач (кількість задач може змінюватися за вказівкою викладача), які охоплюють увесь курс. Виконання її оформляти у вигляді розрахунково-пояснювальної записки на аркушах формату А4.

Титульну сторінку виконувати креслярським шрифтом або машинописним (комп'ютерним) способом на відповідному бланку.

Перша сторінка курсової роботи – титульна (*додаток 1*), друга – зміст, який включає перелік виконаних завдань (аркуш з кутовим штампом 40мм, *додаток 2*); далі – умови задач (аркуш з кутовим штампом 40мм, *додаток 3*), розв'язки задач (аркуші з кутовим штампом 15мм, *додатки 4, 5*) і список використаних літературних джерел (аркуш із кутовим штампом 40мм).

Умову кожної задачі з вибраними даними і схемою записувати на окремому аркуші з рамкою 40мм (*додаток 3*). Розв'язок задачі оформляти після написання умови на аркушах з рамкою 15мм (*додаток 4*).

Текст записки викладати послідовно, лаконічно, розрахунки супроводжувати короткими поясненнями з посиланням на відповідний рисунок (*додатки 5*). Стыль викладу тексту записки повинен бути коротким, чітким і без двоякого змісту. Прийнята у тексті термінологія повинна відповідати встановленій у стандартах або загальноприйнятій у науково-технічній літературі.

Текст розрахунково-пояснювальної записки розміщувати з одного боку аркуша формату А4 (297x210мм). Відстань від рамки до границь тексту зліва і справа повинна бути не менше 5мм, зверху і знизу – 10мм (*додатки 2...5*). Абзаци у тексті починати відступом, що дорівнює п'яти символам основного тексту записки. Текст виконувати комп'ютерним (машинописним) способом через 1,5 інтервала чітким шрифтом висотою не менше 2,5мм (14pt, шрифт Times New Roman) або рукописним – чорним чорнилом основним креслярським шрифтом висотою букв і цифр не менше 2,5мм. Допускається пояснювальну записку виконувати чітким розбірливим рукописним текстом чорним чорнилом.

Усі сторінки записки, крім титульної, повинні мати рамки з кутовим штампом для розділів записки. У кутових штампах для змісту й умов задач (рис. 1а) записувати назву задачі, наприклад, «Аналіз напруженого стану» і позначення записки КР ОМ (курсова робота з опору матеріалів), до якого входить номер залікової книжки студента, наприклад, КР ОМ 15-109.00.00.000 ПЗ, де 15-109 – це номер залікової книжки студента, який є варіантом для виконання курсової роботи. У кутових штампах (рис. 1б) для решти сторінок записувати тільки позначення записки і нумерацію аркушів. Номер сторінки проставляти у відповідній графі штампа (рис. 1). Відлік починати з титульної сторінки, але номер її на титульній не ставити. Нумерація сторінок – наскрізна.

Формули у тексті записувати з нової стрічки у загальному вигляді, а під формулою наводити пояснення кожного символу із зазначенням величини й розмірності. Обчислення формул проводити у такій послідовності: записування шуканої величини в буквенному виразі, підстановка відповідних цифрових значень і записування кінцевого результату з проставлянням розмірностей.

Усі схеми та ескізи при виконанні курсової роботи оформляти на окремій сторінці чи двох, за необхідності, з дотриманням послідовності, передбаченої ходом розв'язування. Рисунки нумерувати відповідно до номера задачі й супроводжувати підписами (додатки 3, 5).

					КР ОМ 15-109.00.00.000 ПЗ			
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата	Аналіз напруженого стану	Літ.	Арк.	Аркушів
Розроб.	Олійник В.І							
Перевір.	Довбуш А.Д						2	8
Консульт.						ФХМ, ХВс-31		
Н. контр.								
Затв.	Рибак Т.І.							

а)

					КР ОМ 15-109.00.00.000 ПЗ		Арк.
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата			5

б)

Рисунок 1. Приклад заповнення штампів на сторінках записки:

а) штамп для розділу (умови задачі);

б) штамп для наступних сторінок тексту

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Задачі опору матеріалів

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Конструкції – усі матеріальні об'єкти техніки, їх частини й деталі.

Міцність – здатність матеріалу чи конструкції витримувати механічне навантаження не руйнуючись

$$p_{\max} \leq [p],$$

де p_{\max} – максимальне напруження;

$[p]$ – допустиме напруження.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протидіяти пружним деформаціям, тобто здатність сприймати зовнішнє навантаження і деформуватися в допустимих межах.

$$f_{\max} \leq [f],$$

де f_{\max} – максимальна деформація (переміщення);

$[f]$ – допустима деформація (переміщення).

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати під дією заданих сил початкову форму пружної рівноваги.

Мета курсу опір матеріалів:

а) навчитися за розрахунковою схемою вірно визначати вид деформації, на який працює деталь чи конструкція;

б) визначити найнебезпечніший перетин, попередньо побудувавши епюри внутрішніх силових факторів;

в) за відповідною умовою міцності чи жорсткості визначити розміри поперечного перетину, а в деяких задачах допустиме навантаження чи максимальні напруження, і провести перевірку міцності.

Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів

Усі елементи машинобудівних і будівельних конструкцій можна звести до таких типових спрощених елементів: бруси, оболонки, пластини, масивні тіла. Відповідно до них виконують розрахунки в опорі матеріалів.

Стержень (брус) – тіло призматичної форми, в якого один розмір (довжина) набагато перевищує два інших (поперечних) розміри.

Тонкостінні стержні (швелери, кутники, двотаври) – тіла, в яких товщина стінки значно менша за габаритні розміри поперечного перетину.

Приклади стержнів: вали, осі, балки, труби, рейки, елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки, елементи ланцюгів).

Пластина – призматичне (циліндричне) тіло, в якого один розмір (товщина) набагато менший за два інших.

Приклади пластин: плоскі днища й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриттів.

Оболонка – тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами. Це – пластина з викривленою серединною поверхнею. Приклади: стінки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів.

Масив (масивне тіло) – тіло, розміри якого в усіх (трьох) напрямках одного порядку. Приклади: фундаменти споруд, підпірні стінки, основи потужних пресів і верстатів.

Класифікація зовнішніх навантажень

Зовнішні навантаження класифікують:

1. За характером дії – статичні, динамічні.

Статичні – це навантаження, значення, напрямок і місце прикладання яких залишаються постійними.

Динамічні – це навантаження, які характеризуються швидкими змінами їх значення в часі, напрямку чи місця прикладання.

2. За характером прикладання (рис. 1.1):

а) F, Q, R – зосереджені сили [$H, кН, МН$];

б) M, T – зосереджені моменти [$Нм, кНм, МНм$];

в) q – розподілені на лінії [$H/м, кН/м$].

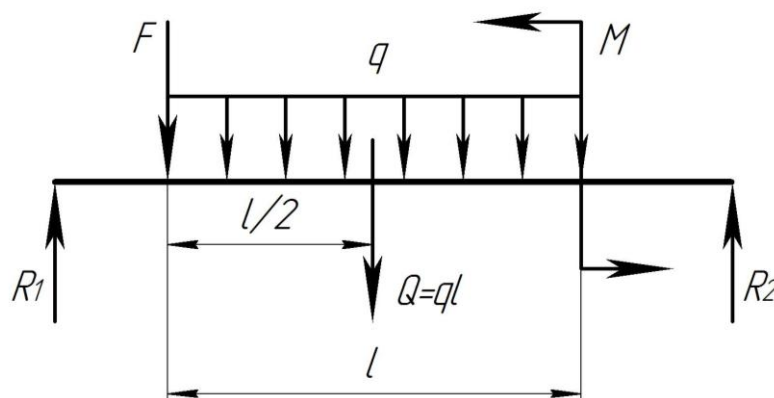


Рисунок 1.1

Розрахункова схема – це реальний об’єкт, звільнений від несуттєвих особливостей. Для одного і того ж об’єкта може бути створена не одна розрахункова схема, що залежить від особливостей навантаження і умов роботи.

Основні види деформацій

Усі існуючі тіла під впливом зовнішніх сил здатні змінювати свої розміри і форму, тобто деформуватися.

В опорі матеріалів розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення і згину. При різних видах деформації у поперечних перетинах тіла виникають різні внутрішні силові фактори.

1. **Розтяг-стиск** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах прямого бруса виникає тільки *поздовжня (осьова) сила N* .

Брус, що працює на розтяг (стиск), називають стержнем.

Розтягу зазнають такі елементи конструкцій, як канати, болти, троси, стержні ферм, штоки поршневих машин. На стиск працюють цегляна кладка будинків, фундамент, колони, пуансони штампів.

2. **Зсув (зріз)** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *поперечна (перерізуюча) сила Q* . Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

Зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань.

3. **Кручення** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *крутний момент $M_{кр}$* . Брус круглого поперечного перетину, який передає потужність під час обертального руху, називають валом. Кручення часто супроводжується згином або іншим видом деформації.

4. **Прямий поперечний згин** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникає *згинальний момент $M_{зг}$* та поперечна сила Q . Брус, який працює на згин, називають балкою.

Згину зазнають осі, балки міжповерхових перекриттів і мостів, зуби зубчастих коліс, листові ресори.

5. **Складний опір** – це поєднання двох або більше простих видів деформацій, а саме: *згин + кручення; стиск + згин* і т.д.

Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Ейлора

Внутрішні силові фактори – це внутрішні сили взаємодії між частинками тіла, які виникають при дії на тіло зовнішніх сил, і перешкоджають зміні відстаней між частинками й руйнуванню тіла. Їх називають *зусиллями*. Зовнішні силові дії, прикладені до елемента конструкції, і реакції в місцях кріплення опор, тобто активні й реактивні сили називають *навантаженнями*.

Для встановлення величини внутрішніх зусиль (силових факторів), що виникають у перетині стержнів, застосовують метод перетинів.

Перетин, перпендикулярний до осі бруса, називають *нормальним* або *поперечним*; перетин, проведений під будь-яким іншим кутом, називають *косим* або *похилим*.

Метод перетинів полягає в тому, що пружне тіло (брус), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил, уявно розрізають площиною на 2-і частини (рис. 1.2а). Будь-яку з них відкидають. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, що перебуває в рівновазі, приклавши до неї внутрішні сили взаємодії (зусилля), що виникають між обома частинами тіла під впливом зовнішніх сил (рис. 1.2б). Внутрішні сили замінюють вплив відкинutoї частини бруса на залишену. Принципово не важливо, яку із частин тіла відкинути.

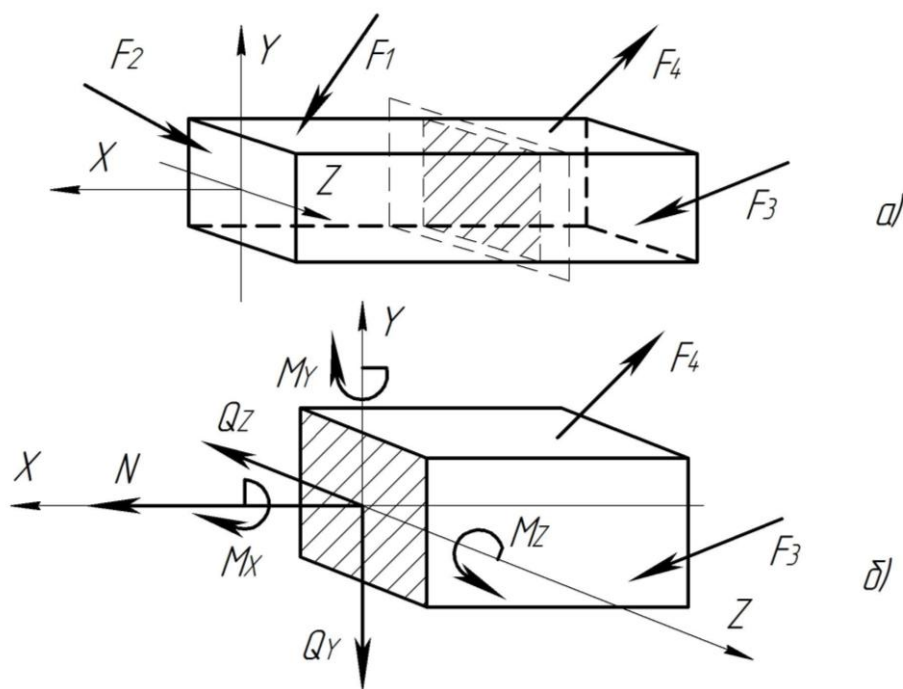


Рисунок 1.2

У загальному випадку навантаження бруса у його поперечному перетині виникає шість внутрішніх силових факторів:

N_X – поздовжня (нормальна) сила, діє вздовж осі бруса, перпендикулярна до площини перетину;

Q_Y , Q_Z – поперечні сили, дотичні до площини перетину, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої у напрямках осей OY , OZ ;

M_Y , M_Z – моменти, що повертають перетин навколо осей OY , OZ , намагаються зігнути стержень у площинах XZ та XY , тобто згинальні моменти, $M_Y = M_{зг.Y}$; $M_Z = M_{зг.Z}$;

M_X – момент, що діє у площині перетину і спричиняє поворот перетину відносно поздовжньої осі бруса OX , тобто скручує брус, називають його крутним моментом, $M_X = M_{кр}$.

Кожен із внутрішніх силових факторів пов'язаний з певним видом деформації.

Для визначення внутрішніх силових факторів у загальному вигляді, відповідно до методу перетинів, записують шість умов рівноваги сил, що діють на залишену частину бруса (використовують шість рівнянь статки). Прирівнюють до нуля алгебраїчні суми проекцій усіх сил, прикладених до цієї частини на осі OX , OY , OZ , і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно тих самих осей:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & & N_X + \sum F_{iX} = 0; \\ \sum Y = 0; & & Q_Y + \sum F_{iY} = 0; \\ \sum Z = 0; & & Q_Z + \sum F_{iZ} = 0; \\ \sum M_X = 0; & & M_{KP} + \sum M_X(F_i) = 0; \\ \sum M_Y = 0; & & M_{3\Gamma.Y} + \sum M_Y(F_i) = 0; \\ \sum M_Z = 0; & & M_{3\Gamma.Z} + \sum M_Z(F_i) = 0. \end{aligned}$$

Епюра – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень уздовж осі стержня (бруса). **Епюри штрихують лініями, перпендикулярними до осі бруса.**

Напруження

Це – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил. Повне напруження (рис. 1.3) визначають за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR – внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;

ΔA – елементарна площа перетину, на якій виникає зусилля ΔR .

Внутрішню силу ΔR можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перетину ΔN ; друга лежить у площині перетину ΔQ . Напруження, що виникають у перетині від цих складових, називають **нормальним** і **дотичним**.

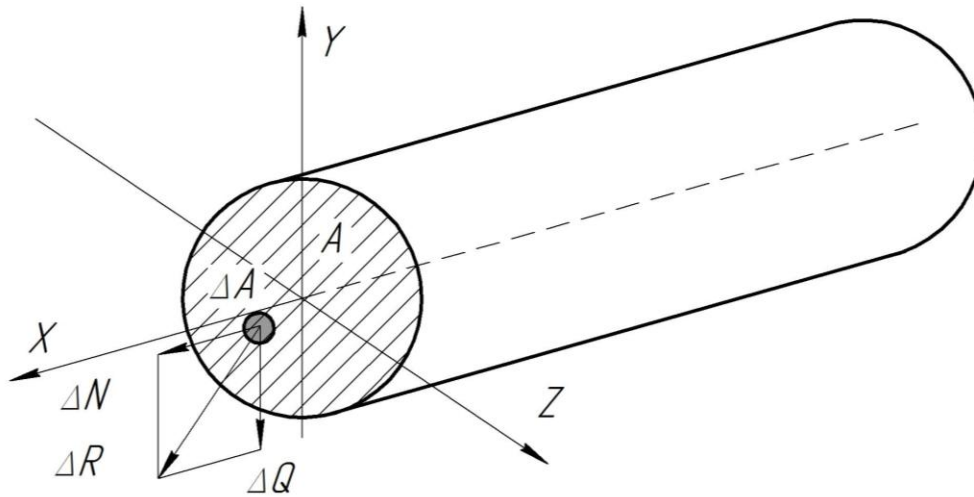


Рисунок 1.3

Дотичне напруження – це інтенсивність дотичних сил у даній точці перетину

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

Нормальне напруження – це інтенсивність нормальних сил у даній точці перетину

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

Повне напруження у точці визначають за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень $1 \text{ Па} = \text{Н} / \text{м}^2$, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н} / \text{мм}^2$.

Припущення (гіпотези) про властивості матеріалів конструктивних елементів

1. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Припускають, що матеріал суцільно заповнює об'єм тіла, спростовуючи теорію дискретної будови речовин.

2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Вважають, що у будь-якій точці тіла та у будь-якому напрямі механічні властивості матеріалу однакові.

3. Гіпотеза про ідеальну пружність та природну ненапруженість матеріалу. Припускають, що деформації, спричинені дією навантажень, після розвантаження повністю зникають, а початкові зусилля та напруження відсутні.

2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Центральний розтяг і стиск. Побудова епюр нормальних сил

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених уздовж центральної осі бруса. Напружений стан, викликаний такими силами, називають простим або лінійним.

Розтяг (стиск) – це такий вид деформації (вид опору), при якому в поперечних перетинах бруса виникає тільки **поздовжня (осьова, нормальна) сила** – N або N_x , спрямована вздовж осі бруса і прикладена в центрі ваги перетину. Визначають її з умови рівноваги, використовуючи **метод перетинів**, починаючи з вільного кінця стержня.

Поздовжня сила у довільному поперечному перетині бруса дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на його поздовжню вісь Ox усіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

При розтягу поздовжня сила направлена від перетину і вважається **додатною**, при стиску вона спрямована до перетину і вважається **від'ємною**.

Для оцінювання навантаженості бруса, у випадку, коли поздовжні сили у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, будують епюри. При побудові епюр брус розділяють на ділянки. Епюру будують для того, щоб використати її при розрахунку на міцність. Вона дає можливість визначити найбільше значення поздовжньої сили і перетин, у якому вона виникає, тобто небезпечний (щодо міцності) перетин.

Приклад. Побудувати епюру нормальних сил для бруса зображеного на рис. 2.1а (власною вагою бруса знехтувати).

Розбиваємо брус на ділянки. Границі ділянок: початок та закріплення бруса; перетини, в яких прикладені зосередженні сили.

Використовуючи метод перетинів, визначаємо значення нормальних сил на кожній ділянці, починаючи з вільного кінця.

Нормальна сила – це алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил з одного боку перетину. Запишемо їх значення (рис. 2.1б) на кожній з ділянок, розглядаючи стержень з вільного кінця:

$$N_1 = F_1 = 20 \text{кН};$$

$$N_2 = F_1 - F_2 = 20 - 50 = -30 \text{кН};$$

$$N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = -30 + 40 = 10 \text{кН}.$$

За отриманими результатами будують епюру нормальних сил N (рис. 2.1в).

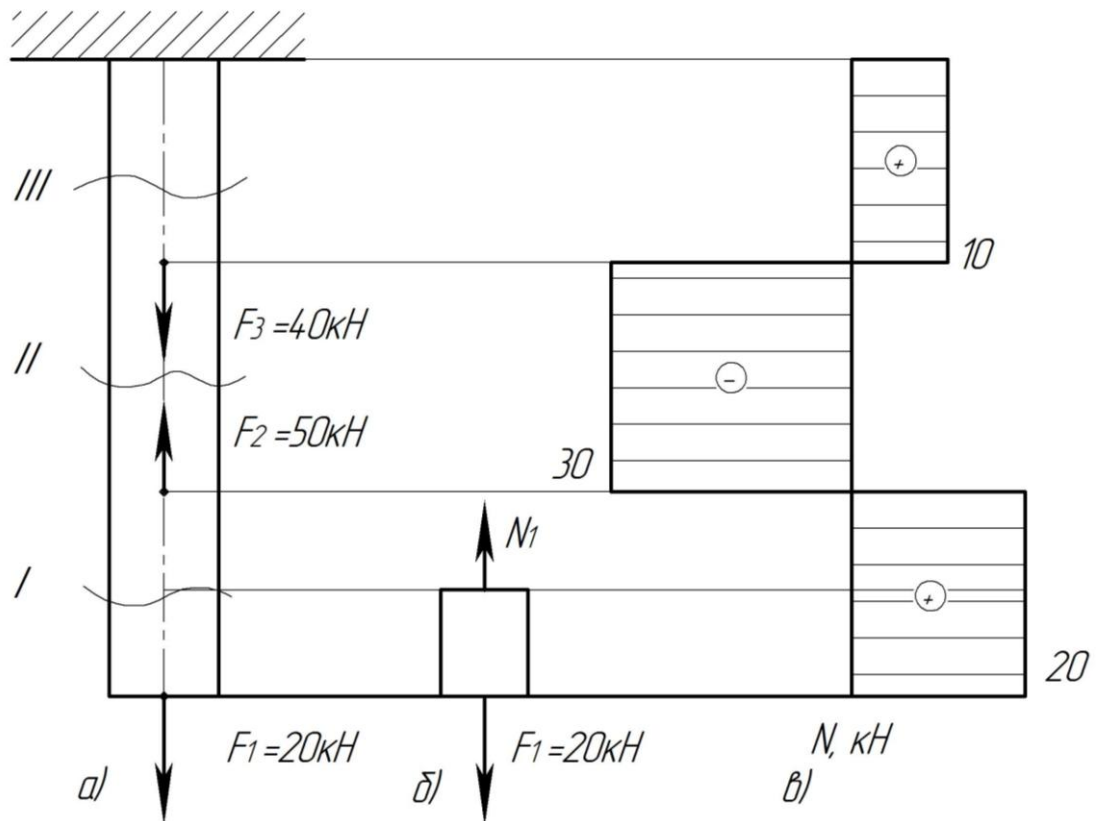


Рисунок 2.1

Напруження у поперечних перетинах стержня

При розтягу (стиску) бруса у його поперечних перетинах виникають тільки **нормальні напруження**.

При розтягу (стиску) бруса нормальні напруження на його поперечному перетині **розподілені рівномірно**.

Між поздовжньою (нормальною) силою N і нормальним напруженням σ (рис. 2.2) існує залежність

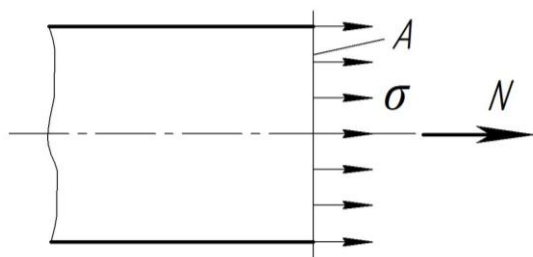


Рисунок 2.2

$$N = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Вважаємо, що $\sigma = const$, тоді

$$N = \sigma \cdot A,$$

Звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Нормальні напруження додатні, якщо розтягують матеріал стержня, від'ємні, – якщо стискають.

Якщо нормальні напруження у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, доцільно показувати закон їх зміни на довжині бруса у вигляді графіка – епюри нормальних напружень.

Дотичні напруження додатні, якщо вектор τ обходить елементи матеріалу за годинниковою стрілкою.

Поздовжні й поперечні деформації

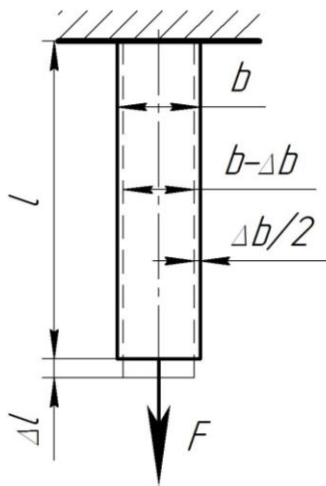
Розглянемо деформацію стержня, навантаженого осьовою силою F (рис. 2.3):

Δl – повне поздовжнє видовження стержня (абсолютна поздовжня деформація, лінійне видовження, лінійна деформація);

Δb – абсолютна поперечна деформація (лінійна деформація);

ε – відносна поздовжня деформація, $\varepsilon = \Delta l / l$;

ε' – відносна поперечна деформація, $\varepsilon' = \Delta b / b$.



До певної величини сили деформації пружного тіла пропорційні силі. При розтягу (стиску) існує лінійна залежність між видовженням стержня і поздовжньою силою.

Експериментально доведено, що напруження у матеріалі стержня залежать від деформації й механічних характеристик матеріалу. Описується ця залежність як **закон Гука при розтягу (стиску)**

Рисунок 2.3

$$\sigma = \varepsilon \cdot E; \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де E – модуль пружності (модуль пружності I-го роду, модуль Юнга, модуль нормальної пружності, модуль поздовжньої пружності).

Експериментально встановлено, що при простому розтягу або стиску відношення поперечної деформації до поздовжньої величина постійна для даного матеріалу. Це відношення, взяте за абсолютним значенням, називають коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона

$$\mu = |\varepsilon' / \varepsilon|.$$

E , μ – механічні характеристики матеріалу, визначають його пружні властивості. Для сталі $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,3$.

Закон Гука справедливий лише до певної величини нормального напруження, яке називають границею пропорційності даного матеріалу.

Діаграма розтягу пластичних матеріалів

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які визначають їх міцність, пластичність, а також пружні постійні E та μ , необхідні інженеру-конструктору для вибору матеріалу деталі та її розрахунку на міцність і жорсткість. Ці характеристики отримують експериментально. Для цього використовують лабораторне обладнання, на якому до взірця (рис. 2.4б) прикладають статичне навантаження на розтяг (стиск) і замірюють сили й деформації. Щоб виключити вплив абсолютних розмірів досліджуваного взірця, будують так звану умовну діаграму розтягу в координатах: відносне видовження ε , нормальне напруження σ . Для маловуглецевої сталі діаграма розтягу (стиску) зображена на рис. 2.4а.

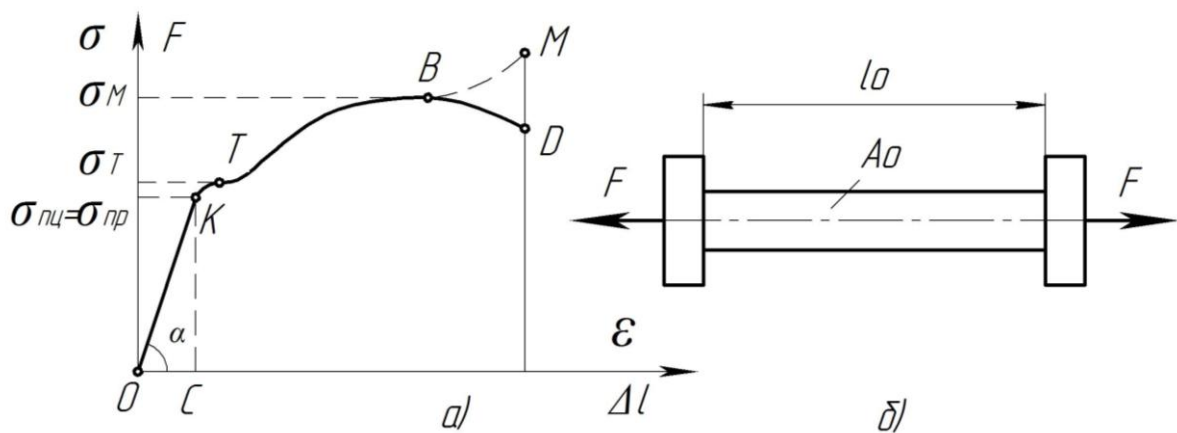


Рисунок 2.4

Позначення на діаграмі такі:

σ_{nu} – **границя пропорційності**, на даній ділянці деформація пропорційна навантаженню, найбільше напруження, при досягненні якого справедливий закон Гука, $\sigma_{nu} = F_{nu} / A_0$;

σ_{np} – **границя пружності**, до цього напруження матеріал зберігає пружні властивості (у взірці не виникає залишкових деформацій при знятті навантаження), $\sigma_{np} = F_{np} / A_0$;

σ_T – **границя текучості** – напруження, при якому відбувається ріст пластичних деформацій взірця при постійному навантаженні, це – основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів (сталей), $\sigma_T = F_T / A_0$;

σ_M – **границя міцності** – напруження, при якому відбувається руйнування матеріалу взірця, тобто умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке витримує взірець до руйнування, $\sigma_M = F_{max} / A_0$.

Тут A_0 – початкова площа поперечного перетину зразка, що піддається

розтягу; F_{nc} , F_{np} , F_T – зростання величини сили розтягу, F_{\max} – максимальна сила навантаження без врахування звуження перетину.

На ділянці ОК діаграми розтягу (див. рис. 2.4а) стверджується закон Гука $E = \sigma/\varepsilon$.

Потенціальна енергія деформацій

При статичному розтягу стержня (взірця) в межах застосування закону Гука сила F поступово збільшується від нуля до якогось значення, взірець деформується на величину Δl (див. рис. 2.3) і при цьому здійснює роботу W . Ця робота акумулюється у деформованому взірці у вигляді потенціальної енергії деформації, тобто $W=U$.

Якщо діаграма розтягу (див. рис. 2.4а) побудована в координатах (F , Δl), то робота рівна площі трикутника OSK :

$$W = U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l,$$

де $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$; $F = N$.

Тоді

$$W = U = \frac{F^2 \cdot l}{2F \cdot A} = \frac{\sigma^2 \cdot A \cdot l}{2E} = \frac{\sigma^2 \cdot V}{2E},$$

де F – сила, що розтягує взірець, $F = \sigma \cdot A$;

V – об'єм тіла, тобто взірця, $V = A \cdot l$;

A – площа поперечного перетину взірця.

Питома потенціальна енергія – це енергія деформації, яка припадає на одиницю об'єму

$$U = \frac{W}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Допустимі напруження. Розрахунок на міцність

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень: **робочі, граничні, допустимі**.

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – це ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні. Але якщо

робочі напруження дуже близькі до граничних (хоча й менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому **при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими.**

Допустимі напруження – це такі, при яких гарантована безпечна робота деталі. Позначають їх $[\sigma]$ чи $[\tau]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень, щоб гарантувати запас міцності:

а) для пластичних матеріалів (сталі)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг і стиск;

n – коефіцієнт запасу міцності;

б) для крихких матеріалів (чавуни)

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n}; \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n},$$

де $[\sigma]_P$ – допустиме напруження на розтяг;

σ_{MP} – границя міцності на розтяг;

$[\sigma]_C$ – допустиме напруження на стиск;

σ_{MC} – границя міцності на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів $n = 1,2 \dots 2,5$;
для крихких матеріалів $n = 2 \dots 5$.

Умова міцності при розтягу-стиску

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При розрахунках деталей на міцність основними є три види задач.

1. **Проектний розрахунок**, за яким визначають розміри поперечного перетину

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]},$$

де N_{\max} – максимальне значення поздовжньої сили, беруть з епюри N .

2. **Перевірний розрахунок**, за яким визначають робочі (фактичні) напруження і порівнюють з допустимим

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

3. **Визначення допустимих навантажень**

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A.$$

Задача №1

Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу й стиску

Для заданого прямолінійного ступінчастого сталюого стержня (рис. до задачі №1, табл. до задачі №1) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стержня; побудувати епюри робочих (фактичних) нормальних напружень і лінійних переміщень стержня, якщо $l = 8\text{м}$; $a = kl$; $b = ml$; матеріал стержня – сталь; $[\sigma] = 160\text{МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$.

План розв'язування задачі:

1. Виконати розрахункову схему.
2. Побудувати епюру поздовжніх сил.
3. Визначити, з умови міцності, діаметри стержня на всіх ділянках. Отримані величини заокруглити до розміру, кратного 2 або 5. Виконати ескіз стержня.
4. Обчислити на кожній ділянці робочі (фактичні) нормальні напруження за модулем σ_p і побудувати епюру робочих (фактичних) нормальних напружень.
5. Визначити лінійні переміщення окремих ступенів і всього стержня.
6. Побудувати епюру розподілу переміщень на довжині бруса.

Таблиця до задачі №1

№ з/п	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	k	m
1	25	30	50	0,2	0,5
2	10	40	20	0,4	0,7
3	20	10	60	0,1	0,4
4	15	20	40	0,3	0,6
5	30	25	10	0,25	0,65
6	25	50	25	0,35	0,75
7	40	15	30	0,45	0,8
8	20	30	50	0,15	0,45
9	50	20	40	0,2	0,8
0	60	10	20	0,4	0,8

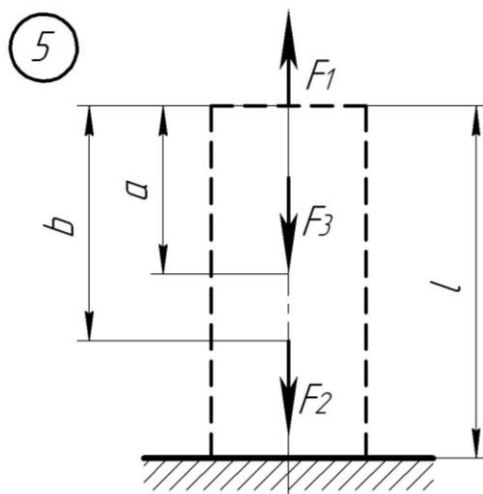
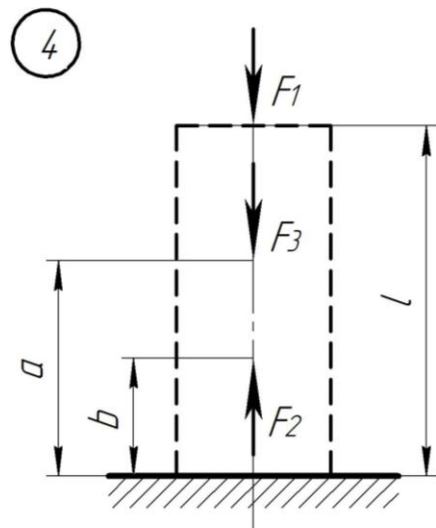
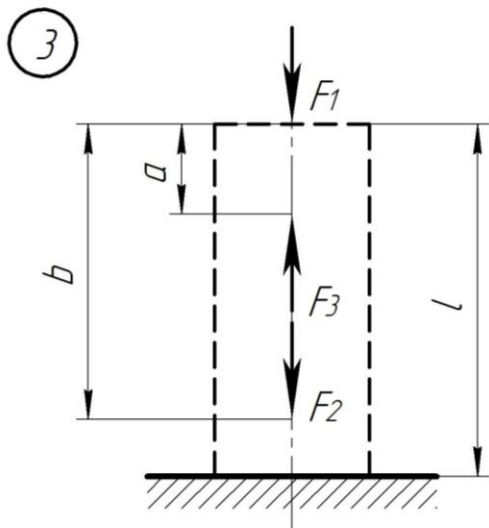
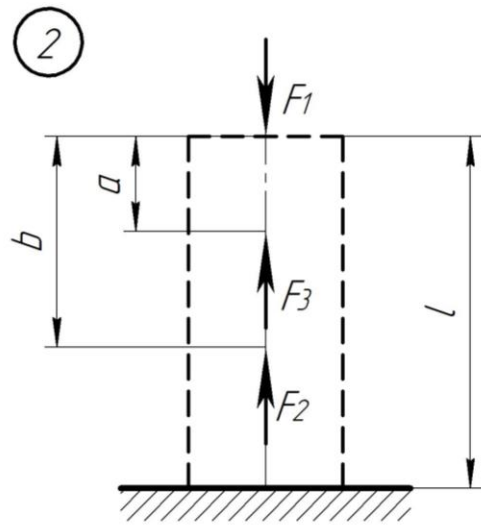
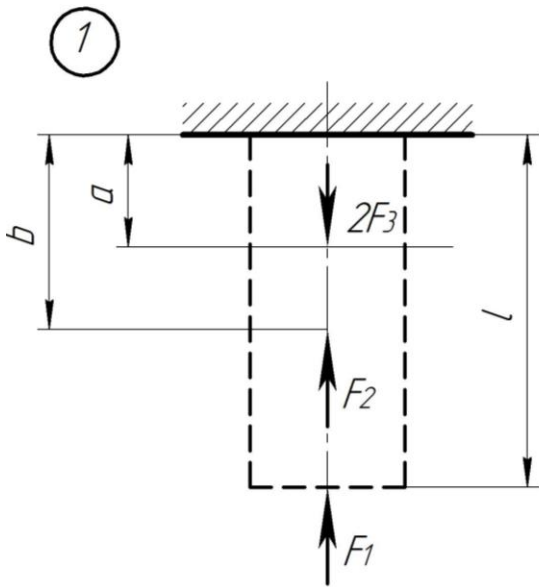
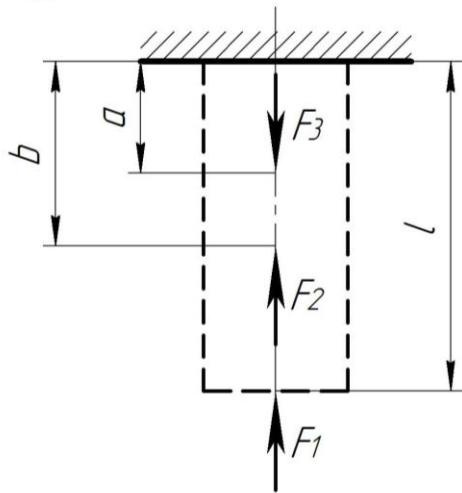
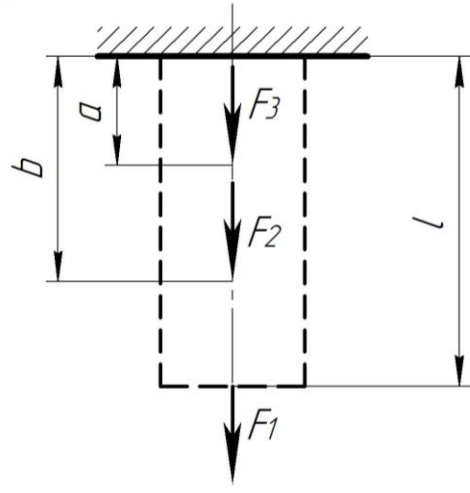


Рисунок до задачі №1

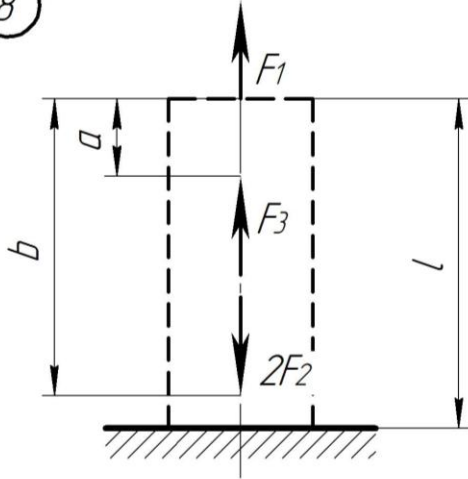
6



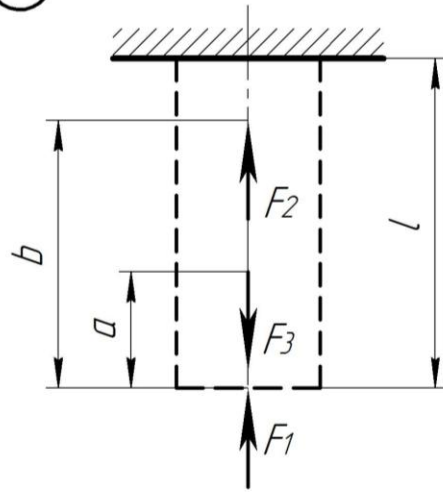
7



8



9



0

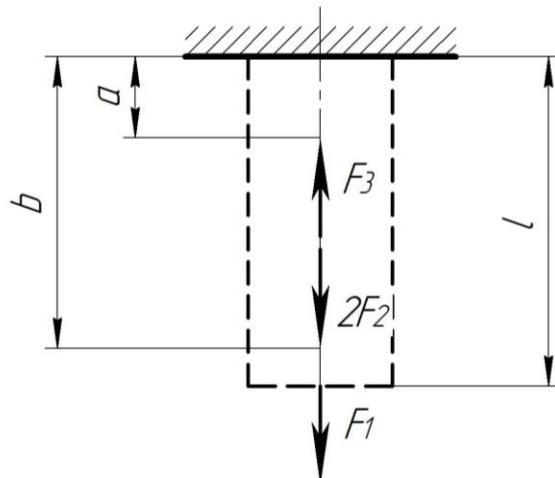


Рисунок до задачі №1 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №1
Розрахунок на міцність і визначення переміщень
при розтягу й стиску

Для заданого прямолінійного ступінчастого сталюого стержня (рис. 2.5а) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стержня; побудувати епюри робочих (фактичних) нормальних напружень і поздовжніх переміщень стержня, якщо $l = 8\text{ м}$; матеріал стержня – сталь; $[\sigma] = 160\text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

Розв'язування

Розбиваємо стержень на три ділянки (рис. 2.5а). Для кожної з ділянок визначаємо значення поздовжніх (нормальних) сил:

$$N_1 = F_1 = 10\text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 + F_2 = 10 + 20 = 30\text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 + F_2 - 2F_3 = 10 + 20 - 2 \cdot 40 = -50\text{ кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил, N (рис. 2.5б).

З умови міцності на розтяг-стиск $\sigma = N/A \leq [\sigma]$ визначаємо необхідні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{160} = 0,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{160} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Діаметри стержня визначаємо за формулою

$$A_i = \pi \cdot d_i^2 / 4, \quad \text{де } i = 1, 2, 3, 4,$$

звідки

$$d_i \geq \sqrt{4A_i / \pi}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 62,5}{3,14}} = 8,92\text{ мм};$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 187,5}{3,14}} = 15,45\text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 312,5}{3,14}} = 19,95\text{ мм}.$$

Отримані результати заокруглюємо: $d_{\partial 1} = 10\text{мм}$, $d_{\partial 2} = 16\text{мм}$, $d_{\partial 3} = 20\text{мм}$. Виконуємо ескіз стержня (рис. 2.5в).

Визначаємо дійсні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці з урахуванням заокруглення їх діаметрів за формулою

$$A_{\partial i} = \pi \cdot d_{\partial i}^2 / 4.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$A_{\partial 1} = 3,14 \cdot 10^2 / 4 = 78,5\text{мм}^2;$$

$$A_{\partial 2} = 3,14 \cdot 16^2 / 4 = 201\text{мм}^2;$$

$$A_{\partial 3} = 3,14 \cdot 20^2 / 4 = 314\text{мм}^2.$$

Визначаємо робочі (фактичні) нормальні напруження за формулою

$$\sigma_{pi} = |N_i| / A_{\partial i}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\sigma_{p1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{78,5 \cdot 10^{-6}} = 127\text{МПа};$$

$$\sigma_{p2} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{201 \cdot 10^{-6}} = 149\text{МПа};$$

$$\sigma_{p3} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{314 \cdot 10^{-6}} = 159\text{МПа}.$$

Будуємо епюру робочих (фактичних) нормальних напружень σ_p за модулем (рис. 2.5г).

Поздовжні (лінійні) деформації кожної ділянки стержня визначаємо за формулою

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot A_{\partial i}},$$

де L_i – довжина ділянки стержня, на якій діє поздовжня сила N_i .

У числовому вигляді

$$\Delta l_1 = \frac{10 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 78,5 \cdot 10^{-6}} = 1,53 \cdot 10^{-3}\text{ м} = 1,53\text{мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{30 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 201 \cdot 10^{-6}} = 1,79 \cdot 10^{-3}\text{ м} = 1,79\text{мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{-50 \cdot 3,2}{2 \cdot 10^8 \cdot 314 \cdot 10^{-6}} = -2,54 \cdot 10^{-3}\text{ м} = -2,54\text{мм}.$$

За отриманими результатами будуємо епюру лінійних переміщень перетинів стержня (рис. 2.5д). За нуль приймаємо закріплення.

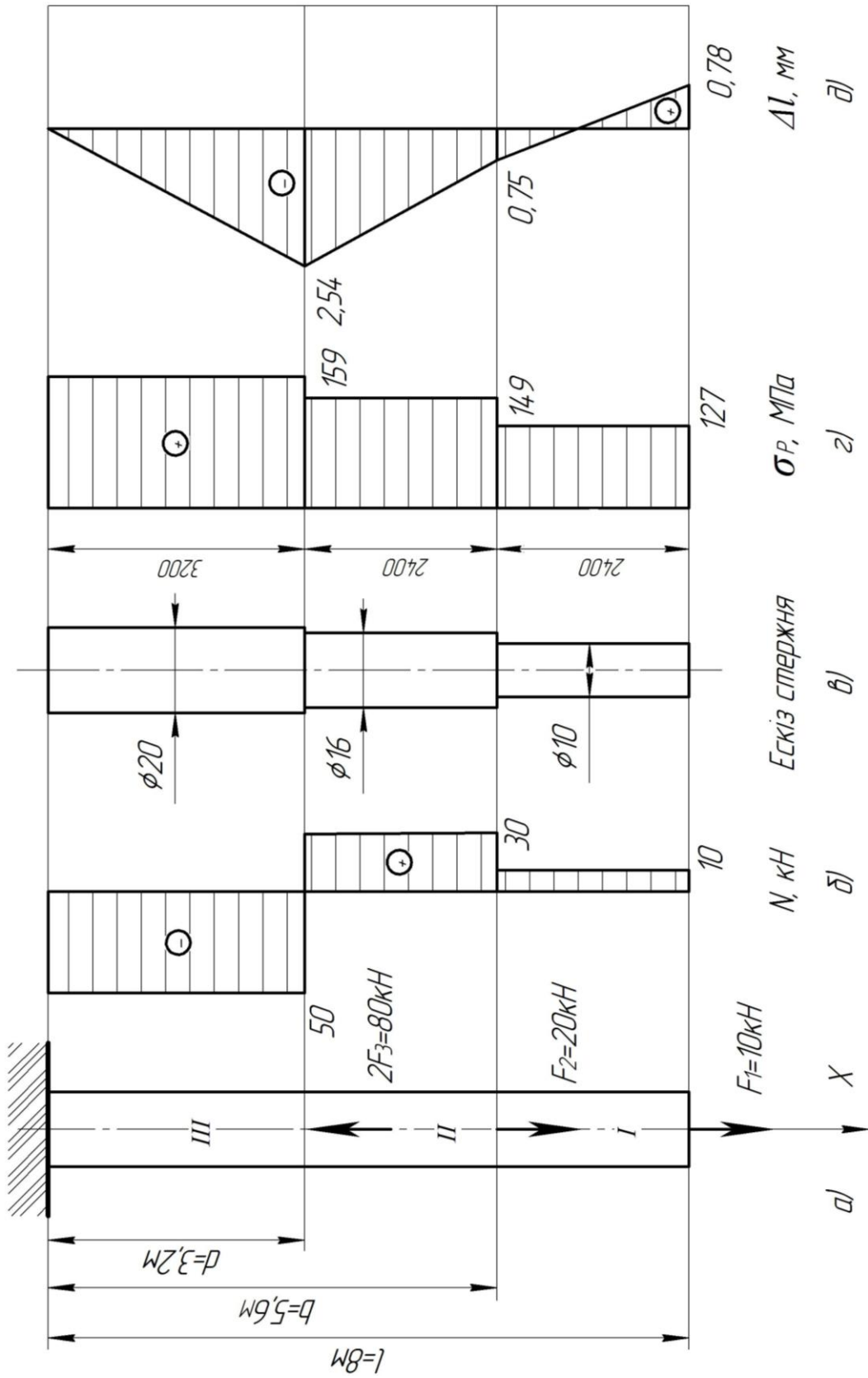


Рисунок 2.5

Задача №2

Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи при розтягу-стиску

Для заданої стержневої системи (рис. до задачі №2, табл. до задачі №2), до якої прикладена сила $F = 50кН$, визначити діаметри стержнів DE і KH , якщо відоме відношення їх площ $A_{DE} = k \cdot A_{KH}$. Матеріал стержнів – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160МН/м^2$; $a = 1м$. Брус, до якого прикладена зовнішня сила F , вважати абсолютно жорстким.

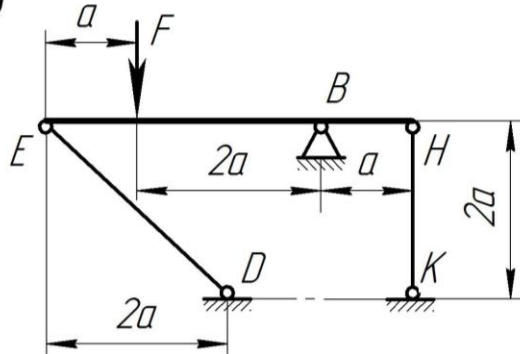
План розв'язування задачі:

1. Виконати схему стержневої системи у масштабі.
2. Встановити ступінь статичної невизначуваності системи.
3. Скласти додаткові рівняння, розглянувши деформацію системи.
4. Визначити зусилля у стержнях.
5. Підібрати площі поперечних перетинів стержнів.

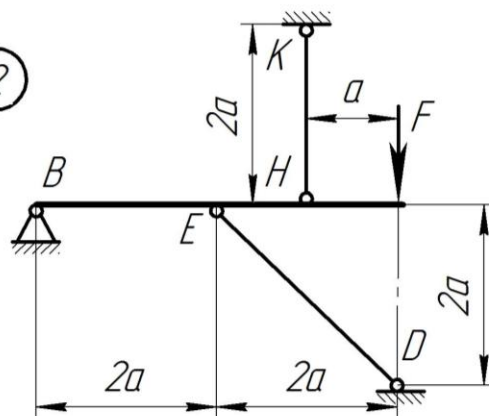
Таблиця до задачі №2

№з/П	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	0,5

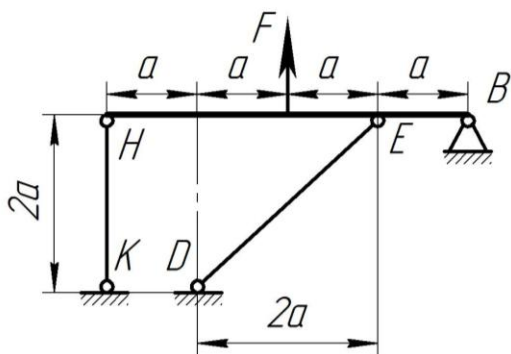
1



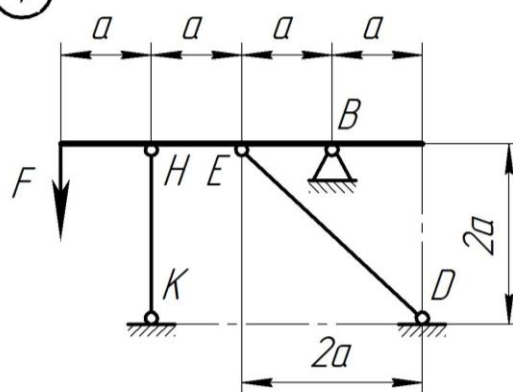
2



3



4



5

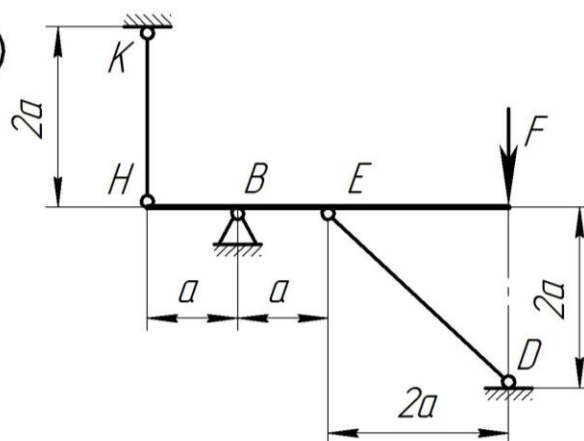
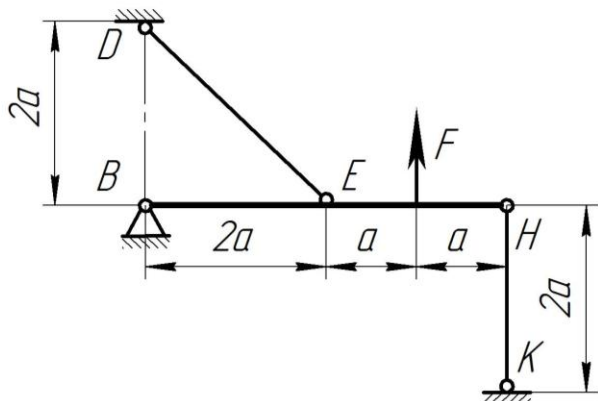
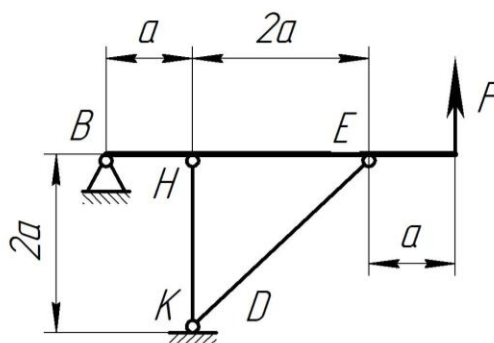


Рисунок до задачі №2

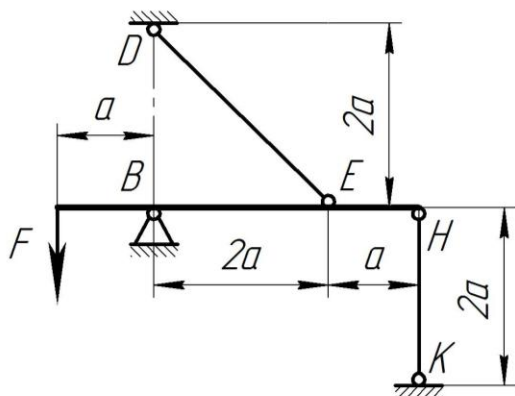
6



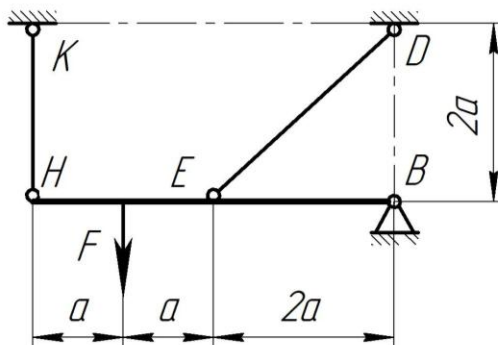
7



8



9



0

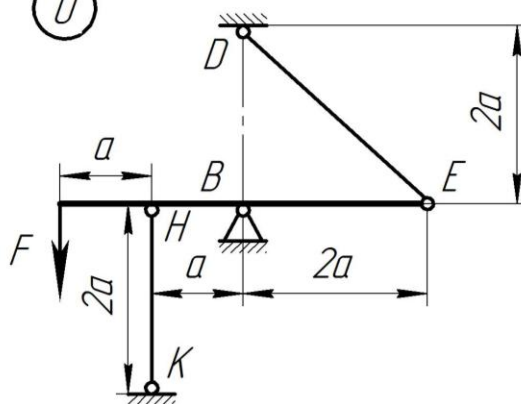


Рисунок до задачі №2 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №2
Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи
при розтягу-стиску

Для заданої стержневої системи (рис. 2.6а), до якої прикладена сила $F = 50\text{кН}$, визначити діаметри стержнів DE і KH , якщо відоме відношення їх площ $A_{DE} = k \cdot A_{KH}$, $k = 3$. Брус, до якого прикладена зовнішня сила F , вважати абсолютно жорстким. Матеріал стержнів і бруса – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160\text{МПа}$; $a = 1\text{м}$.

Розв'язування

При навантаженні системи силою F у стержнях DE і KH виникають нормальні зусилля, в даному випадку – стискаючі. Площі поперечних перетинів стержнів при стиску визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск

$$\sigma = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma], \quad \text{звідки} \quad A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}. \quad (1.1)$$

Для визначення зусиль у стержнях DE і KH складаємо рівняння рівноваги бруса (рис. 2.6б):

$$\sum X = 0; \quad -N_{DE} \cdot \cos\alpha + B_X = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum Y = 0; \quad -F + N_{DE} \cdot \sin\alpha + B_Y - N_{KH} = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 3a - N_{DE} \cdot 2a \cdot \sin\alpha - N_{KH} \cdot a = 0, \quad (1.4)$$

де N_{DE} , N_{KH} – нормальні сили, що виникають в стержнях DE і KH ;

B_X , B_Y – складові сили реакції опори B .

У системі є чотири невідомі зусилля та реакції (N_{DE} , N_{KH} , B_X , B_Y), а рівнянь рівноваги – три. Отже, система $4-3=1$ раз статично невизначена.

Складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності переміщень (деформацій).

Після прикладання сили F стержні DE і KH деформуються, і система займе положення, яке показано на рис. 2.6в. З подібності трикутників DD_1B і KK_1B випливає, що

$$\frac{DD_1}{KK_1} = \frac{DB}{KB} = \frac{2a}{a} = 2. \quad (1.5)$$

У даному випадку

$$DD_1 = \frac{\Delta L_{DE}}{\sin\alpha}; \quad KK_1 = \Delta L_{KH}, \quad (1.6)$$

де ΔL_{KH} , ΔL_{DE} – абсолютні деформації стержнів KH і DE .

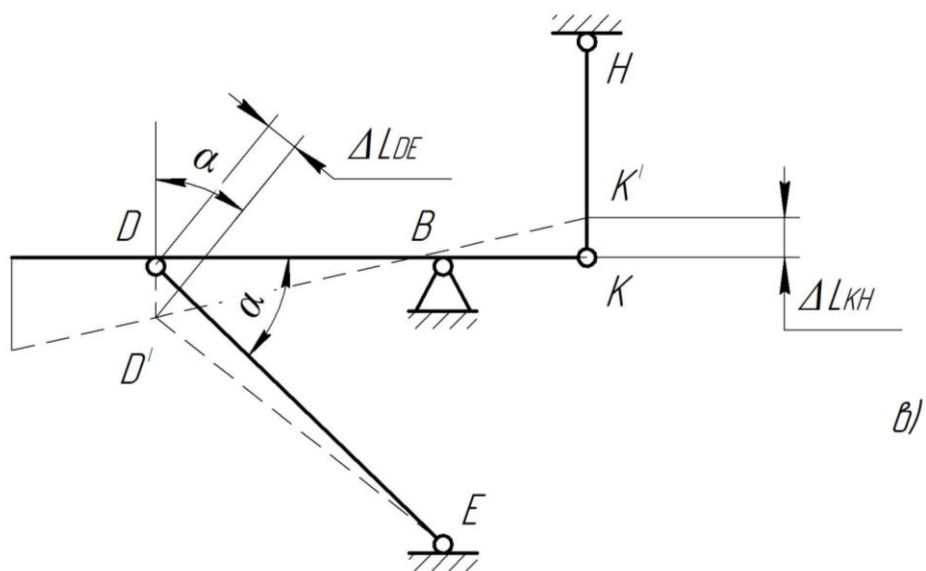
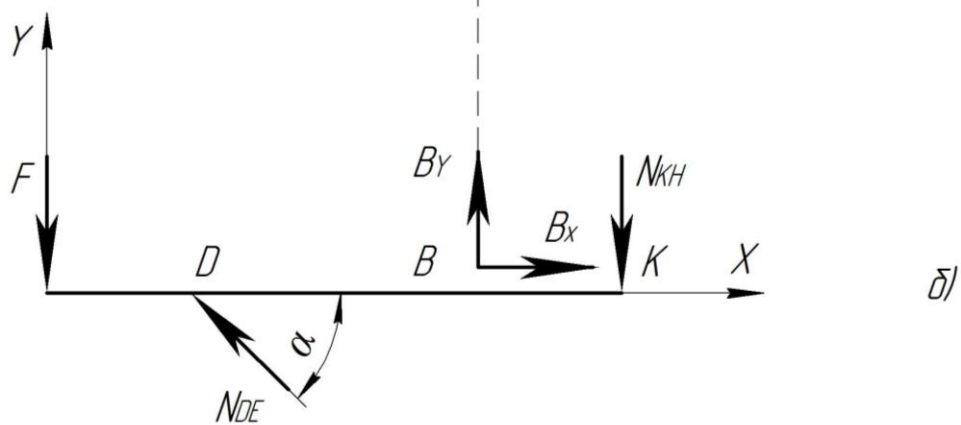
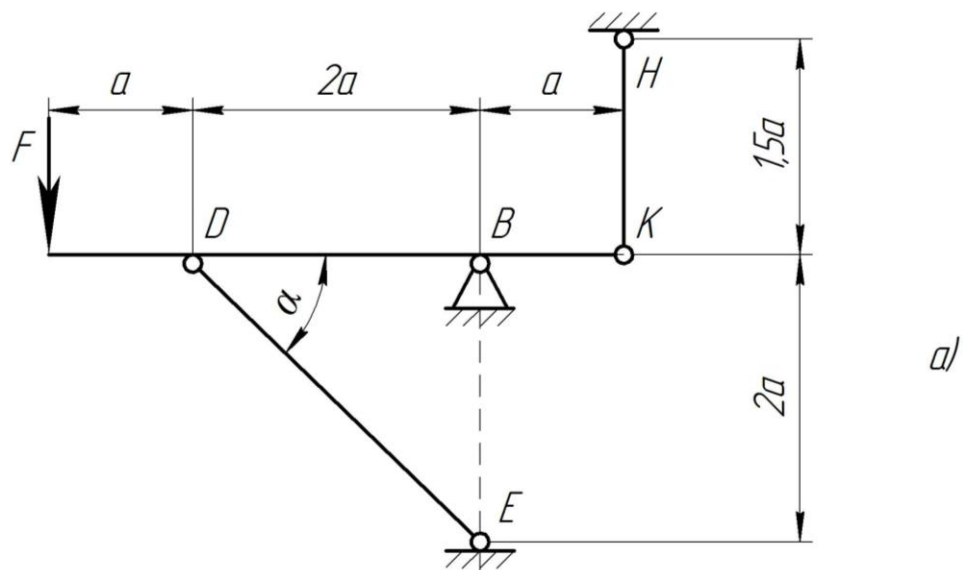


Рисунок 2.6

Деформації стержнів запишемо через закон Гука у вигляді:

$$\Delta L_{KH} = \frac{N_{KH} \cdot 1,5a}{E \cdot A_{KH}}; \quad \Delta L_{DE} = \frac{N_{DE} \cdot 2a}{E \cdot A_{DE} \cdot \sin \alpha}.$$

Підставивши значення ΔL_{KH} і ΔL_{DE} у вирази (1.5) і (1.6), отримаємо

$$\frac{N_{DE} \cdot 2a \cdot E \cdot A_{KH}}{N_{KH} \cdot 1,5a \cdot E \cdot A_{DE} \cdot \sin^2 \alpha} = 2.$$

Врахувавши, що $A_{DE} = 3A_{KH}$, отримаємо

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 \alpha.$$

У даному випадку $\alpha = 45^\circ$ (див. рис. 2.6a), тоді

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 45^\circ = 2,25N_{KH}. \quad (1.7)$$

Розв'язуючи рівняння (1.4) і (1.7), визначаємо невідомі зусилля в стержнях

$$\begin{cases} 3F - 2N_{DE} \cdot \sin 45^\circ - N_{KH} = 0; \\ N_{DE} = 2,25N_{KH}, \end{cases}$$

звідки

$$N_{KH} = \frac{3F}{4,5 \sin 45^\circ + 1} = \frac{3 \cdot 50}{4,5 \cdot 0,7 + 1} = 35,9 \text{ кН},$$

відповідно

$$N_{DE} = 2,25 \cdot 35,9 = 80,8 \text{ кН}.$$

Надалі рівняння (1.2) і (1.3) при розв'язуванні задачі не використовуємо, так як невідомі зусилля в стержнях визначені, а за умовою задачі непотрібно визначати реакцію в опорі B .

Площу поперечного перетину стержня KH визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск (1.1)

$$A_{KH} \geq \frac{N_{KH}}{[\sigma]} = \frac{35,9 \cdot 10^{-3}}{160} = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

площу поперечного перетину стержня DE – зі співвідношення

$$A_{DE} = 3A_{KH} = 3 \cdot 2,24 \cdot 10^{-4} = 6,72 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Перевіряємо стержень DE на міцність

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{A_{DE}} = \frac{80,8 \cdot 10^{-3}}{6,72 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності забезпечена. В іншому випадку площу поперечного перетину стержня DE необхідно було б визначити з умови міцності, а стержня KH – зі співвідношення.

3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

Моменти інерції та центр ваги

Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі.

Статичні моменти площі перетину довільної форми (рис. 3.1) визначають за формулами

$$S_X = \int_A y dA; \quad S_Y = \int_A x dA;$$

$$S_X = y_C \cdot A; \quad S_Y = x_C \cdot A,$$

де x, y – координати (відстані), що визначають положення елемента площі dA ;

y_C, x_C – координати центра ваги площі перетину;

A – площа перетину;

dA – елемент площі (елементарна площадка).

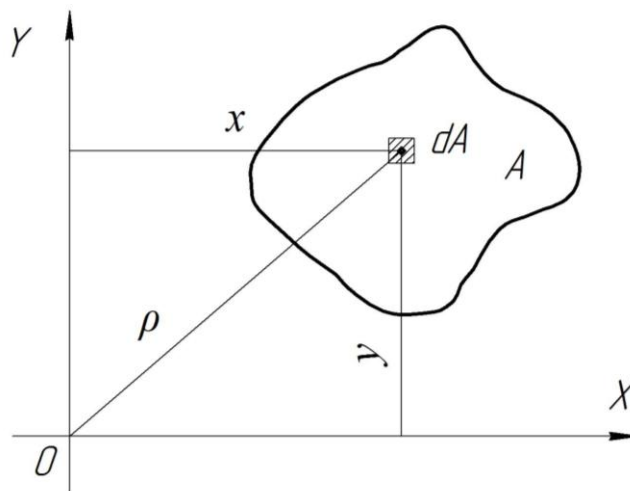


Рисунок 3.1

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її до центра ваги від цієї осі.

Статичний момент площі фігури – момент першого порядку, розмірність його m^3 . Він може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю (відносно осі симетрії фігури або відносно центральної осі, тобто осі, що проходить через центр ваги перетину).

Для визначення **центра ваги** складних фігур застосовують **метод розбиття**, статичний момент площі всієї фігури визначають як алгебраїчну суму статичних моментів окремих її частин. Координати центра ваги складного перетину визначають за формулами

$$x_C = \frac{\sum S_Y}{\sum A}; \quad y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A},$$

де $\sum S_Y$, $\sum S_X$ – сума статичних моментів окремих площ;
 $\sum A$ – сума окремих площ.

Осі, що проходять через центр ваги перетину, називають **центральною осями**. Статичний момент площі відносно центральної осі дорівнює нулю.

Полярний момент інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, – це взята на всій площині сума добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса.

Полярний момент площі перетину довільної форми відносно полюса O (див. рис. 3.1) визначають за інтегралом

$$I_P = \int_A \rho^2 dA,$$

де ρ – відстань від центра елементарної площадки (елемента площі) dA до осі, перпендикулярної до площини перетину, що проходить через точку O (полюс),

$$\rho^2 = y^2 + x^2.$$

Осьовий момент інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі.

Осьові моменти інерції площі перетину довільної форми (див. рис. 3.1) відносно осей OX та OY визначають за інтегралами

$$I_X = \int_A y^2 dA; \quad I_Y = \int_A x^2 dA.$$

Полярний та осьові моменти інерції площі перетину величини завжди додатні і не дорівнюють нулю.

Залежність між осьовими та полярним моментами інерції

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = I_X + I_Y.$$

Моменти інерції фігури – моменти другого порядку, розмірність m^4 .

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетину цих осей (початку координат).

Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей

$$I_{X_1} = I_X + A \cdot a^2.$$

Осьовий момент інерції відносно будь-якої осі X_1 дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі X , яка паралельна осі X_1 , плюс добуток площі на квадрат відстані між осями (a – відстань між осями).

Головні осі та головні моменти інерції

Центральні осі – осі, які проходять через центр ваги плоскої фігури.

Центральні моменти інерції плоскої фігури (перетину) – моменти інерції відносно центральних осей.

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції перетину залишиться постійним, а осьові моменти інерції будуть змінюватися, причому

$$I_X + I_Y = I_P = \text{const.}$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні один із осьових моментів досягає максимального, а другий – мінімального значень.

Головні осі інерції – осі, відносно яких осьові моменти інерції перетину (плоскої фігури) досягають максимальних і мінімальних значень.

Головні моменти інерції перетину – це осьові моменти інерції відносно головних осей.

Головні центральні осі – це головні осі, які проходять через центр ваги перетину (плоскої фігури). Якщо фігура має хоча б одну вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

Головні центральні моменти інерції перетину (плоскої фігури) – це моменти інерції відносно головних центральних осей.

В інженерних розрахунках важливе значення мають **головні центральні моменти інерції**.

Моменти інерції перетинів є геометричними характеристиками, які дають змогу порівняти жорсткість брусів із заданого матеріалу з їхнім опором зовнішнім силам.

Осьові та полярні моменти інерції набувають лише додатних значень.

Опір бруса згину та крученню характеризують також моментами опору перетинів: осьовими та полярним.

Осьові моменти опору перетинів визначають за формулами

$$W_X = \frac{I_X}{|y_{\max}|}; \quad W_Y = \frac{I_Y}{|x_{\max}|},$$

де y_{\max} , x_{\max} – координати точок поперечного перетину максимально віддалених від осей OX та OY .

Полярний момент опору перетину відповідно

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\max}},$$

де ρ_{\max} – координата точки перетину, максимально віддаленої від полюса.

Полярні моменти інерції та полярні моменти опору для поперечних перетинів:

- круг (рис. 3.2а)

$$I_P = \pi \cdot D^4 / 32; \quad W_P = \pi \cdot D^3 / 16;$$

- кільце (рис. 3.2б)

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - \alpha^4), \quad \text{де } \alpha = d/D.$$

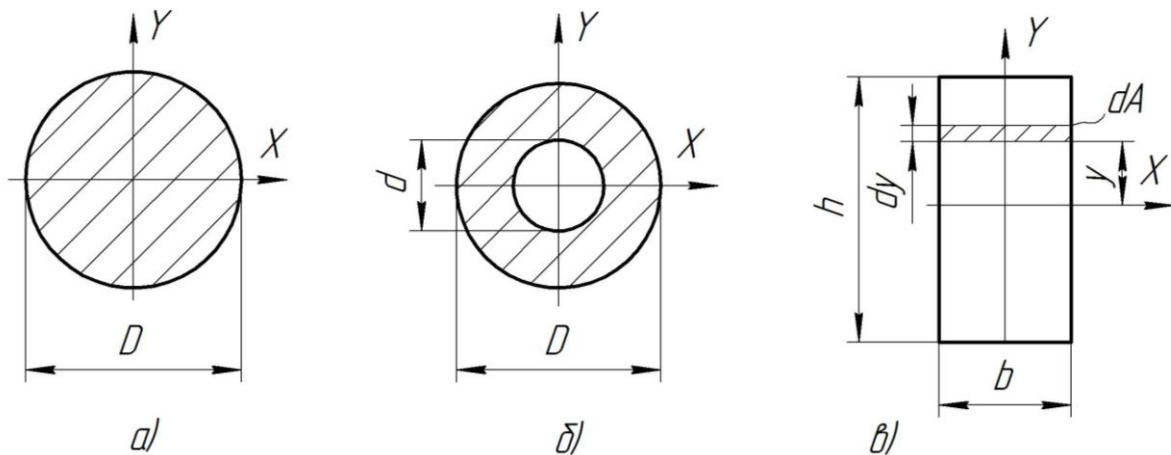


Рисунок 3.2

Осьові моменти інерції та осьові моменти опору для поперечних перетинів:

- круг (див. рис. 3.2а)

$$I_X = I_Y = I_0 = \pi \cdot D^4 / 64; \quad W_X = W_Y = W_0 = \pi \cdot D^3 / 32;$$

- прямокутник (рис. 3.2в)

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

4. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ

Зсув. Напруження, деформації і закон Гука при зсуві

Зсув (зріз) – це такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса діє тільки поперечна (перерізуюча) сила Q (рис. 4.1а). Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – **зріз**.

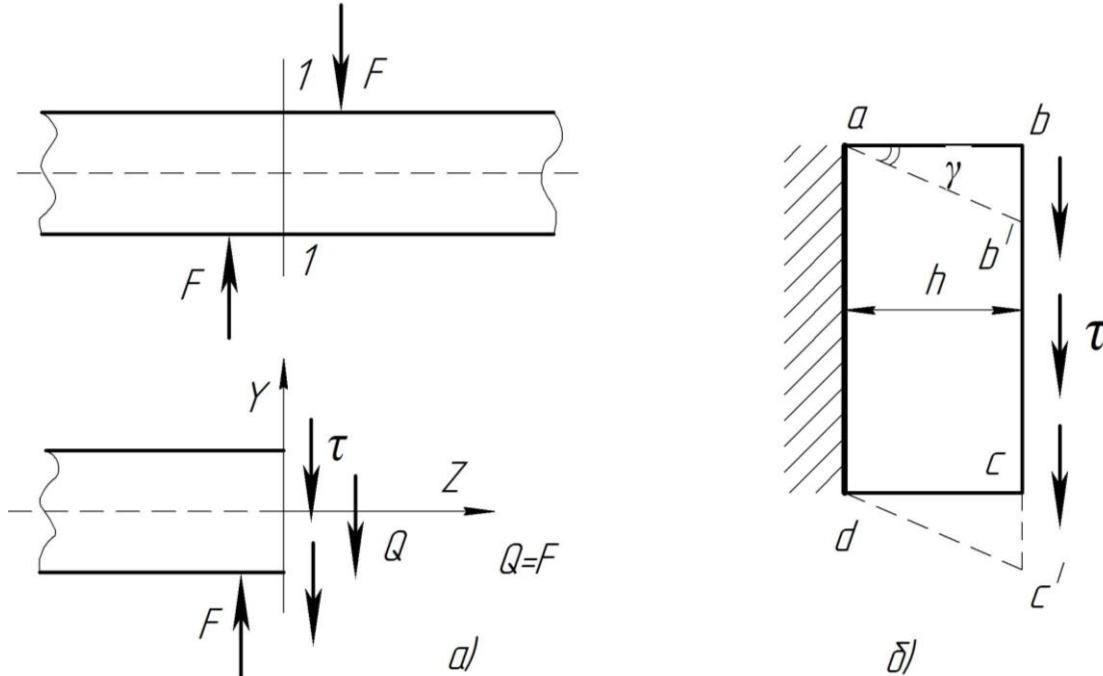


Рисунок 4.1

Вважаємо, що дотичні напруження, які виникають у поперечному перетині бруса при зсуві, $\tau = const$, тоді перерізуюча сила

$$Q = A \cdot \tau, \quad \text{тобто напруження } \tau = Q/A.$$

Умова міцності на зріз

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]_{ЗР},$$

де $[\tau]_{ЗР}$ – допустиме дотичне напруження на зріз, $[\tau]_{ЗР} = (0,25 \dots 0,35) \sigma_T$.

Деформація зсуву визначається кутом зсуву – γ . Абсолютний зсув бруса (рис. 4.1б) – bb', cc' .

Закон Гука при зсуві

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

де G – модуль зсуву, або модуль пружності II-го роду, характеризує жорсткість матеріалу.

Залежність між пружними характеристиками пластичного матеріалу (сталі) E, G, μ

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Кручення

Кручення – вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса виникає *тільки крутний момент*, M_{KP} .

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса у площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил M (рис. 4.2). Моменти цих пар називають *обертаючими* (якщо брус обертається), позначають їх T , і *скручувальними* (якщо брус не обертається), позначають їх M .

Брус круглого поперечного перетину, що працює на деформацію кручення, називають **валом**. Кручення зазнають вали двигунів та верстатів, інші металоконструкції. На кручення працюють також стержні з перетинами інших форм.

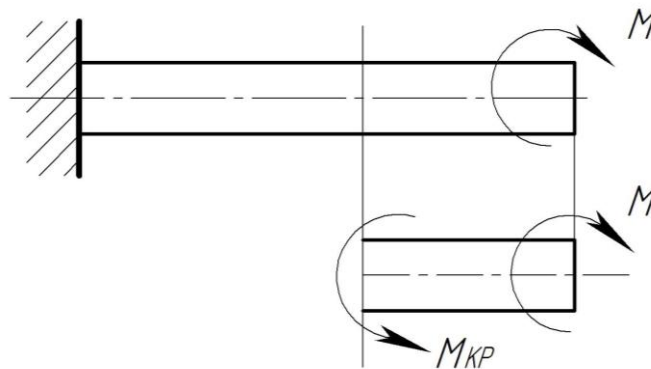


Рисунок 4.2

Крутний момент M_{KP} у будь-якому перетині вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх скручувальних моментів, прикладених до бруса справа чи зліва від перетину.

Для розрахунку бруса на міцність при крученні, так як і при розтягу (стиску) необхідно визначити **небезпечний перетин**. У випадку, якщо розміри поперечного перетину на довжині бруса постійні, то небезпечними будуть перетини, у яких крутні моменти максимальні. Графік, який показує закон зміни крутних моментів на довжині бруса, називають **епюрою крутних моментів**. Будують її аналогічно епюрі поздовжніх сил.

При крученні бруса у його поперечних перетинах виникають тільки дотичні напруження. Для круглого стержня (вала) дотичні напруження визначають за формулою

$$\tau = \frac{M_{KP}}{I_P} \cdot \rho,$$

де ρ – відстань від центра (полюса) круглого перетину до точки, в якій визначають дотичні напруження (рис. 4.3a).

Епюра розподілу дотичних напружень за висотою поперечного перетину зображена на рис. 4.3б. Дотичні напруження змінюються вздовж радіуса перетину за лінійним законом.

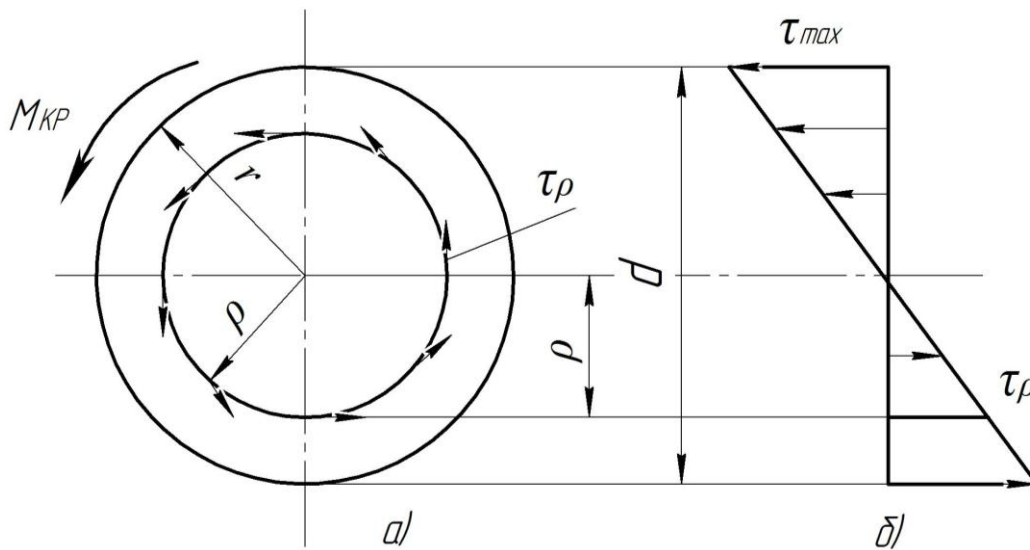


Рисунок 4.3

Дотичні напруження дорівнюють нулю в центрі перетину, $\rho = 0$ і досягають максимального значення у точках контура, $\rho = d/2$. У проміжних точках перетину дотичні напруження лінійно залежать від відстані ρ (див. рис. 4.3б). Оскільки

$$\frac{I_P}{(d/2)} = W_P, \quad \text{то} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P}.$$

Умова міцності при крученні. Міцність вала забезпечується, якщо максимальне дотичне напруження не перевищує допустимого

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження при крученні, визначають залежно від допустимого напруження розтягу $[\sigma]_P$:

$$\text{для сталей} \quad [\tau] = (0,55 \dots 0,6) [\sigma]_P;$$

$$\text{для чавунів} \quad [\tau] = (1 \dots 1,2) [\sigma]_P.$$

З допомогою умови міцності вала при крученні розв'язують три типи задач.

1. **Добір поперечного перетину** (проектний розрахунок), тобто визначення потрібних його розмірів з розрахунку полярного моменту опору

$$W_P \geq M_{KP} / [\tau], \text{ для круглого перетину } d = \sqrt[3]{16 W_P / \pi}.$$

2. **Перевірка міцності** (перевірний розрахунок), зводиться до порівняння фактичного (дійсного) та допустимого дотичних напружень за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau].$$

3. **Визначення найбільшого допустимого крутного моменту**

$$[M_{KP}] \leq [\tau] \cdot W_P.$$

Деформація при крученні характеризується поворотом поперечних перетинів вала один відносно одного на деякий кут φ – **кут закручування**. Для вала постійної жорсткості $G \cdot I_P$ довжиною l при постійному значенні крутного моменту M_{KP} кут закручування (повний кут закручування) визначають за формулами:

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} [\text{рад}]; \quad \varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} [\text{град}].$$

Ці співвідношення називають **законом Гука при крученні**. Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться розмірами поперечного перетину, величиною крутного моменту, матеріалом, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок $\varphi = \sum \varphi_i$.

Повний кут закручування вала не повністю характеризує деформацію кручення, оскільки залежить від довжини вала. Жорсткість вала оцінюють **відносним кутом закручування**, який визначають за формулами

$$\theta = \varphi / l; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \left[\frac{\text{град}}{\text{м}} \right].$$

Умова жорсткості вала при крученні. Жорсткість вала достатня, якщо найбільший відносний кут закручування не перевищує допустимого його значення

$$\theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

де $[\theta]$ – допустимий кут закручування вала.

З допомогою умови жорсткості (як і умови міцності) виконують три види розрахунків конструкцій: **проектний, перевірний і визначення допустимого навантаження**.

Задача №3

Розрахунок вала на кручення

На вал (рис. до задачі №3, табл. до задачі №3) насаджено 5 шківів, які передають потужності P_1, P_2, P_3, P_4, P_0 . Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta]=2\text{град}/\text{м}$. Частота обертання вала ω , відстань $a=0,4\text{м}$. Матеріал – сталь 45; $[\tau]=60\text{МПа}$; $G=8\cdot 10^4\text{МПа}$.

План розв'язування задачі:

1. Визначити, нехтуючи тертям у підшипниках, потужність на шківі « P_0 ».
2. Знайти скручувальні моменти, що передаються кожним шківом.
3. Визначити крутні моменти M_{KR} на кожній ділянці вала. Побудувати епюру крутних моментів.
4. З умови міцності на кручення визначити діаметри вала на окремих його ділянках. Заокруглити отримані величини до розміру кратного 2 або 5.
5. Виконати ескіз ступінчастого вала (з позначенням діаметрів і довжин окремих ділянок).
6. Визначити величини кутів закручування на окремих ділянках і побудувати епюру кутів закручування для всього вала, приймаючи за нерухомий перетин один з кінців вала або перетин, де діє P_0 .
7. Провести перевірку вала на жорсткість.

Таблиця до задачі №3

№ з/п	$P_1, \text{кВт}$	$P_2, \text{кВт}$	$P_3, \text{кВт}$	$P_4, \text{кВт}$	$\omega, \text{рад/сек}$
1	11	12	13	14	10
2	12	13	14	11	20
3	13	14	11	12	30
4	14	13	12	11	40
5	11	12	13	14	50
6	12	13	14	11	60
7	13	14	11	12	70
8	14	11	12	13	80
9	16	17	13	15	90
0	15	16	14	13	100

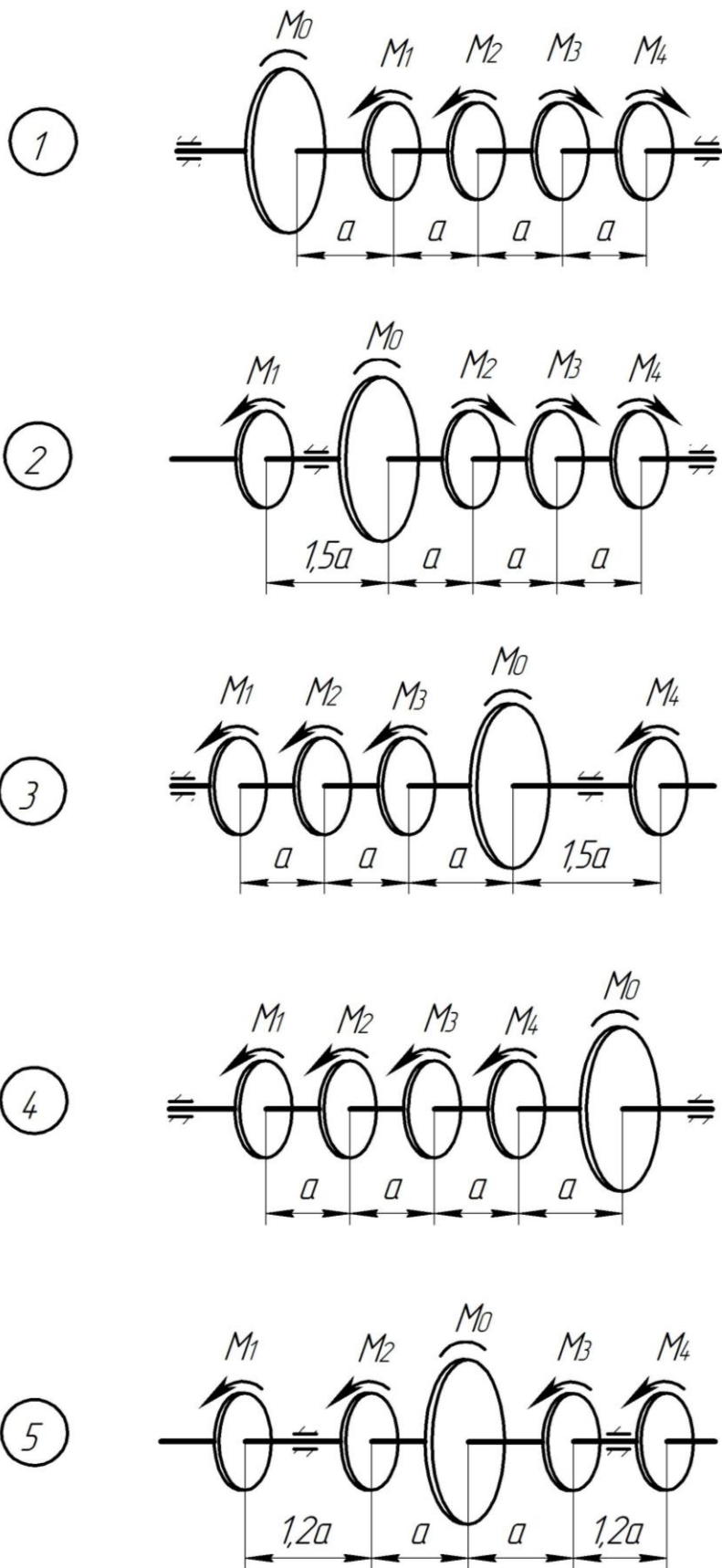


Рисунок до задачі №3

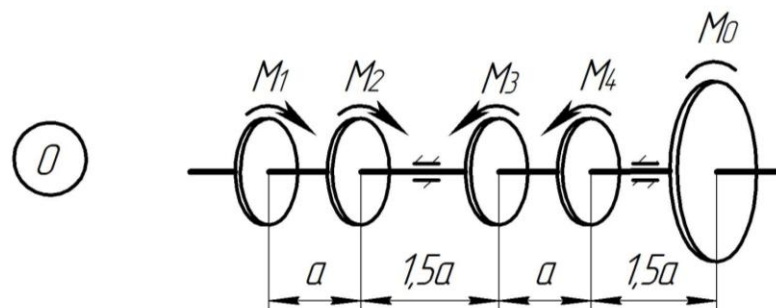
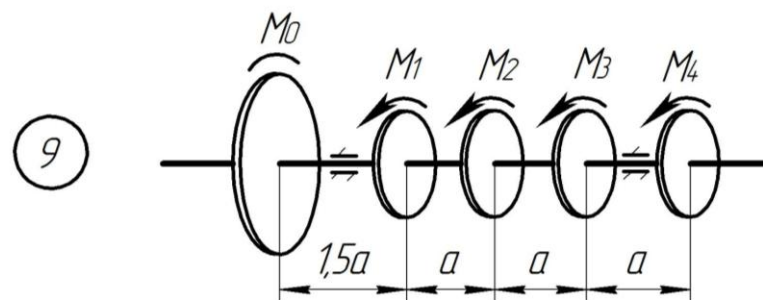
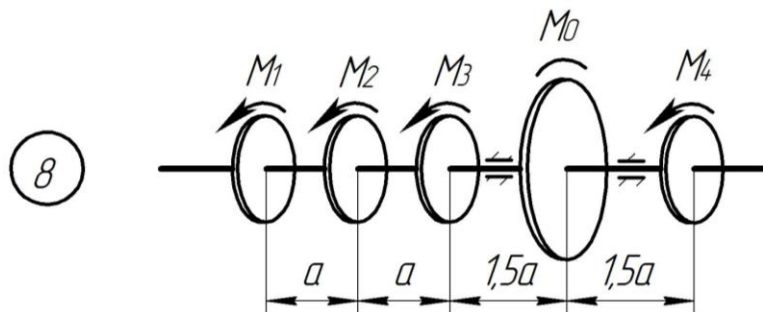
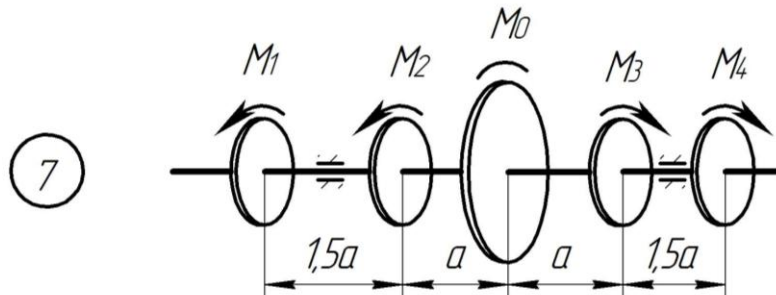
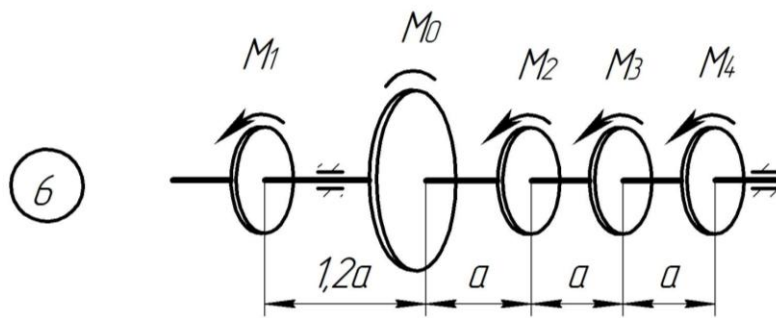


Рисунок до задачі №3(закінчення)

Приклад розв'язування задачі №3 Розрахунок вала на міцність і жорсткість

На вал (рис. 4.4а) насаджено 5 шківів, які передають потужності $P_1 = 10 \text{кВт}$; $P_2 = 50 \text{кВт}$; $P_3 = 48 \text{кВт}$; $P_4 = 80 \text{кВт}$. Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta] = 2 \text{град/м}$. Частота обертання вала $\omega = 40 \text{с}^{-1}$; відстань $a = 0,4 \text{м}$; матеріал – сталь 45; $[\tau] = 50 \text{МПа}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{МПа}$.

Розв'язування

Значення потужності P_0 визначаємо на основі рівняння балансу потужностей, записаного з урахуванням напрямку дії зосереджених моментів (тертям в опорах нехтуємо),

$$-P_0 + P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 0,$$

звідки

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 10 + 50 + 48 - 80 = 28 \text{кВт}.$$

Скручувальні моменти M_i , які передаються кожним шківом, визначаємо за формулою

$$M_i = \frac{P_i}{\omega}, \quad \text{де } i=0, 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$M_0 = \frac{28}{40} = 0,7 \text{кНм}; \quad M_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \text{кНм}; \quad M_2 = \frac{50}{40} = 1,25 \text{кНм};$$

$$M_3 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{кНм}; \quad M_4 = \frac{80}{40} = 2,0 \text{кНм}.$$

Крутні моменти M_{KP_i} ($i=1, 2, 3, 4$) на кожній ділянці вала визначаємо, розглядаючи ділянки зліва і справа, (рис. 4.4б):

$$M_{KP1} = -M_0 = -0,7 \text{кНм};$$

$$M_{KP2} = -M_0 + M_1 = -0,7 + 0,25 = -0,45 \text{кНм};$$

$$M_{KP3} = M_4 = 2,0 \text{кНм};$$

$$M_{KP4} = M_4 - M_3 = 2,0 - 1,2 = 0,8 \text{кНм}.$$

За отриманими значеннями будемо епюру крутних моментів (рис. 4.4в).

З умови міцності на кручення $\tau_{\max} = M_{KP}/W_P \leq [\tau]$, враховуючи, що момент опору круглого поперечного перетину $W_P = \pi \cdot d^3/16 \approx 0,2d^3$, визначаємо діаметр вала на кожній ділянці за формулою

$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{M_{KPi}}{0,2 [\tau]}}$$

Підставивши значення крутних моментів, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 41,0 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{0,45}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 35,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 42,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{2,0}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 58,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо діаметри ділянок вала

$$d_{1\partial} = 42 \text{ мм}; \quad d_{2\partial} = 36 \text{ мм}; \quad d_{3\partial} = 44 \text{ мм}; \quad d_{4\partial} = 58 \text{ мм}.$$

За отриманими значення виконуємо ескіз вала (рис. 4.4з).

Кути закручування окремих ділянок вала визначимо за формулою

$$\varphi_i = \frac{M_{KPi} \cdot l_i}{G \cdot I_{Pi}}; \quad i=1, 2, 3, 4,$$

де l_i – довжина ділянки вала;

G – модуль зсуву, $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$;

I_{Pi} – полярний момент інерції поперечного перетину вала

$$I_{Pi} = \frac{\pi \cdot d_{i\partial}^4}{32} \cong 0,1 d_{i\partial}^4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\varphi_1 = \frac{-0,7 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,042)^4} = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-0,45 \cdot 0,6}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,036)^4} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{0,8 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,044)^4} = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{2,0 \cdot 0,5}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,058)^4} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

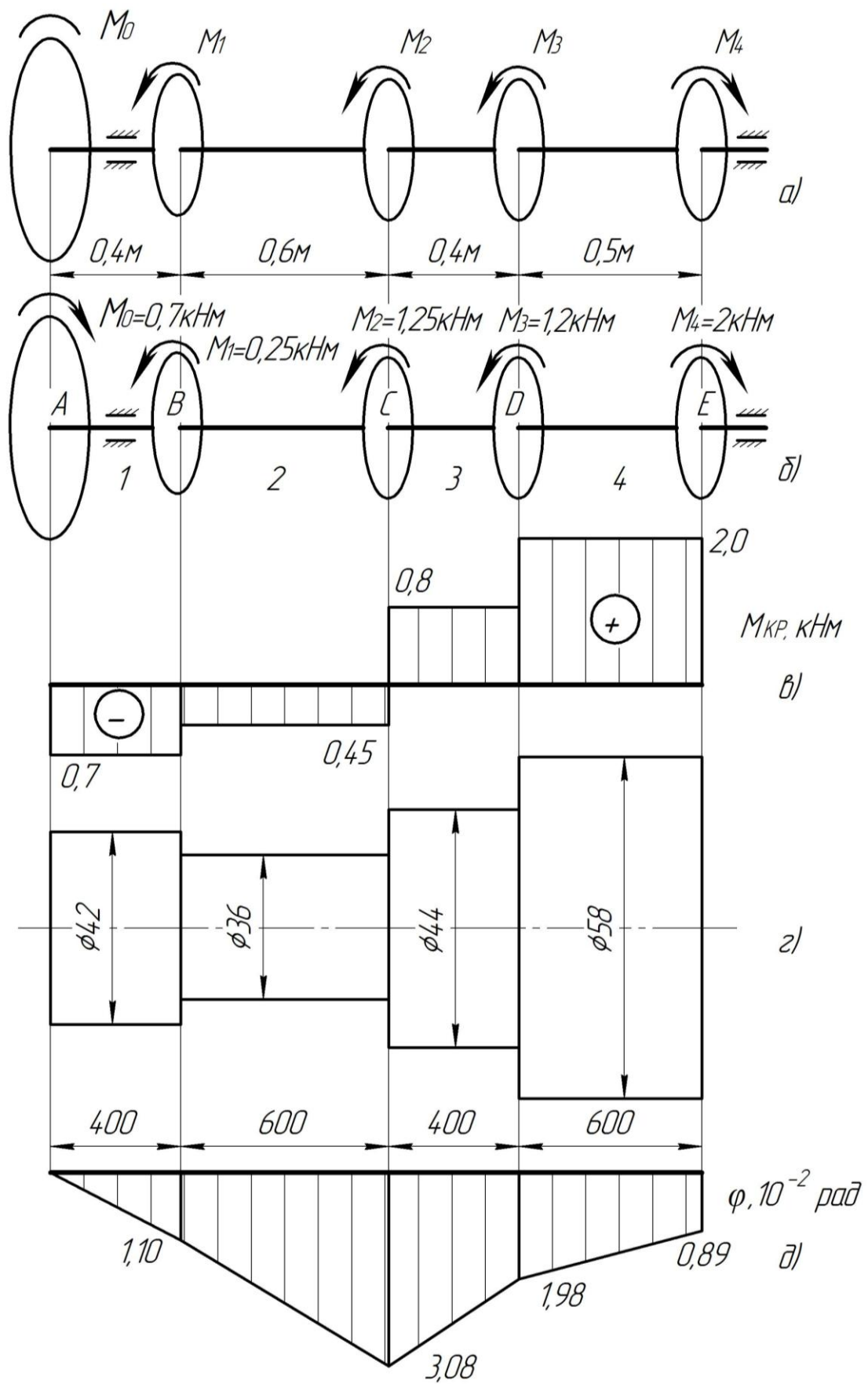


Рисунок 3.4

Визначаємо кути закручування перетинів вала B , C , D , E відносно перетину A

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,10 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,08 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,08 + 1,10) \cdot 10^{-2} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-1,98 + 1,09) \cdot 10^{-2} = -0,89 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Будуємо епюру кутів закручування вала (рис. 4.4д), прийнявши за початок відліку перетин A .

Перевірку на жорсткість вала виконаємо за умовою жорсткості

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де θ_{\max} – максимальний відносний кут закручування вала.

Визначимо відносні кути закручування на кожній ділянці вала за формулою

$$\theta_i = \frac{\varphi_i}{l_i}, \text{ де } i = 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\theta_1 = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{1,09 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо, що

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Отже, умову жорсткості забезпечено.

5. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН

Прямий поперечний згин. Внутрішні силові фактори.

Правило знаків

Згин – це стан опору бруса, в якому відбувається викривлення або зміна кривизни його осі. Брус, що працює на згин, називають *балкою*.

На згин працюють багато конструктивних елементів: осі залізничних вагонів, вали, панелі перекриттів, прольотні споруди мостів, стріли кранів, плоскі ресори автомобілів і т. д.

Плоский, або прямий, згин – це такий випадок згину, при якому викривлення осі балки відбувається у напрямі дії зовнішніх сил та навантажень, тобто в одній площині із зовнішніми силами.

Прямий поперечний згин – це такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникають **поперечна сила** Q та **згинальний момент** $M_{зг}$ (рис. 5.1а). Якщо поперечна сила не виникає, то це – **чистий згин** (рис. 5.1б).

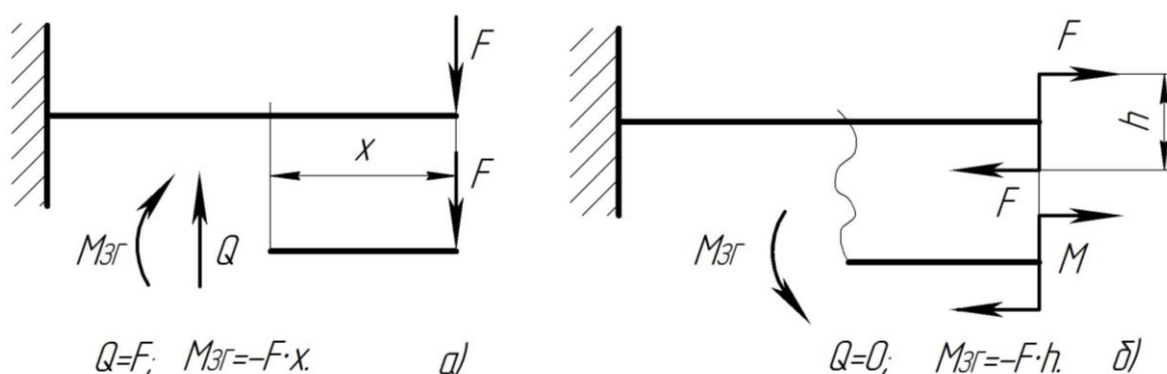


Рисунок 5.1

Поперечна сила у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину на вісь, перпендикулярну до осі балки, тобто

$$Q = \sum F_{iY}.$$

Згинальний момент у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину відносно центра ваги перетину.

$$M_{зг} = \sum M(F_i).$$

Для балки, яка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Отже, **сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перетину, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перетину.**

Правила знаків статики непридатні для встановлення знаків поперечної сили Q і згинального моменту $M_{зг}$.

Правило знаків можна зобразити графічно – поперечної сили (рис. 5.2) та згинального моменту (рис. 5.3).

Якщо сума зовнішніх сил, які діють зліва від перетину, дає рівнодійну, направлену вгору, то **поперечну силу** в перетині вважають **додатною**. І навпаки: для частини балки, розміщеної справа від перетину, знаки поперечної сили будуть протилежними (див. рис. 5.2). Або поперечні сили додатні, якщо вони намагаються повернути елемент балки за годинниковою стрілкою.

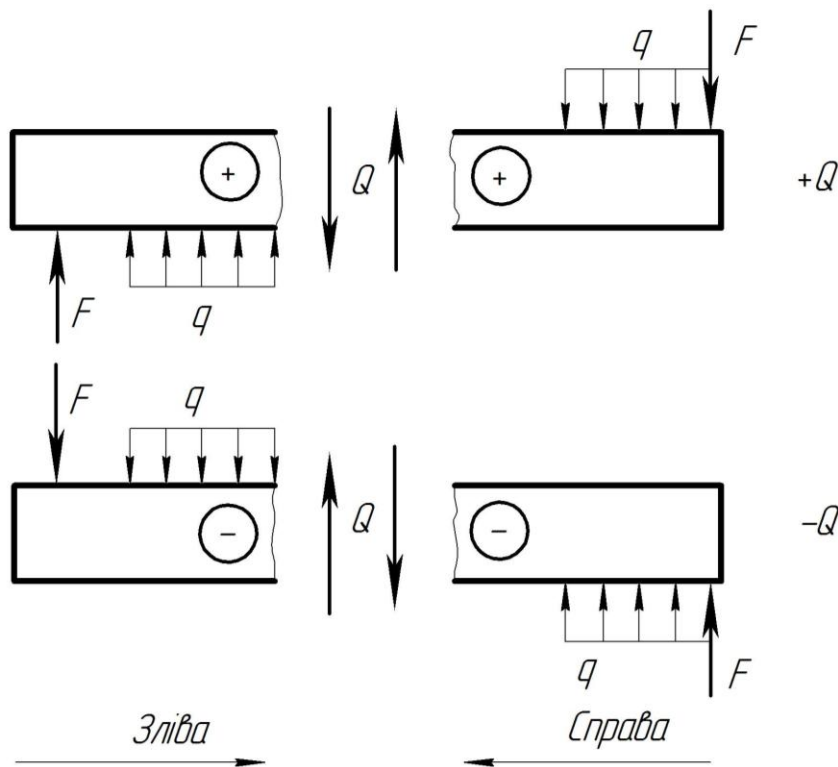


Рисунок 5.2

Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз (розтягуються нижні волокна), то **згинальний момент** у перетині вважають **додатним**, і навпаки (див. рис. 4.3).

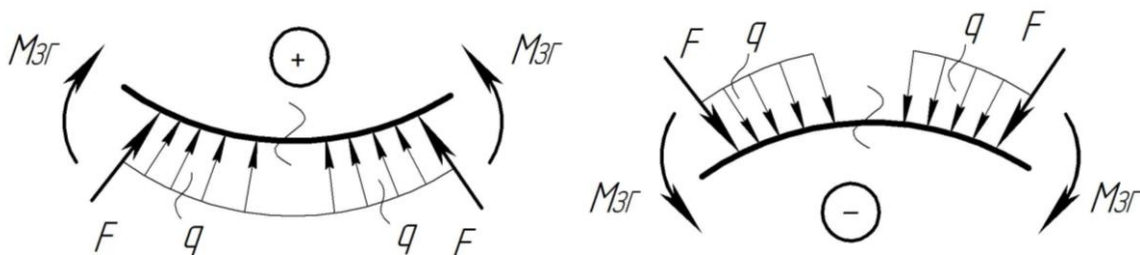


Рисунок 5.3

Користуючись цими правилами, треба уявити мислено **перетин балки жорстко закріпленням**, а в'язі – відкинутими і заміненими реакціями.

Для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статyki; для визначення знаків згинального моменту і перерізувочої сили – правилами опору матеріалів.

Усі сили, активні та реактивні, – це навантаження балки.

Спрощене уявлення реальних опорних елементів, тобто схематизація їх, що використовується для побудови розрахункових схем балок у стані плоского згину, дає змогу виділити три основні типи опор: шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома та затиснення (жорстке закріплення). Кожну з них моделюють у вигляді стержнів (рис. 5.4).

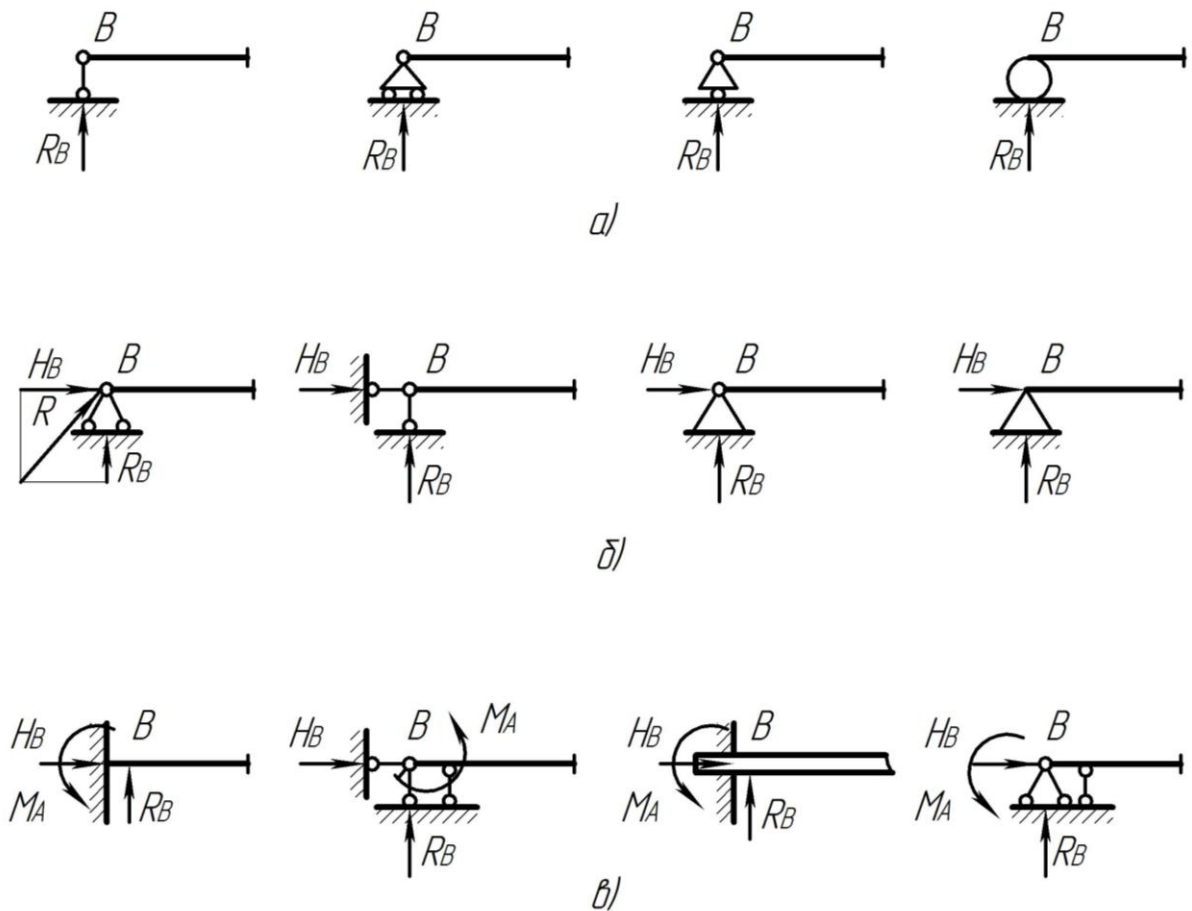


Рисунок 5.4. Схеми опор балок:

а) шарнірно-рухома; б) шарнірно-нерухома; в) жорстке закріплення

Диференціальні залежності при прямому поперечному згині

Між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить **теорема Журавського: поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту за абсцисою перетину балки.**

Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x).$$

Друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перетину балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Епюри поперечних сил та згинальних моментів

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинальних моментів будують епюри, які дають змогу визначити *можливий небезпечний перетин балки*, встановити значення поперечної сили і згинального моменту в цьому перетині. Епюри поперечних сил та згинальних моментів можна будувати двома способами.

Перший спосіб. Записують аналітичні функції поперечних сил і згинальних моментів для кожної ділянки як функції поточної координати x поперечного перетину

$$Q = f_1(x), \quad M_{зГ} = f_2(x).$$

Потім за отриманими рівняннями будують епюри.

Другий спосіб. Будують епюри за характерними точками і значеннями поперечних сил і згинальних моментів на межах ділянок. Застосовуючи цей спосіб, у більшості випадків можна обійтися без складання рівнянь поперечних сил і згинальних моментів.

Побудову епюр внутрішніх силових факторів при згині покажемо на прикладах.

Приклад 1 (рис. 5.5).

Визначаємо опорні реакції балки (рис. 5.5а)

$$\sum M_C = 0; \quad R_B(a+b) - F \cdot b = 0,$$

звідки $R_B = \frac{F \cdot b}{a+b};$

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_B = R_C(a+b) - F \cdot a = 0,$$

звідки $R_C = \frac{F \cdot a}{a+b}.$

Проводимо перевірку правильності визначення опорних реакцій балки

$$\sum Y = R_B - F + R_C = \frac{F \cdot b}{a+b} - F + \frac{F \cdot a}{a+b} = 0.$$

Опорні реакції балки визначено правильно.

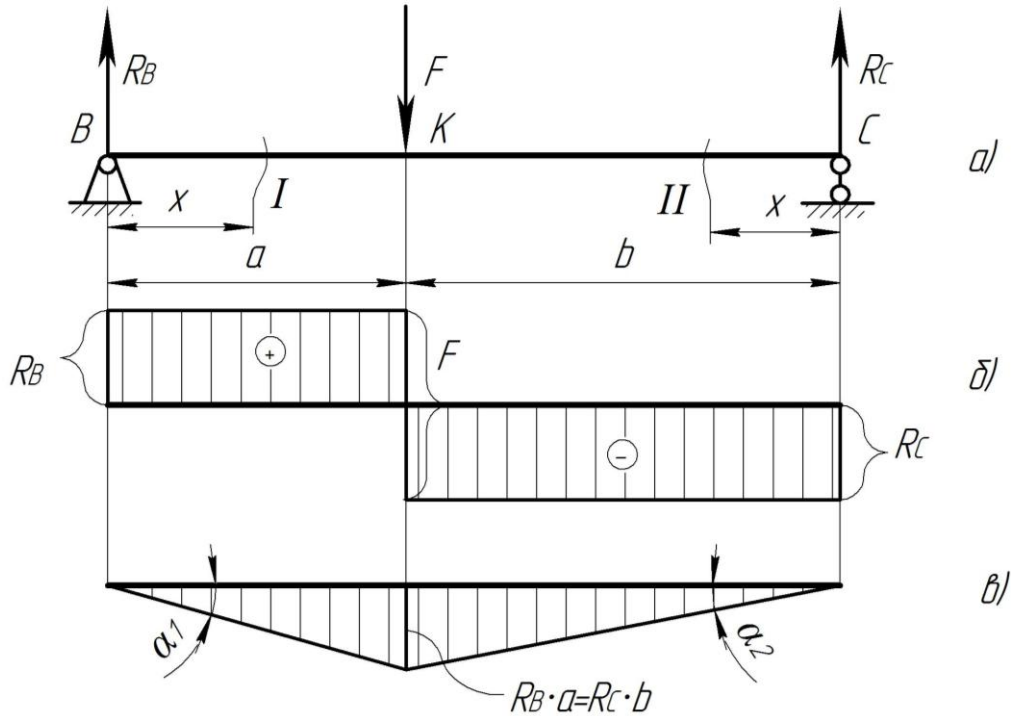


Рисунок 5.5

Використаємо перший спосіб побудови епюр. Розбиваємо балку на ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції $Q(x)$, $M_{3\Gamma}(x)$, а також границі, в яких ці функції справедливі (рис. 5.5а):

ділянка I, $0 \leq x \leq a$ (зліва)

$$Q(x) = R_B = \frac{F \cdot b}{a+b}; \quad Q(0) = Q(a) = \frac{F \cdot b}{a+b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_B \cdot x = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(a) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b};$$

ділянка II, $0 \leq x \leq b$ (справа)

$$Q(x) = -R_C = -\frac{F \cdot a}{a+b}; \quad Q(0) = Q(b) = -\frac{F \cdot a}{a+b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_C \cdot x = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(b) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b}.$$

За отриманими результатами будуюмо епюри Q і $M_{3\Gamma}$ (рис. 5.5б,в).

З епюри $M_{3\Gamma}$ (див. рис. 5.5в) визначаємо небезпечний перетин, тобто перетин, в якому діє максимальний згинальний момент, – це перетин K

$$M_{3\Gamma \max} = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b}.$$

Визначаємо значення поперечних сил, використовуючи диференціальні залежності (для перевірки):

- на першій ділянці

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_1 = Q_1 = \frac{M_{3\Gamma \max}}{a} = R_B;$$

- на другій ділянці

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = -\operatorname{tg} \alpha_2 = Q_2 = -\frac{M_{3\Gamma \max}}{b} = -R_C.$$

Приклад 2 (рис. 5.6). Використаємо другий спосіб побудови епюр Q , $M_{3\Gamma}$.

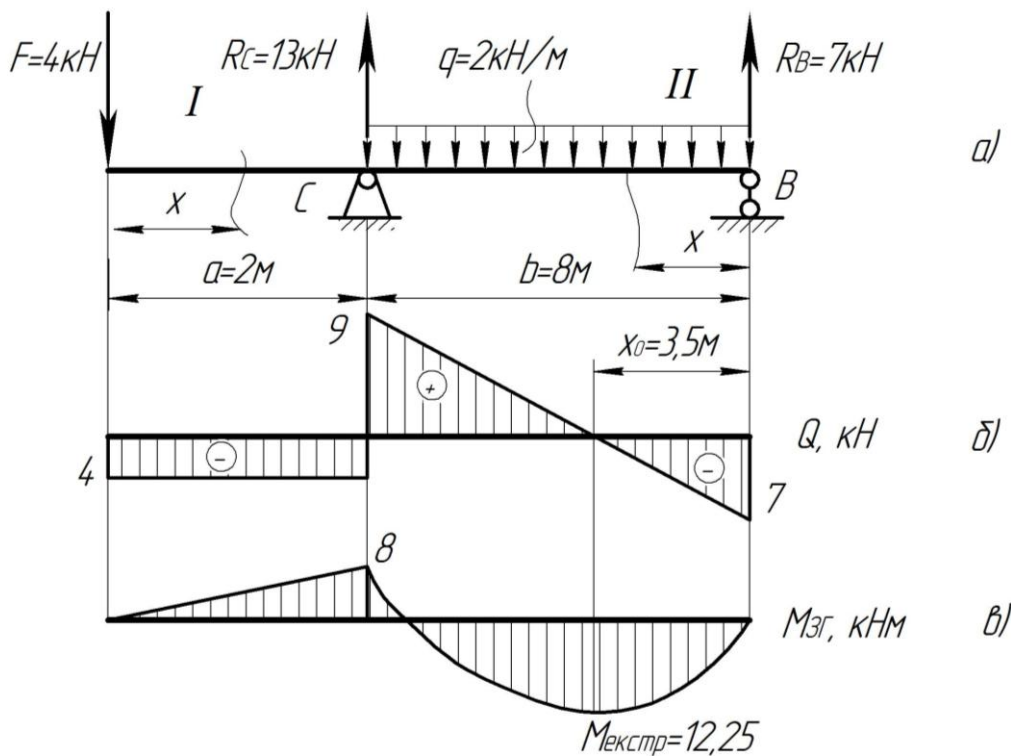


Рисунок 5.6

Аналітично визначимо величину екстремального моменту, у даному випадку – це небезпечний перетин балки.

Координата $x_0 = R_B / q = 7 / 2 = 3,5 \text{ м}$.

$$M_{3\Gamma}(x_0) = R_B \cdot x_0 - q \cdot x_0^2 / 2 = 7 \cdot 3,5 - 2 \cdot 3,5^2 / 2 = 12,25 \text{ кНм}.$$

I. Контроль правильності побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів за розрахунковою схемою балки

Для епюри поперечних сил:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра поперечних сил зображується прямою, нахиленою до осі балки.

2. На ділянці балки, вільній від q , епюра поперечних сил зображується прямою, паралельною осі балки.

3. Під перетином балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі поперечних сил є «стрибок», що дорівнює величині прикладеної сили.

4. У перетині, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), епюра поперечних сил не змінює свого значення.

Для епюри згинальних моментів:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра згинальних моментів зображується квадратичною параболою.

2. На ділянках балки, вільних від q , епюра згинальних моментів зображується прямою лінією, нахиленою до осі балки.

3. Згинальний момент досягає екстремальних значень у перетинах, де поперечні сили дорівнюють нулю.

4. Під перетином балки, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), на епюрі згинальних моментів є «стрибок», що дорівнює величині зосередженого моменту.

5. На ділянках балки, де поперечна сила дорівнює нулю, балка зазнає чистого згину, епюра згинальних моментів – пряма, паралельна осі балки.

II. Перевірка епюри згинальних моментів із використанням диференціальної залежності при згині (за епюрою Q).

Виконують перевірку за епюрою поперечних сил, використовуючи залежність

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = Q(x),$$

враховуючи, що епюра Q – це графічне зображення похідної від згинального моменту $M_{зГ}$:

1. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ зростає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – додатна.

2. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ спадає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – від'ємна.

3. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ досягає екстремального значення у точці, де її похідна $Q(x)$ дорівнює нулю. Функцію у цьому перетині обов'язково необхідно досліджувати на екстремум.

Напруження при згині. Розрахунок на міцність

Руйнівним внутрішнім силовим фактором при прямому поперечному згині є згинальний момент. Від дії згинального моменту у поперечному перетині балки виникають нормальні напруження, які визначають за формулою

$$\sigma = \frac{M_{зГ}}{I_X} \cdot y,$$

де y – відстань (координата) від осі X (нейтральної осі) до точок поперечного перетину, в яких визначають нормальне напруження (рис. 5.7а).

Аналізуючи цю формулу, отримують епюру розподілу нормальних напружень за висотою перетину (рис. 5.7б).

Максимальні нормальні напруження та умова міцності при згині за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{I_X} \cdot y_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

де $M_{зГ.\max}$ – максимальний згинальний момент, визначають з епюри $M_{зГ}$;
 W_X – осьовий момент опору поперечного перетину.

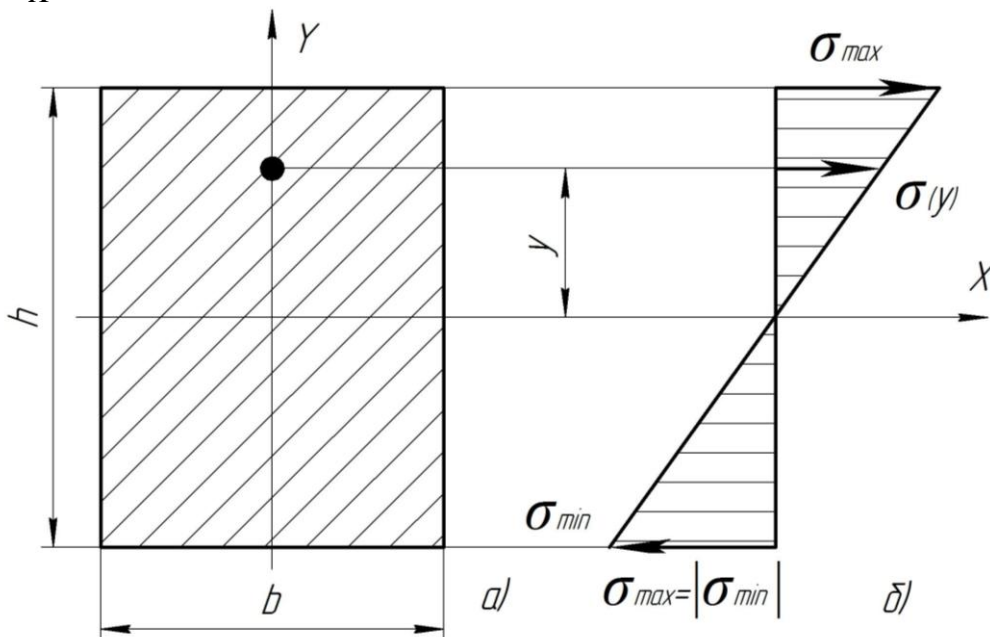


Рисунок 5.7

У поперечних перетинах балки при деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруження в результаті дії поперечної сили Q , які спричиняють деформацію зсуву. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруження виникають і в поздовжніх перетинах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напружень у поздовжніх перетинах при поперечному згині підтверджується появою в дерев'яних балках поздовжніх тріщин.

Значення дотичних напружень визначають за формулою Д.І. Журавського

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot I_X},$$

де τ – дотичне напруження в розглядуваній точці поперечного перетину;

Q_y – абсолютне значення поперечної сили в розглядуваному перетині;

$S_x(y)$ – абсолютне значення статичного момента частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки;

$b(y)$ – ширина перетину балки на рівні, де визначають дотичні напруження;

I_X – момент інерції всього перетину відносно його центральної вісі X .

Абсолютне значення статичного момента частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки визначають за формулою

$$S_x(y) = A_{відс} \cdot y^*,$$

тут $A_{відс}$ – площа відсіченої частини перетину;

y^* – віддалення (координата) центра ваги C_B площі відсіченої частини відносно центральної вісі.

Для поперечного перетину значення Q_y та I_X є сталі величини.

Залежно від форми поперечного перетину бруса ширина $b(y)$ перетину може бути змінною величиною (при наявності форми перетину функція $b(y)$ – відома). На відміну від Q_y та I_X значення статичного момента $S_x(y)$ відсіченої частини перетину має змінну величину, яка залежить від y^* .

Для балки прямокутного поперечного перетину зі сторонами b і h (рис. 5.8а)

- площа частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваного шару волокон mn

$$A_{\text{відс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right);$$

- статичний момент цієї площі (тобто на рівні mn)

$$S_{\text{адце}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Осьовий момент інерції прямокутного поперечного перетину

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

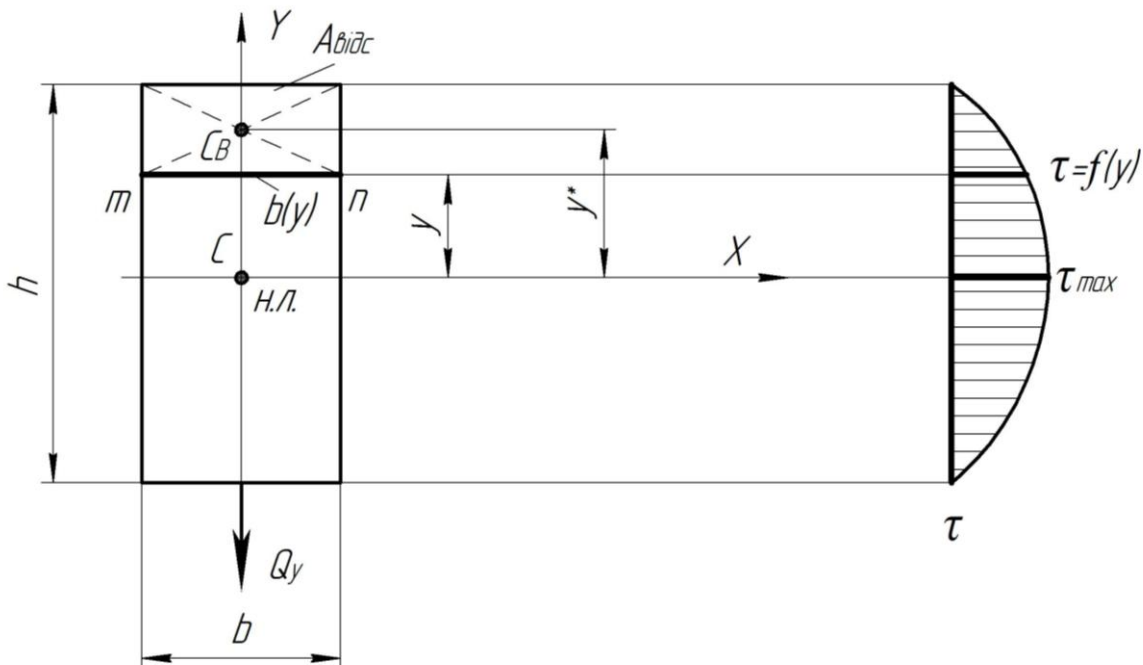


Рисунок 5.8

Визначимо закон розподілу дотичних напружень для балки прямокутного поперечного перетину. Виконаємо це для шару волокон на рівні mn (див. рис. 5.8а)

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{\text{відс}}}{b \cdot I_X} = \frac{Q \cdot (b/2) \cdot (h^2/4 - y^2)}{b \cdot b \cdot h^3/12} = \frac{6Q(h^2/4 - y^2)}{b \cdot h^3};$$

коли $y = \pm h/2$, то $\tau = 0$;

$$\text{коли } y = 0, \text{ то } \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2b \cdot h} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3}{2} \tau,$$

де τ – дотичні напруження зсуву.

Епюра дотичних напружень по висоті прямокутного перетину окреслюється **квадратичною параболою** (рис. 5.8б). Тобто у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруження дорівнюють нулю, а у волокнах нейтрального шару вони досягають максимального значення.

Отже, при згині **дотичні напруження** у балках **відповідають деформації зсуву**, у результаті чого плоскі поперечні перетини при прямому поперечному згині не залишаються плоскими, як при чистому згині, а викривляються.

Більшість балок при згині розраховують тільки за нормальними напруженнями. **За дотичними напруженнями перевіряють три види балок:**

- 1) дерев'яні балки, бо дерево погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки, наприклад, двотаврові, бо максимальні дотичні напруження обернено пропорційні ширині нейтрального шару;
- 3) короткі балки, бо при відносно невеликих згинаючому моменті і нормальних напруженнях у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруження.

Умова міцності при згині за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} \cdot S_X(y)_{\max}}{b(y) \cdot I_X} \leq [\tau],$$

де Q_{\max} – максимальна поперечна сила, визначають з епюри Q ;

$S_X(y)_{\max}$ – максимальний статичний момент площі поперечного перетину;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau] \approx 0,5 [\sigma]$.

Задача №4

Розрахунок на міцність при згині балок

Для заданої балки (рис. до задачі №4, табл. до задачі №4) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, підібрати двотавровий, круглий і прямокутний перетини (поклавши для прямокутного перетину відношення висоти до ширини $h/b = 2$) і порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю. Для двотаврової балки провести перевірку міцності за дотичними напруженнями і повну перевірку за головними напруженнями. Матеріал балок – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

План розв'язування задачі:

1. Визначити опорні реакції, записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках балки.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити перетин, в якому діє максимальний згинальний момент і максимальна поперечна сила.
3. Підібрати розміри перетинів (двотаврового, круглого, прямокутного) з умови міцності за нормальними напруженнями.
4. Порівняти вагу балок, прийнявши вагу двотаврової балки за 100%.
5. Перевірити міцність вибраної двотаврової балки за дотичними напруженнями.
6. Визначити перетин, в якому виникають найбільші головні напруження. Провести повну перевірку міцності двотаврової балки у небезпечній точці цього перетину.

Таблиця до задачі №4

№ з/п	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$l, \text{м}$	№ з/п	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$l, \text{м}$
1	2	5	9	8	6	2	4	6	10
2	3	4	5	10	7	3	3	5	8
3	4	5	8	8	8	2	5	6	10
4	5	2	4	10	9	5	6	8	8
5	4	6	7	8	0	4	5	8	10

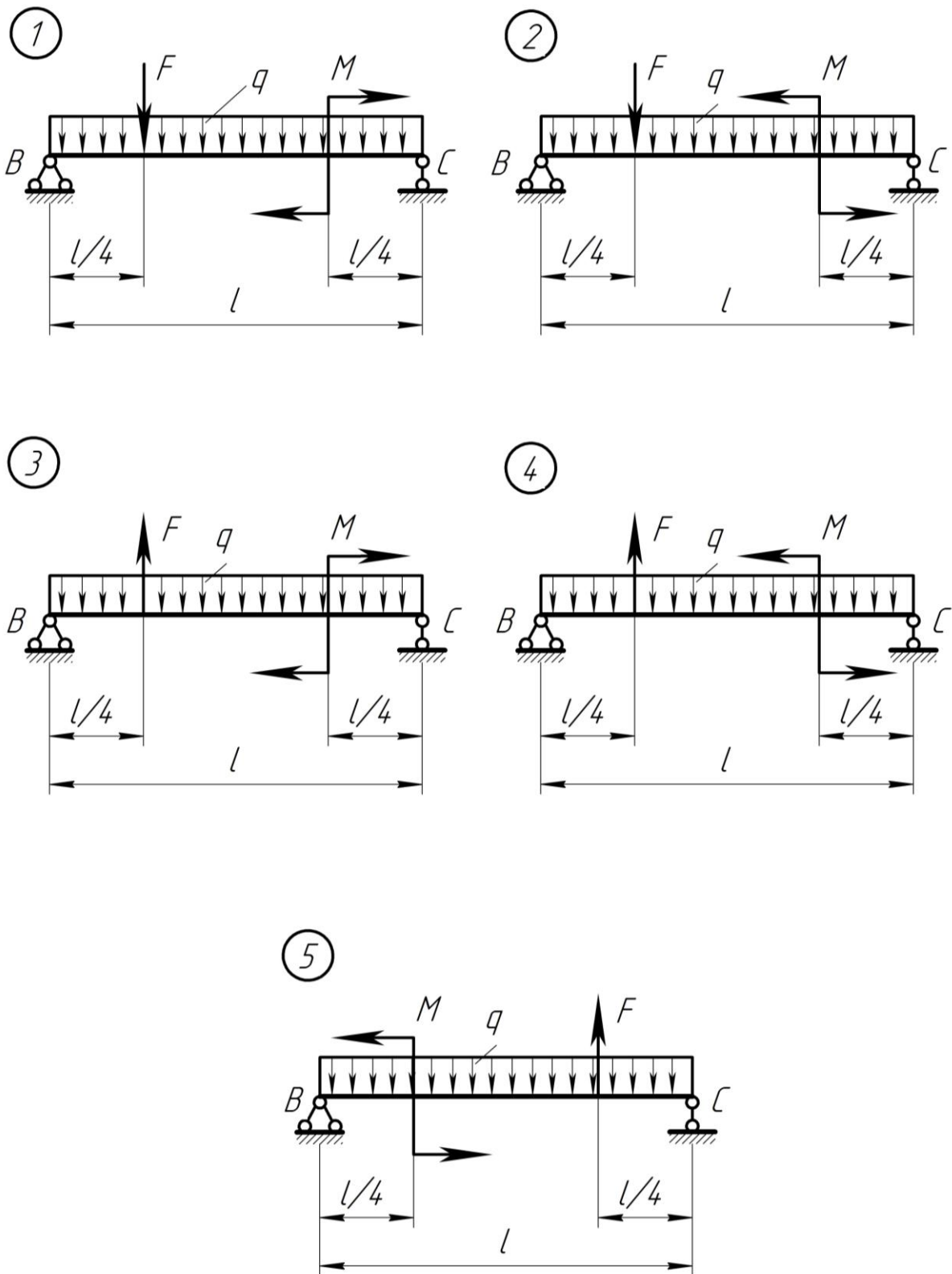


Рисунок до задачі 4

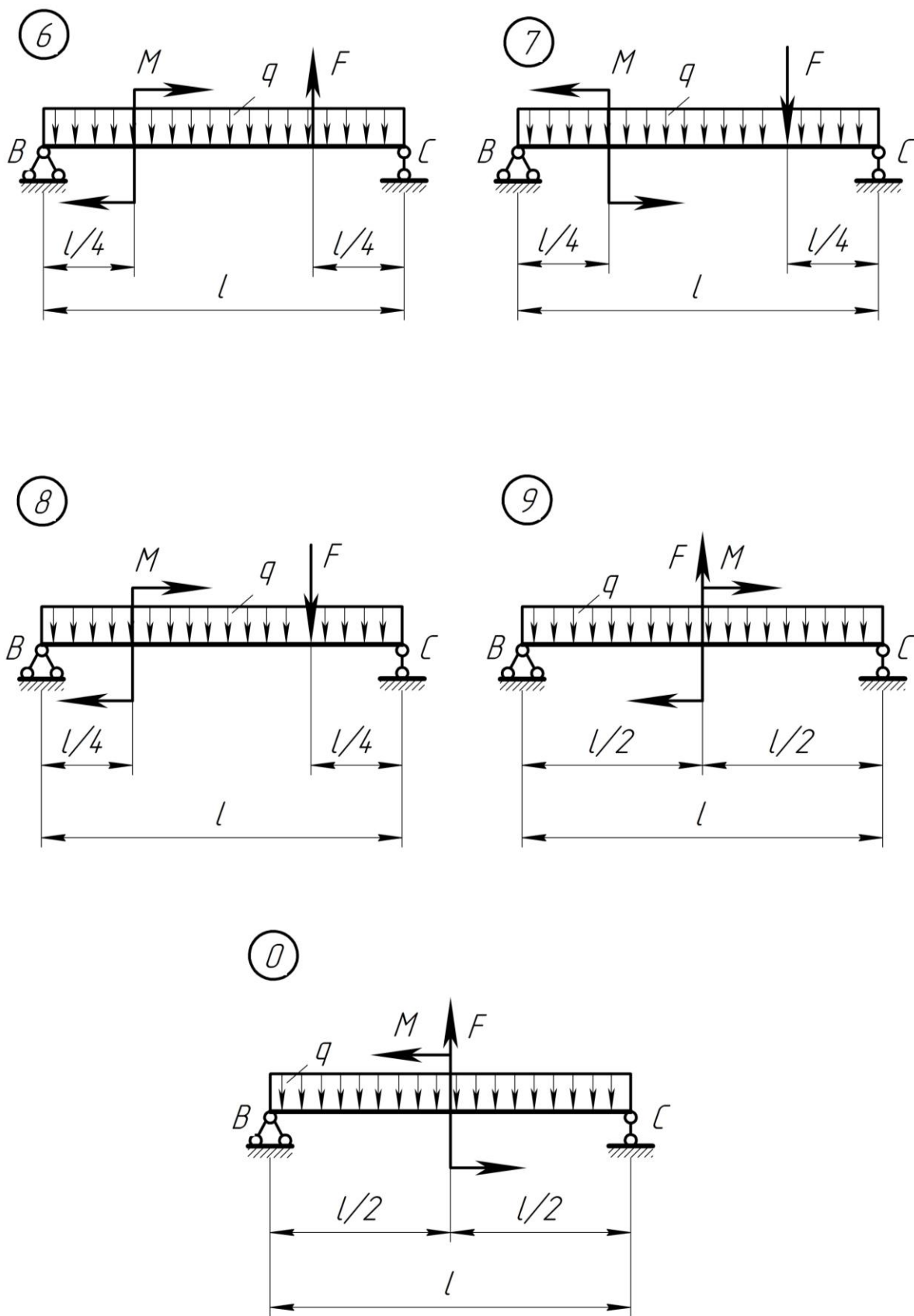


Рисунок до задачі 4 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №4

Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах. Розрахунок балки на міцність

Для заданої сталюї балки (рис. 5.9а) необхідно побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів; з умови міцності за нормальними напруженнями підібрати двотавровий, круглий і прямокутний ($h/b = 2$) перетини балок та порівняти їх вагу. Для двотаврової балки провести повну перевірку міцності та перевірку міцності за дотичними напруженнями. Матеріал балки – сталь 45; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язування

Використовуючи рівняння статичної рівноваги для заданої схеми балки (рис. 5.9б) визначаємо вертикальні складові сил реакцій:

$$\sum M_B = 0; \quad -M + A_Y \cdot 1,5 + q \cdot 1,5 \cdot 0,75 - F \cdot 2,0 = 0;$$

$$A_Y = \frac{16 - 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 2,0}{1,5} = 15,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 + B_Y \cdot 1,5 - F \cdot 3,5 = 0;$$

$$B_Y = \frac{16 + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 3,5}{1,5} = 60,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = -A_Y - q \cdot 1,5 + B_Y - F = -15,7 - 20 \cdot 1,5 + 60,7 - 15 = 0.$$

Висновок – опорні реакції визначені правильно.

Розбиваємо балку на три ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M_{зГ}(x)$:

ділянка I, $0 \leq x \leq 1,6 \text{ м}$ (зліва),

$$Q(x) = 0; \quad M_{зГ}(x) = M;$$

$$M_{зГ}(0) = M_{зГ}(1,6) = 16 \text{ кНм}.$$

ділянка II, $1,6 \text{ м} \leq x \leq 3,1 \text{ м}$ (зліва),

$$Q(x) = -A_Y - q \cdot (x - 1,6);$$

$$Q(1,6) = -15,7 \text{ кН};$$

$$Q(3,1) = -15,7 - 20 \cdot (3,1 - 1,6) = -47,5 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = M - A_Y \cdot (x - 1,6) - q \cdot \frac{(x - 1,6)^2}{2};$$

$$M_{3\Gamma}(1,6) = 16 \text{ кНм};$$

$$M_{3\Gamma}(3,1) = 16 - 15,7 \cdot (3,1 - 1,6) - 10 \cdot (3,1 - 1,6)^2 = -30 \text{ кНм};$$

ділянка III, $0 \leq x \leq 2,0 \text{ м}$ (справа),

$$Q(x) = F = 15 \text{ кН}; \quad Q(0) = Q(2,0) = 15 \text{ кНм};$$

$$M(x) = -F \cdot x; \quad M(0) = 0; \quad M(2,0) = -15 \cdot 2,0 = -30 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри Q і $M_{3\Gamma}$ (рис. 5.9в,г).

З умови міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \max}}{W_0} \leq [\sigma],$$

визначаємо необхідний осьовий момент опору перетину

$$W_0 \geq \frac{M_{3\Gamma \max}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 168 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

де $M_{3\Gamma \max} = 30 \text{ кНм}$ – максимальний згинальний момент, що діє на балку.

Для заданої балки підбираємо вказані поперечні перетини:

а) двотавровий №20а (ГОСТ 8239-56, додаток б)

$$W_{\text{дв}} = 203 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad A_{\text{дв}} = 28,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

б) прямокутний

$$W_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{3 \cdot 188 \cdot 10^{-6} / 2} = 65,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $b = 70 \text{ мм}$, тоді $h = 2 \cdot 70 = 140 \text{ мм}$,

відповідно $A_{\text{пр}} = b \cdot h = 70 \cdot 140 \cdot 10^{-6} = 98 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

в) круглий

$$W_{\text{кр}} = \pi \cdot d^3 / 32;$$

$$d \geq \sqrt[3]{32 \cdot 188 \cdot 10^{-6} / 3,14} = 124 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $d = 125 \text{ мм}$, тоді

$$A_{\text{кр}} = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 125^2 \cdot 10^{-6} / 4 = 123 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

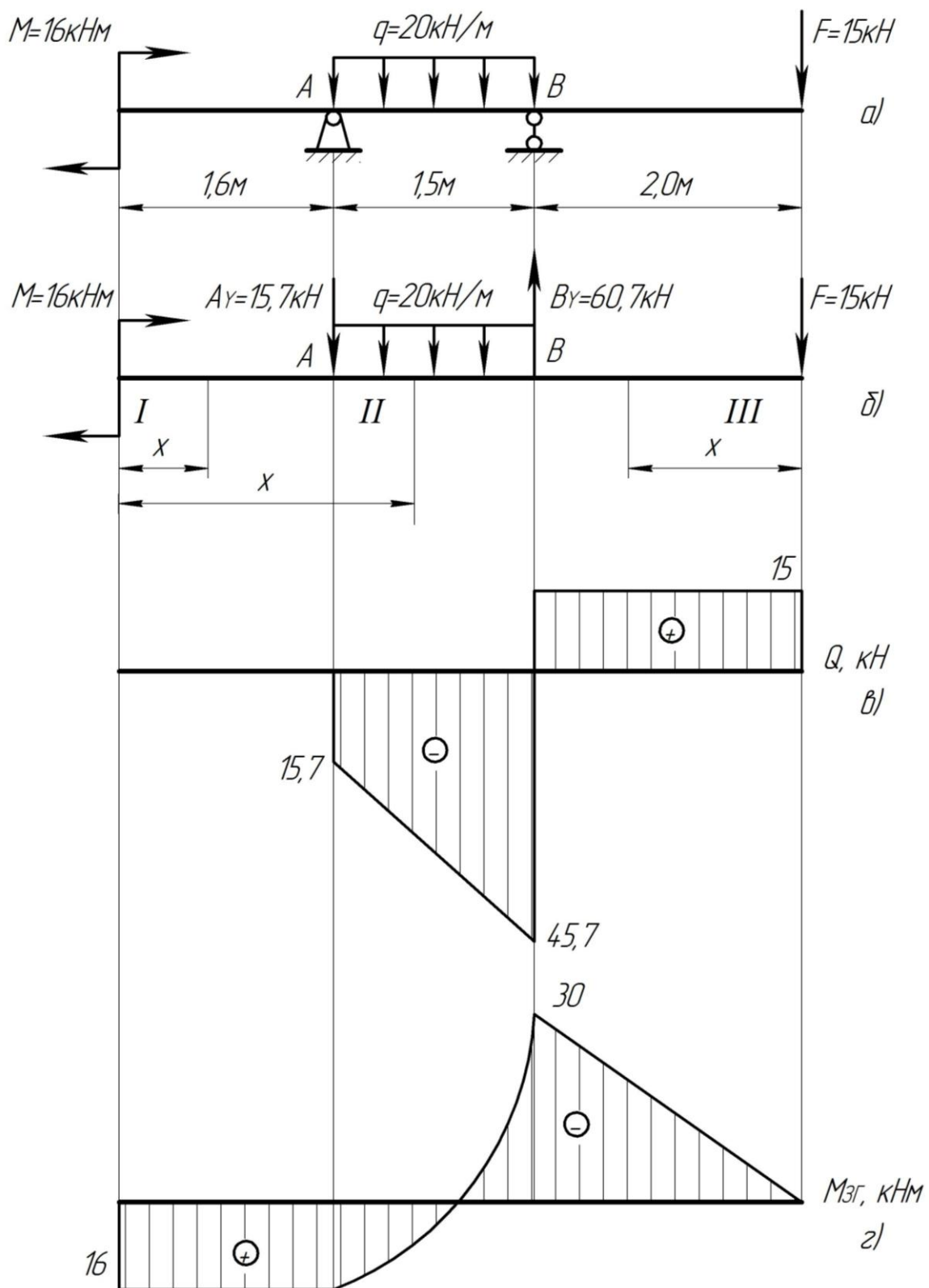


Рисунок 5.9

Порівняємо вагу балок

$$Q_{дв} : Q_{пр} : Q_{кр} = A_{дв} : A_{пр} : A_{кр} = 28,9 : 98 : 123 = 1 : 3,39 : 4,26.$$

Проводимо перевірку міцності двотаврової балки.

Враховуючи те, що розміри поперечного перетину двотаврової балки були визначені лише з умови міцності за нормальними напруженнями, то необхідно провести перевірку міцності балки за дотичними та головними напруженнями.

З таблиць сортаменту для двотавра №20а за ГОСТ 8239-72 (додаток б) виписуємо необхідні для розрахунку дані:

$$h_{дв} = 200\text{мм}; \quad b_{дв} = 110\text{мм}; \quad d_{дв} = 5,2\text{мм}; \quad t_{дв} = 8,6\text{мм};$$

$$I_X = 2030\text{см}^4; \quad S_X = 114\text{см}^3.$$

Викреслюємо спрощений перетин двотавра (рис. 5.10а).

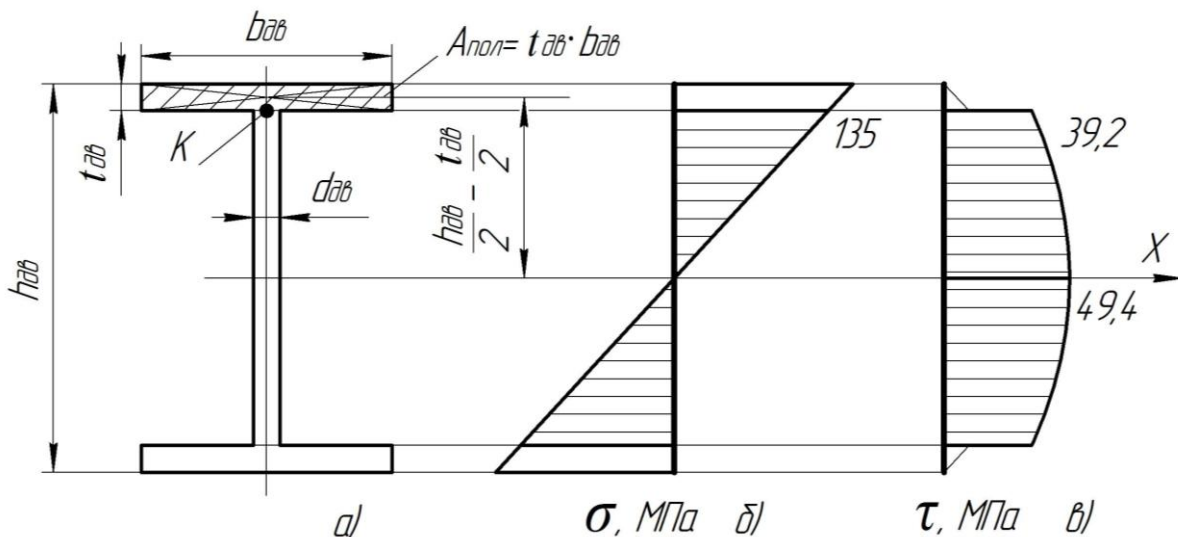


Рисунок 5.10

Небезпечний перетин при перевірці на міцність за дотичним напруженням – перетин, у якому поперечна сила має максимальне значення $Q_{\max} = 45,7\text{кН}$ (перетин у точці В (див. рис. 5.9в)).

Найбільші дотичні напруження виникають у точках перетину, що співпадають з нейтральною віссю (вісь X, див. рис. 5.10).

Умова міцності за дотичним напруженням

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_X}{d_{дв} \cdot I_X} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau] \approx 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80\text{МПа}$.

Після підстановки значень, отримаємо

$$\tau_{\max} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 49,4 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Небезпечний перетин при перевірці за головними напруженнями – перетин, у якому згинальний момент і поперечна сила набувають максимальних значень або близькі до них (перетин у точці *B*, $M_{3\Gamma \max} = 30 \text{ кНм}$, $Q_{\max} = 45,7 \text{ кН}$, див. рис. 5.9*в,г*).

Визначаємо нормальне і дотичне напруження в небезпечному перетині двотаврової балки (точка *K*, рис. 5.10*а*):

$$\sigma = \frac{M_{3\Gamma \max}}{I_X} \cdot \left(\frac{h_{\partial\partial}}{2} - t_{\partial\partial} \right) = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2030 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{200}{2} - 8,6 \right) \cdot 10^{-3} = 135 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{X_{\text{пол}}}}{d_{\partial\partial} \cdot I_X} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 90,5 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 39,2 \text{ МПа},$$

де $S_{X_{\text{пол}}}$ – статичний момент площі перетину полицки двотавра відносно осі *X*, визначаємо за формулою

$$S_{X_{\text{пол}}} = A_{\text{пол}} \cdot \left(\frac{h_{\partial\partial}}{2} - \frac{t_{\partial\partial}}{2} \right) = \frac{b_{\partial\partial} \cdot t_{\partial\partial} \cdot (h_{\partial\partial} - t_{\partial\partial})}{2}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$S_{X_{\text{пол}}} = \frac{110 \cdot 8,6 \cdot (200 - 8,6) \cdot 10^{-9}}{2} = 90,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Тут $A_{\text{пол}}$ – площа полицки двотавра, $A_{\text{пол}} = t_{\partial\partial} \cdot b_{\partial\partial}$.

Будуємо епюри нормальних і дотичних напружень для двотаврового перетину (рис. 5.10*а,б,в*).

Визначаємо розрахункове напруження за третьою теорією міцності та проводимо перевірку на міцність матеріалу за головним напруженням:

$$\sigma_{P3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{135^2 + 4 \cdot 39,2^2} = 156 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P3} = 156 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Отже, міцність балки за головним і дотичним напруженнями забезпечена.

6. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ

Загальні поняття

Статично невизначувані системи – це системи, в яких реакції в'язей та внутрішні зусилля неможливо визначити тільки з рівнянь рівноваги.

Такі системи (конструкції) найпоширеніші, бо вони є надійнішими та жорсткішими порівняно зі статично визначуваними.

Статично визначувану (ізостатичну) балку чи раму можна перетворити у статично невизначувану (гіперстатичну) встановивши додаткову (зайву з точки зору рівноваги системи) опору. Переваги такої системи: навантаження на неї можна збільшити не міняючи перетин балки, при пошкодженні однієї із опор в ізостатичній системі вона перетворюється в механізм, тоді як гіперстатична система залишається нерухомою, здатною сприймати навантаження, тобто є безпечнішою. У багатьох випадках статично невизначувані системи є єдиною можливим варіантом конструкції.

Переваги статично невизначуваних систем: зменшують пружні переміщення; збільшують жорсткість і стійкість елементів системи; значно зменшують робочі напруження у їх перетинах; економічно доцільніші, бо при тих же розмірах перетинів можуть нести більше навантаження; при втраті деяких «зайвих» зв'язків зберігають нерухомість та геометричну незмінність; мають вищу надійність, більшу монолітність та зв'язність елементів у роботі; здатність перерозподіляти навантаження між елементами у разі пошкодження або ослаблення деяких з них (у випадку осадки однієї чи декількох опор).

Недоліки: у них виникають температурні напруження, а також монтажні - у випадку зміни їх розмірів відносно проектних.

Особливості: реакції опор і внутрішні зусилля в елементах залежать від жорсткостей поперечних перетинів стержневої системи; неможливо забезпечити однакові запаси міцності у всіх елементах, тобто одні елементи можуть бути недовантаженими, інші – навпаки, що вимагає оптимального їх проектування.

Основні методи розкриття статичної невизначеності систем

Оскільки невідомих зусиль більше, ніж рівнянь рівноваги, то статичну невизначеність системи можна розкрити лише за допомогою додаткових рівнянь. Ці рівняння повинні відображати особливості геометричних зв'язків, що накладені на стержневу систему. Складають такі рівняння за допомогою уявлення та зображення картини переміщень перетинів елементів конструкції при її деформуванні, тому їх називають – **рівняннями сумісності переміщень** (деформацій).

Методи розрахунку статично невизначуваних систем класифікують залежно від того, що приймають за невідомі величини. Якщо за невідомі прийняті переміщення, то метод розрахунку називають **методом переміщень**,

якщо невідомі прийняті зусилля, то метод їх розрахунку – *метод сил*. Якщо невідомими є частково сили, частково переміщення, то метод розрахунку – *змішаний*.

Метод переміщення, у якому за невідомі у рівняннях статички прийняті лінійні та кутові переміщення жорстких вузлів стержневої системи виник у 1880 році, метод сил відомий з 1807 року.

У курсах опору матеріалів частіше застосовують метод сил.

Метод сил

Розрахунок статично невизначуваної системи починають з її аналізу. Це необхідно для визначення ступеня статичної невизначеності. **Ступінь статичної невизначеності** дорівнює числу зайвих зв'язків, відкидання яких перетворює невизначувану систему в статично визначену (основну), геометрично незмінну. Термін «зайвий зв'язок» потрібно розуміти як «додатковий зв'язок», а не як «непотрібний зв'язок».

На рис. 8.1а зображена статично невизначена балка.

На дану балку накладено чотири зв'язки X_1, X_2, X_3, X_4 . Для плоскої системи сил можемо скласти тільки **три рівняння статички**, тому ця балка $4 - 3 = 1$ раз статично невизначувана. Як «зайвий зв'язок» приймаємо X_1 , тоді балка (рис. 6.1б) є статично визначеною (основною).

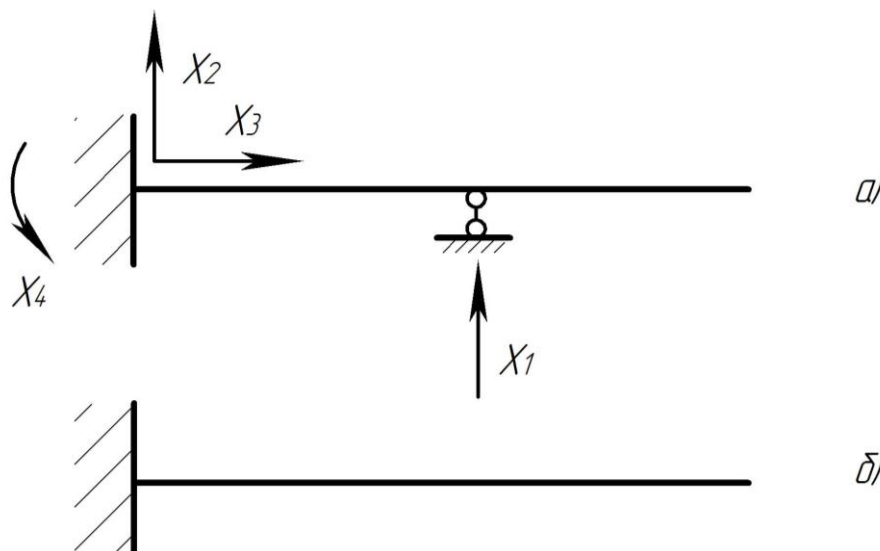


Рисунок 6.1

На рис. 6.2а зображена плоска рама. Ця система $5 - 3 = 2$ рази статично невизначувана.

Відкинувши «зайві зв'язки» X_1 та X_2 , перетворимо статично невизначувану систему в статичну визначувану, геометрично незмінну, (рис. 6.2б).

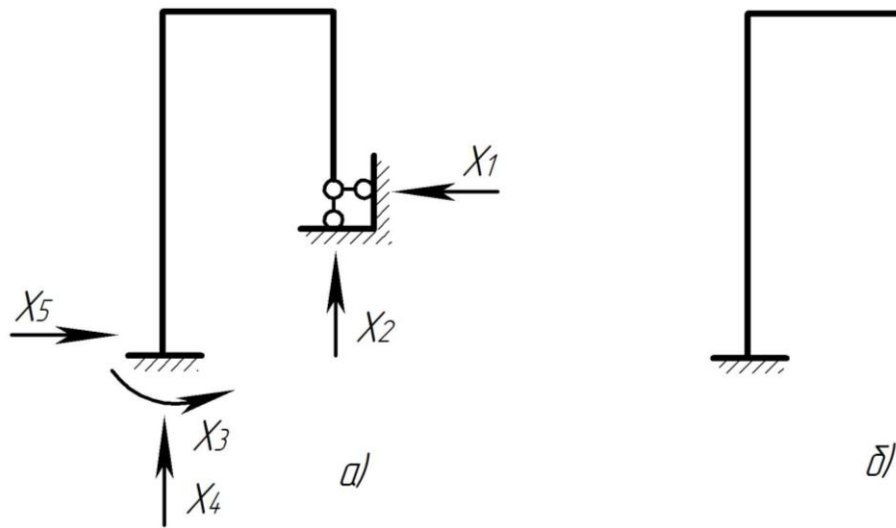


Рисунок 6.2

Статично визначувану, геометрично незмінну систему, утворену зі статично невизначуваної, називають **основною системою**. На рис. 6.1б зображена основна система.

В основу методу сил покладено *принцип незалежності дії сил*.

Порядок розрахунку статично невизначуваних систем за методом сил:

1. **Встановлення ступеня статичної невизначуваності системи** (див. рис. 6.1, 6.2).

2. **Вибір основної системи** шляхом відкидання зайвих зв'язків. Основна система має бути статично визначуваною, нерухомою та геометрично незмінною і після прикладання навантаження. Для кожної заданої системи можна вибрати кілька основних, тому доцільно вибрати оптимальну, що значно спрощує подальші розрахунки.

3. **Формування еквівалентної системи**. Штучні зміни у статично невизначуваній заданій системі при переході до основної системи повинні бути компенсовані введенням відповідних узагальнених невідомих зусиль, прикладених замість відкинутих зв'язків. У перетинах, де неможливі лінійні переміщення, прикладають зосереджені сили, а там, де заборонені кутові переміщення, вводять моменти. Ці невідомі, поки що, зусилля, позначають X_i , де i – номер невідомого зайвого зусилля. Тобто, заміною відкинутих зайвих зв'язків зусиллями X_i та прикладанням зовнішнього навантаження формують «еквіваленту» систему. При переході до неї має бути збережена силова схема заданої гіперстатичної системи та її деформаційна схема, тобто еквівалентна система повинна деформуватися так само, як і задана гіперстатична. Ці вимоги можуть бути сформульовані у вигляді так званих умов нерозривності або *сумісності деформацій*.

напрямку реакції цієї в'язі під дією заданого навантаження та всіх невідомих сил.

Загальна кількість рівнянь сумісності переміщень дорівнює кількості невідомих зусиль (відкинутих зайвих зв'язків), тобто ступеню статичної невизначуваності заданої системи.

5. Обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь. Ці переміщення доцільно визначати за допомогою формул енергетичного методу (інтегралом Мора).

При визначенні δ_{ij} та Δ_{iF} вирази для жорсткості EI елементів системи доцільно залишати у загальному (а не числовому) вигляді, щоб спростити канонічні рівняння та скоротити розрахунки.

Для того, щоб визначити вільні члени системи рівнянь (6.2), тобто повні переміщення Δ_{iF} , необхідно побудувати епюри, зумовлені дією зовнішніх сил. Краще будувати ці епюри від кожної сили окремо. Перемноженням цих реальних епюр на відповідні одиничні визначають величину переміщень Δ_{iF} .

6. Визначення невідомих зусиль із системи канонічних рівнянь.

7. Розрахунки на міцність, жорсткість та стійкість можна вести аналогічно тому, як це роблять у випадку статично визначуваних систем. **Визначення сумарних згинальних моментів та інших внутрішніх силових факторів у перетинах ведуть на основі принципу незалежності дії сил класичним методом перетинів або способом складання відповідних епюр.**

При визначенні реальних переміщень окремих перетинів системи до основної системи потрібно прикласти одичну силу, побудувати епюру згинальних моментів від цієї сили та перемножити її на сумарну епюру від зовнішнього навантаження. Щоб не ділити сумарну епюру на прості ділянки, можна перемножити одичну епюру на окремі реальні епюри від дії кожної сили і додати результати. **Переміщення характерних перетинів** (закріплень на опорах) **визначають для перевірки вірності всіх попередніх розрахунків статично невизначуваної системи.**

Метод мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД)

При розгляді статично невизначуваних рамних конструкцій, враховуючи адитивність (безперервність) функції потенціальної енергії деформації, можна записати вираз повної потенціальної енергії деформації конструкції

$$U = U_M + U_K + U_Q + U_N, \quad (6.3)$$

де U_M – потенціальна енергія деформації згину елементів рами,

$$U_M = \sum \int \frac{[M(x)]^2}{2EI_0} dx;$$

U_K – потенціальна енергія деформації кручення,

$$U_K = \sum \int \frac{[K(x)]^2}{2GI_p} dx;$$

U_Q – потенціальна енергія деформації зсуву,

$$U_Q = \sum \int \frac{[Q(x)]^2}{2GA} dx;$$

U_N – потенціальна енергія деформації розтягу (стиску)

$$U_N = \sum \int \frac{[N(x)]^2}{2EA} dx,$$

тут E і G – відповідно модулі пружності та зсуву;

I – осьовий момент інерції поперечного перетину;

I_p – полярний момент інерції поперечного перетину;

A – площа поперечного перетину;

$M(x)$ – функції згинального моменту;

$K(x)$ – функції крутного моменту;

$Q(x)$ – функції поперечних сил;

$N(x)$ – функції розтягуючих (стискаючих) сил.

У цих формулах інтегрування проводять вздовж елементів рами (балки).

Формула (6.3) та її складові є **основними виразами потенціальної енергії деформації при розкритті статичної невизначуваності будь-яких систем.**

Використовуючи теорему Кастиліано $\partial U / \partial X_i = 0$, складають систему рівнянь і визначаємо значення зайвих невідомих.

При розрахунках рамних конструкцій потенціальними енергіями від нормальних і поперечних сил нехтують, враховуючи лише потенціальні енергії від згинального моменту та кручення.

Задача №5

Розрахунок статично невизначуваної рами

Для заданої статично невизначуваної рами (рис. до задачі №5, табл. до задачі №5) розкрити статичну невизначеність методом сил та перевірити отриманий результат методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД). Побудувати епюри поперечних та осьових сил, згинальних моментів. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами. Підібрати двотавровий перетин, якщо $[\sigma]=160\text{МПа}$; $a=1\text{м}$; $q=20\text{кН/м}$; $EI = \text{const}$. З двох зв'язків (1 і 2) залишити той, що вказаний у табл. 5.

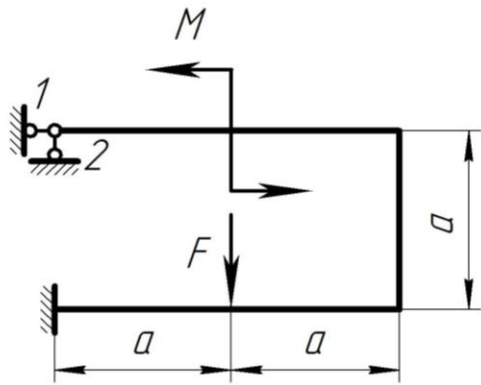
План розв'язування задачі:

1. Вибрати основну систему і побудувати епюри згинальних моментів від зовнішніх та одиничних навантажень в основній системі.
2. Записати канонічне рівняння методу сил.
3. Визначити коефіцієнт δ_{11} і вільний член $\Delta_1(F)$ канонічного рівняння.
4. Розв'язати канонічне рівняння.
5. Перевірити правильність розкриття статичної невизначеності ММПЕД.
6. Записати функції осьових N , поперечних Q сил і згинальних моментів M на ділянках рами.
7. Побудувати епюри N , Q , M для еквівалентної системи.
8. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами.
9. Визначити небезпечний перетин рами і підібрати двотавровий перетин з умови міцності за нормальними напруженнями, що виникають від згину.

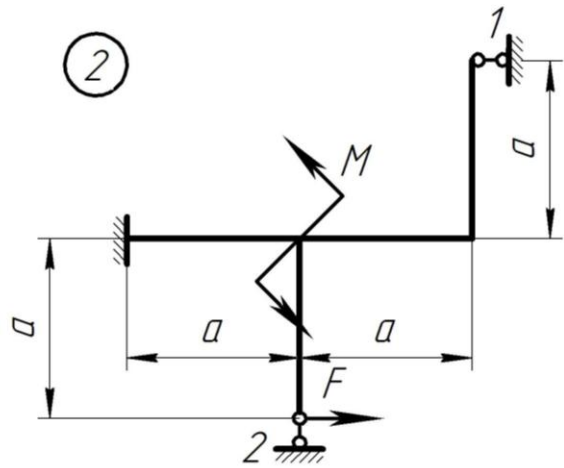
Таблиця до задачі №5

№ з/п	F , кН	M , кНм	№ зв'язку
1	qa	Fa	1
2	$2qa$	qa^2	2
3	$3qa$	Fa	1
4	qa	qa^2	2
5	$2qa$	Fa	1
6	$3qa$	qa^2	2
7	qa	Fa	1
8	$2qa$	qa^2	2
9	$3qa$	Fa	1
0	qa	qa^2	2

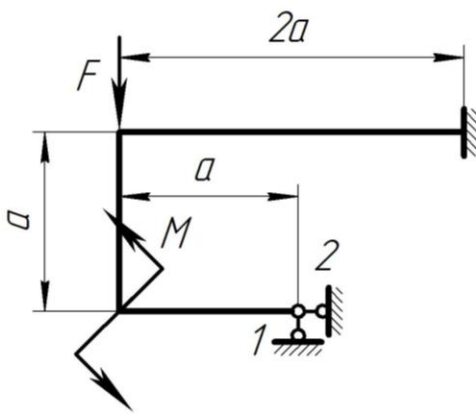
1



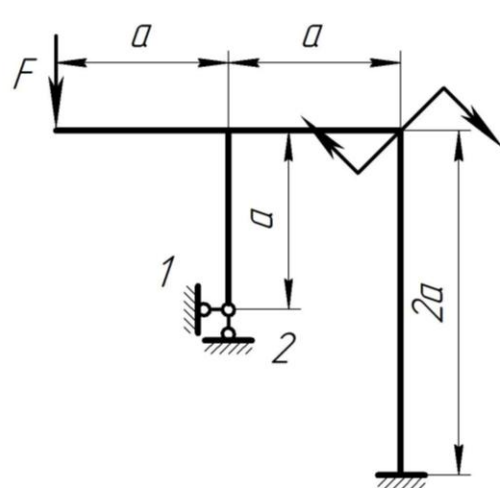
2



3



4



5

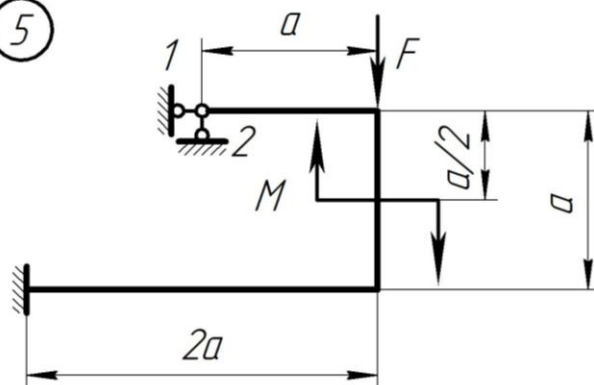


Рисунок до задачі №5

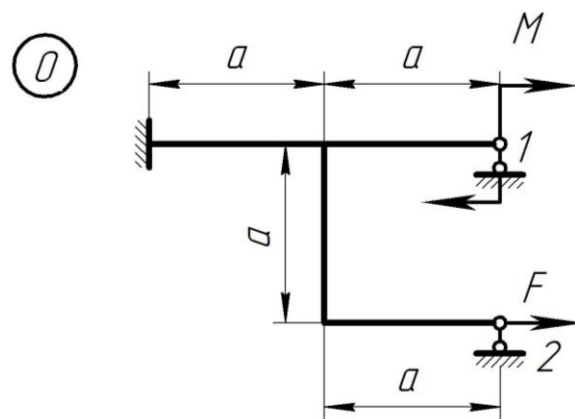
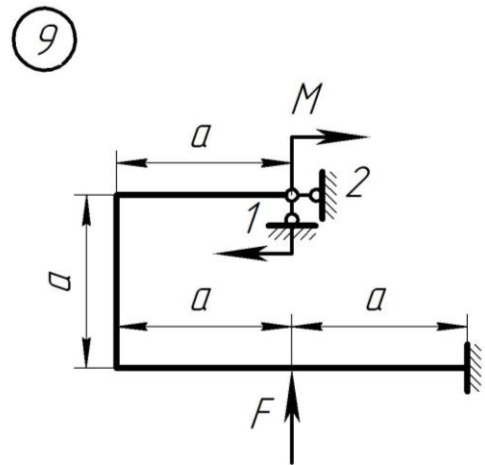
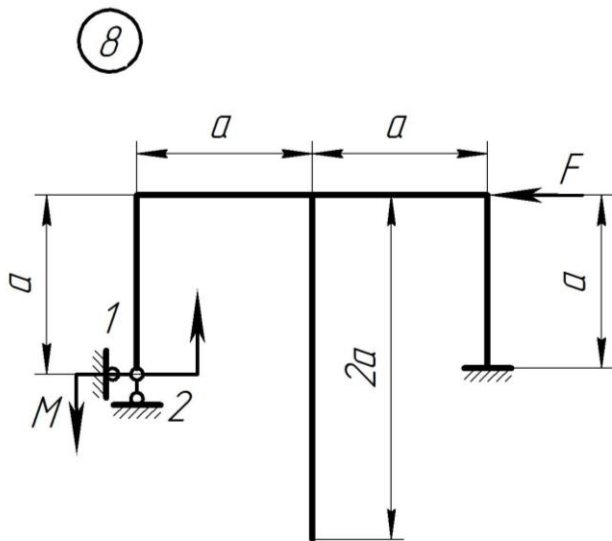
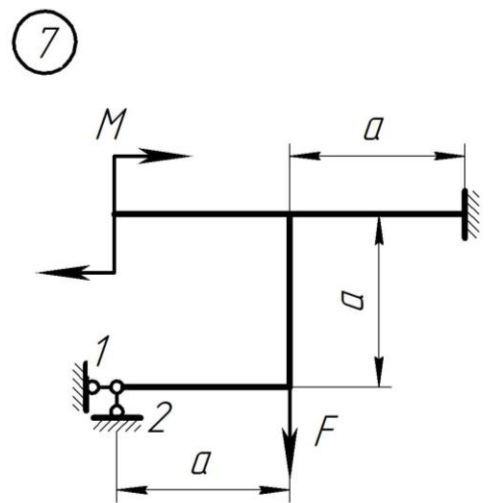
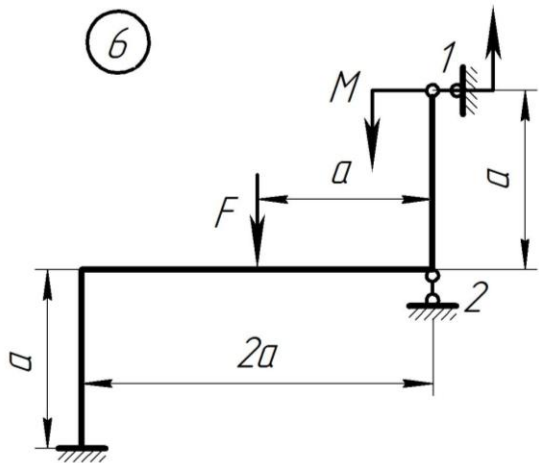


Рисунок до задачі №5 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №5 методом сил

Для заданої статично невизначуваної рами (рис. 6.3а) розкрити статичну невизначеність методом сил та перевірити отриманий результат методом мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД). Побудувати епюри поперечних та осьових сил, згинальних моментів. Провести статичну перевірку будь-якого вузла рами. Підібрати поперечний перетин, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$; $F = 40 \text{ кН}$; $M = 60 \text{ кН/м}$; $EI = \text{const}$.

Розв'язування

Задана рамна конструкція (див. рис. 6.3а) $4-3=1$ раз статично невизначена. Статичну невизначеність розкриваємо методом сил. Як «зайву» невідому приймаємо X_1 . Основна система показана на рис. 8.3б.

Записуємо канонічне рівняння методу сил

$$X_1 \cdot \delta_{11} = -\Delta_1(F).$$

Переміщення (коефіцієнт) δ_{11} і вільний член рівняння $\Delta_1(F)$ визначаємо графоаналітичним способом розв'язку інтегралу Мора.

Навантажуюємо основну систему одиничною силою (рис. 6.3в). Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили (рис. 6.3г). Визначаємо

$$EI \cdot \delta_{11} = \omega_1 \cdot \overline{M}_{C1},$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2; \quad \overline{M}_{C1} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Тоді

$$EI \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Щоб визначити вільний член рівняння $\Delta_1(F)$ до основної системи прикладаємо зовнішнє навантаження (рис. 6.3д). Будуємо епюру згинальних моментів від навантажень (рис. 6.4е). Запишемо рівняння

$$EI \cdot \Delta_1(F) = \omega_2 \cdot \overline{M}_{C2} - \omega_3 \cdot \overline{M}_{C3},$$

$$\text{де } \omega_2 = 40 \cdot 1 = 40; \quad \omega_3 = 20 \cdot 1 = 20; \quad \overline{M}_{C2} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \overline{M}_{C3} = 1,5.$$

Тоді

$$EI \cdot \Delta_1(F) = 40 \cdot 0,5 - 20 \cdot 1,5 = -10.$$

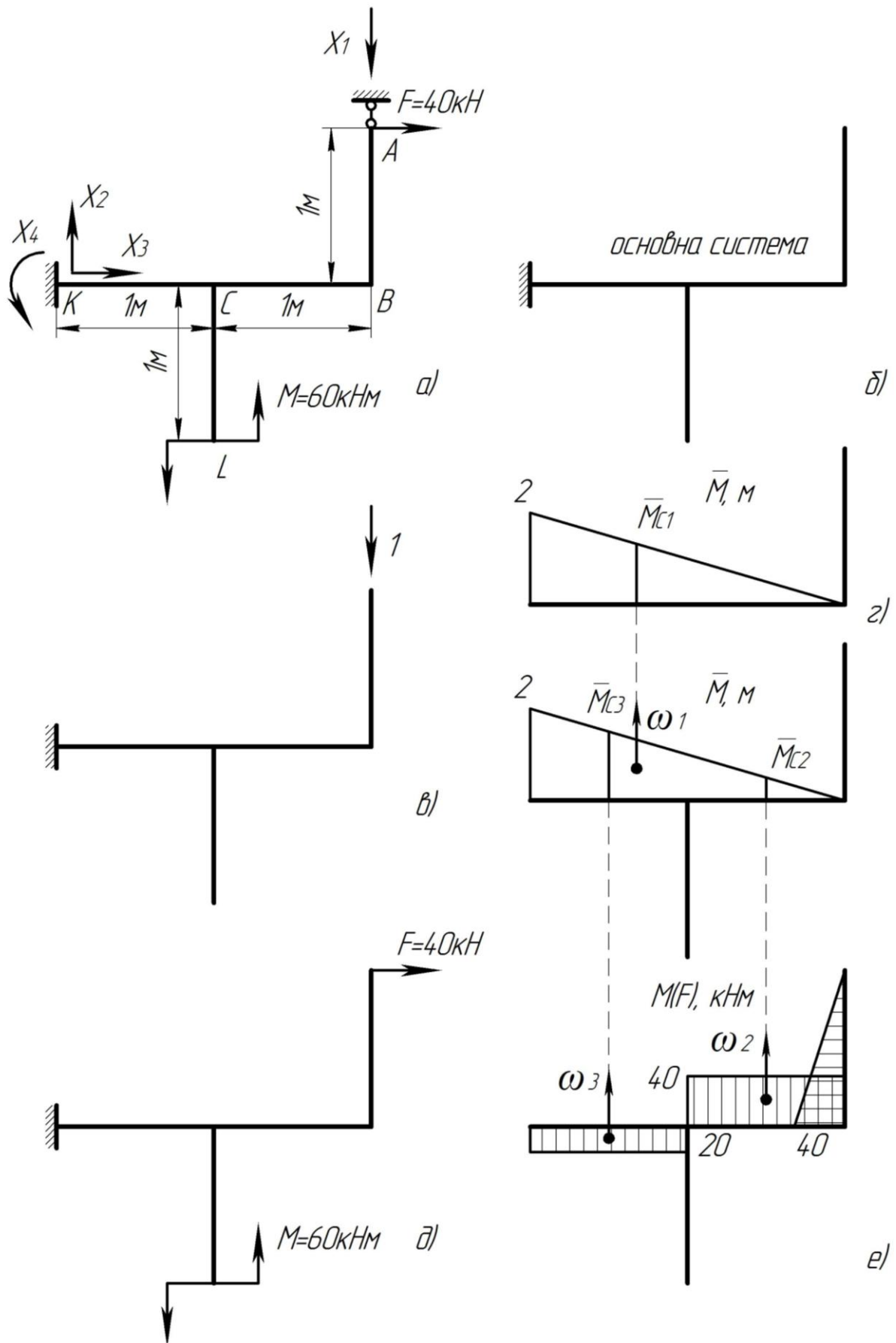


Рис. 6.3

Розв'язуємо канонічне рівняння методу сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_1(F)}{\delta_{11}} = -\frac{(-10) \cdot 3}{8} = 3,75 \text{кН}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що напрям сили реакції X_1 , вибрано вірно.

Викреслюємо еквівалентну систему (рис. 6.3Ж). **Еквівалентна система** – це основна система, завантажена зовнішнім навантаженням і визначеними силами реакцій, тобто **задана початкова система з визначеними реакціями**.

Розбиваємо раму на ділянки. Визначаємо значення внутрішніх силових факторів для кожної з них. На схемі (див. рис. 6.3Ж) на контурі рами проставлені знаки «плюс» – для додатних значень згинальних моментів. Вважаємо згинальний момент додатним, якщо він розтягує нижні волокна. Записуємо функції осьових N , поперечних сил Q та згинального моменту M на ділянках рами.

Ділянка AB , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= -X_1 = -3,75 \text{кН}; & N_A &= N_B = -3,75 \text{кН}; \\ Q(x) &= F = 40 \text{кН}; & Q_A &= Q_B = 40 \text{кН}; \\ M_{3Г}(x) &= -F \cdot x = -40x; & M_{3ГА} &= 0; \quad M_{3ГВ} = -40 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка BC , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= F = 40 \text{кН}; & N_B &= N_C = 40 \text{кН}; \\ Q(x) &= X_1 = 3,75 \text{кН}; & Q_B &= Q_C = 3,75 \text{кН}; \\ M_{3Г}(x) &= -F \cdot 1 - X_1 \cdot x = -40 - 3,75x; \\ M_{3ГВ} &= -40 \text{кНм}; & M_{3ГС} &= -43,75 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка LC , $0 \leq x \leq 1\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= 0; & N_L &= N_C = 0; \\ Q(x) &= 0; & Q_L &= Q_C = 0; \\ M_{3Г}(x) &= M = -60 \text{кНм}; & M_L &= M_C = -60 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Ділянка CK , $1\text{м} \leq x \leq 2\text{м}$:

$$\begin{aligned} N(x) &= F = 40 \text{кН}; & N_C &= N_K = 40 \text{кН}; \\ Q(x) &= X_1 = 3,75 \text{кН}; & Q_C &= Q_K = 3,75 \text{кН}; \\ M_{3Г}(x) &= -F_1 \cdot 1 - X_1 \cdot 1 - X_1 \cdot x + M = -40 - 3,75 - 3,75 \cdot x + 60 = 16,25 - 3,75x; \\ M_{3ГС} &= 16,25 \text{кНм}; & M_{3ГК} &= 12,5 \text{кНм}. \end{aligned}$$

За отриманими результатами будуємо епюри N , Q та $M_{3Г}$ (рис. 6.3з,к,л).

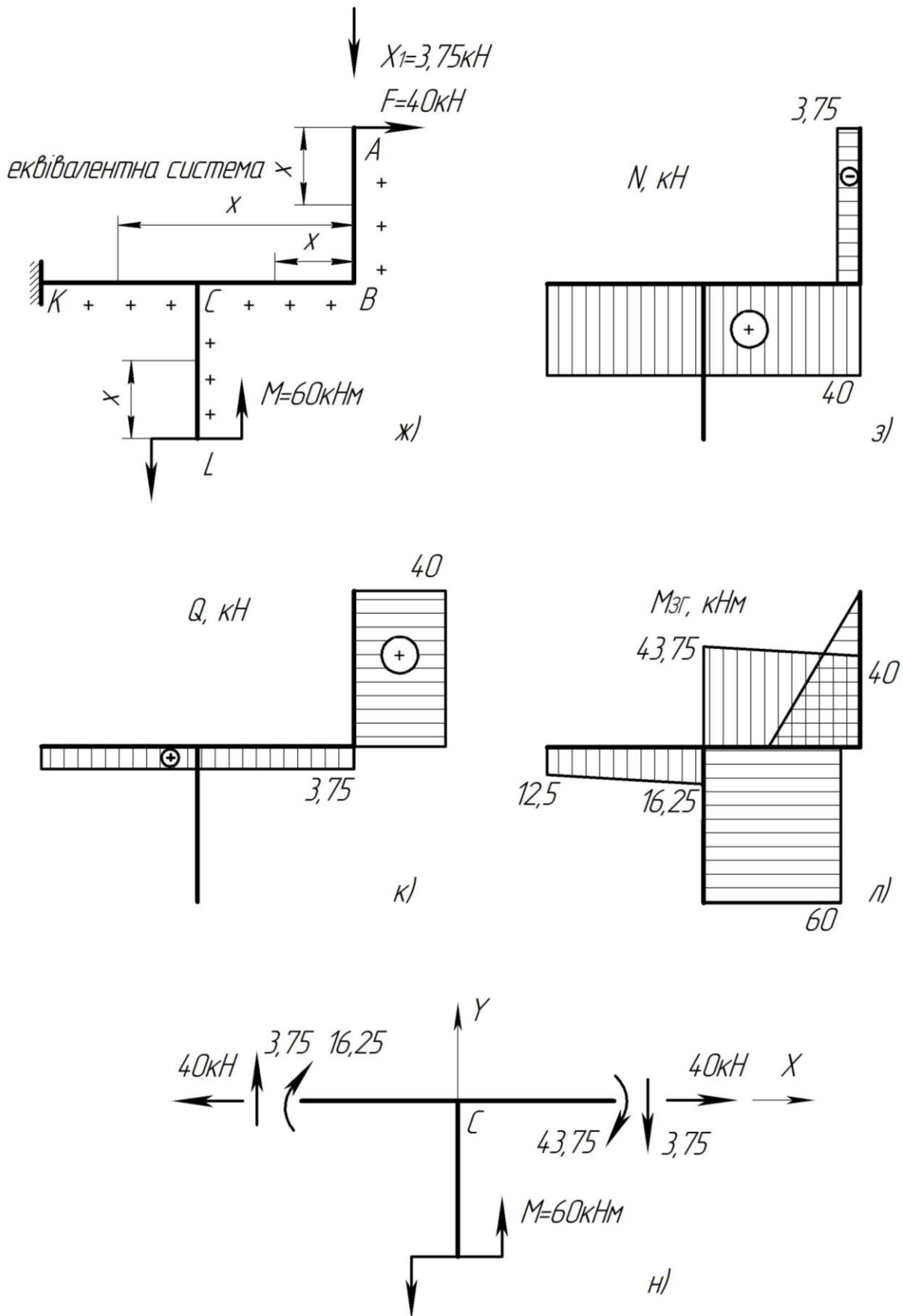


Рис. 6.3 (закінчення)

Проводимо перевірку розкриття статичної невизначеності.
Статична перевірка. Розглядаємо рівновагу вузла *C* (рис. 6.3н):
Записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iX} = F - Q_A = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = -X_1 + N = -3,75 + 3,75 = 0;$$

$$\sum M_{iC} = 60 - 16,25 - 43,75 = 0.$$

З епюри згинальних моментів (див. рис. 6.3л) визначаємо

$$M_{3Г.маx} = 60 \text{кНм}.$$

Щоб підібрати перетин рами, з умови міцності на згин за нормальними напруженнями, визначаємо осьовий момент опору одного швелера

$$W_0 = \frac{M_{3Г.маx}}{2[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 160} = 187,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

приймаємо швелер №22а (ГОСТ 8240-72, додаток 7), для якого $W_0 = 192 \text{ см}^3$.

7. СУМІСНА ДІЯ ЗГИНУ З КРУЧЕННЯМ

Сумісна дія згину з крученням – вид складного опору, при якому зовнішні сили, що діють на брус, викликають у ньому такі внутрішні силові фактори: *крутний момент, згинальні моменти й поперечні сили*.

Під дією згину та кручення у поперечному перетині бруса виникають нормальні напруження від згинального моменту в двох площинах і дотичні напруження від кручення й поперечних сил.

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів (прямих брусів круглого або кільцевого перетину).

При розрахунку валів враховують крутний і згинальний моменти. Поперечні сили не враховують, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

При сумісній дії згину та кручення елемент матеріалу в небезпечному перетині перебуває у плоскому напруженому стані (рис. 7.1).

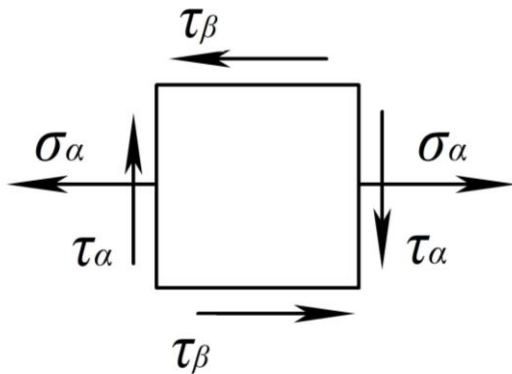


Рисунок 7.1

Максимальні нормальні й дотичні напруження для круглих валів визначають за формулами

$$|\sigma_{\alpha}| = \frac{M_{3\Gamma}}{W_0} = \frac{32M_{3\Gamma}}{\pi \cdot d^3};$$

$$|\tau_{\alpha}| = \frac{M_{KP}}{W_P} = \frac{16M_{KP}}{\pi \cdot d^3},$$

де $W_P = W_0/2$;

$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$, закон парності дотичних напружень.

Найбільшого значення нормальні й дотичні напруження досягають на поверхні вала.

Для визначення згинального моменту розглядають згин вала у двох взаємно перпендикулярних площинах (вертикальній і горизонтальній). Будують епюри згинальних моментів у двох площинах і сумарну. Значення згинальних моментів у характерних перетинах зводять до сумарного (рівнодійного) за формулою

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}.$$

Небезпечні перетини вала визначають співставленням епюр сумарних згинальних моментів і крутного моменту. Небезпечними є перетини, де $M_{3\Gamma}$ і M_{KP} одночасно досягають найбільших значень.

При одночасній дії нормальних і дотичних напружень міцність матеріалу оцінюють за однією з теорій міцності.

Теорії міцності застосовують за призначенням, тобто перша і друга теорії – для крихких матеріалів, третя і четверта – для пластичних; теорії Мора та Писаренка-Лебедева – для матеріалів з різними границями текучості при розтягу і стиску.

Розрахунок вала на міцність при складному опорі проводять за зведеним (еквівалентним, розрахунковим) **моментом** M_P ($M_{екв}$).

Визначають його залежно від прийнятої теорії міцності:

– за 3-ою теорією міцності (найбільших дотичних напружень)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + M_{КР}^2};$$

– за 4-ою теорією міцності (енергетичною)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + 0,75M_{КР}^2}.$$

Умова міцності при сумісній дії згину з крученням

$$\sigma_{екв} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma],$$

де $\sigma_{екв}$ – еквівалентне (розрахункове) нормальне напруження;

W_0 – осьовий момент опору перетину бруса, для круглого поперечного перетину $W_0 = \pi \cdot d^3/32$.

Задача №6

Розрахунок вала на згин з крученням

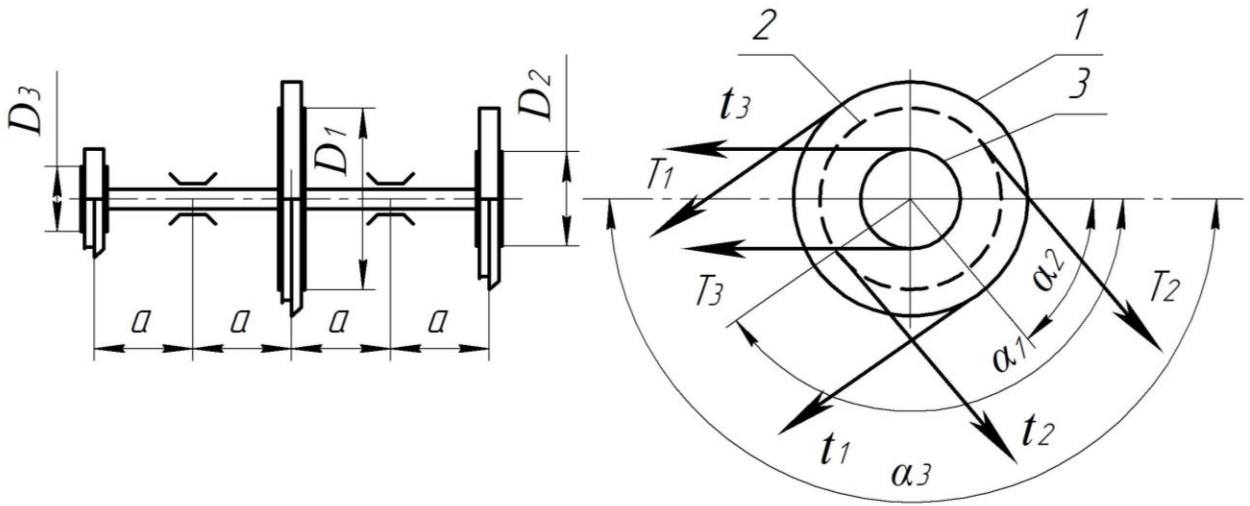
Стальний вал трансмісії (рис. до задачі №6, табл. до задачі №6) обертається з частотою n об/хв і передає через два ведених шківів пасових передач потужності, задані у табл. 12. Діаметри шківів: $D_1 = 60\text{см}$, $D_2 = 40\text{см}$, $D_3 = 30\text{см}$; відстань $a = 100\text{см}$; матеріал – сталь 45, $[\sigma] = 100\text{МПа}$. Визначити діаметр вала з умови міцності.

План розв'язування задачі:

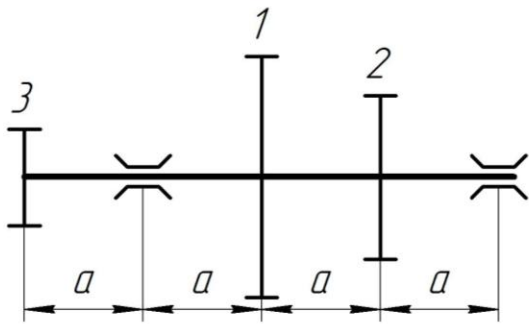
1. Визначити потужність на шківі (з умови балансу потужностей), де вона не задана.
2. Визначити скручувальні моменти на кожному шківі, крутні моменти на ділянках вала і побудувати епюру крутних моментів.
3. Визначити тиск, що передається кожним шківом на вал, вважаючи, що натяг ведучої вітки паса у два рази більший, ніж натяг веденої, $T_i = 2t_i$.
4. Визначити величини складових сил тиску, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах.
5. Побудувати епюри згинальних моментів у горизонтальній і вертикальній площинах.
6. Визначити сумарні згинальні моменти у характерних перетинах вала. Побудувати епюру сумарних згинальних моментів.
7. Визначити розрахунковий момент, користуючись третьою теорією міцності.
8. Визначити діаметр вала із умови міцності.

Таблиця до задачі № 6

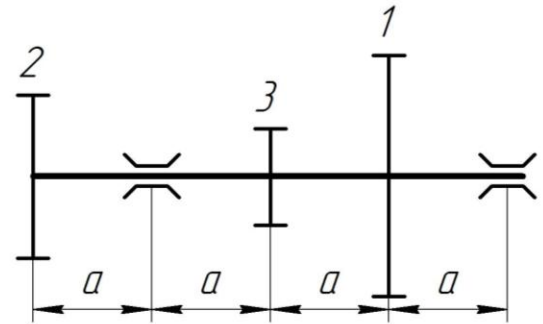
№ з/п	a_1°	a_2°	a_3°	$n, \text{об/хв}$	$P_1, \text{кВт}$	$P_2, \text{кВт}$	$P_3, \text{кВт}$
1	0	270	360	150	-	10	20
2	90	0	180	100	10	-	20
3	180	270	0	200	10	20	-
4	270	360	0	300	-	30	40
5	360	0	90	400	30	-	40
6	0	90	180	500	30	40	-
7	90	180	270	600	-	50	60
8	180	270	360	700	50	-	60
9	270	360	0	800	50	60	-
0	90	0	180	900	-	90	50



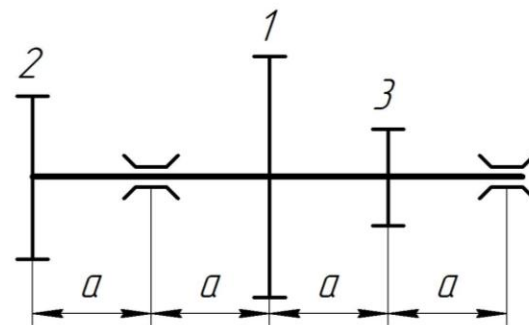
①



②



③



④

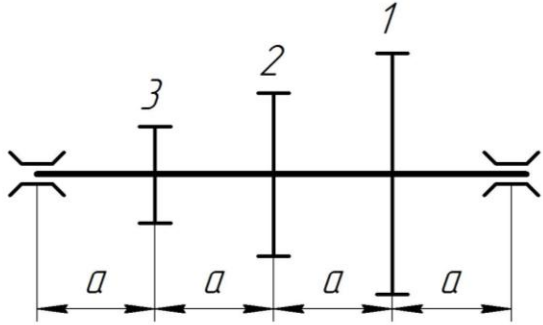


Рисунок до задачі №6

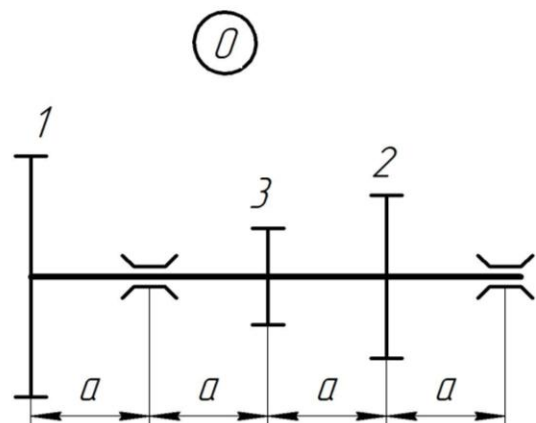
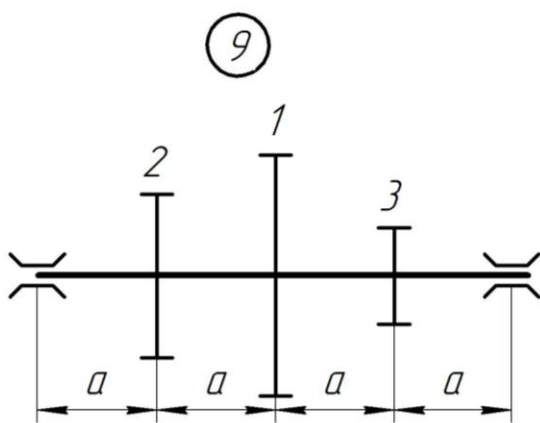
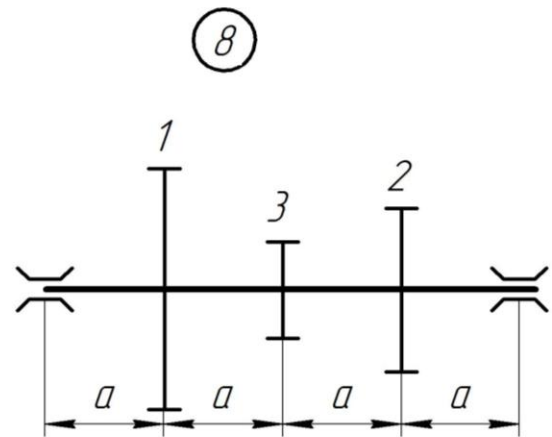
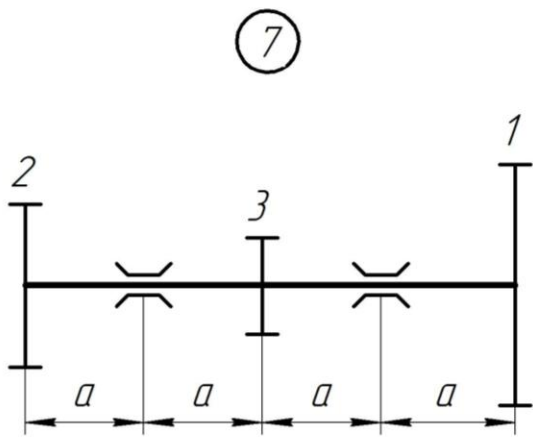
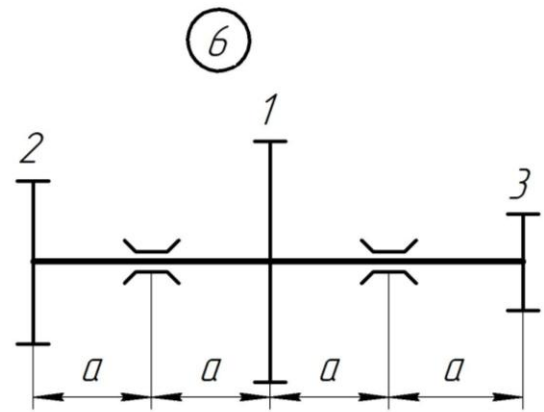
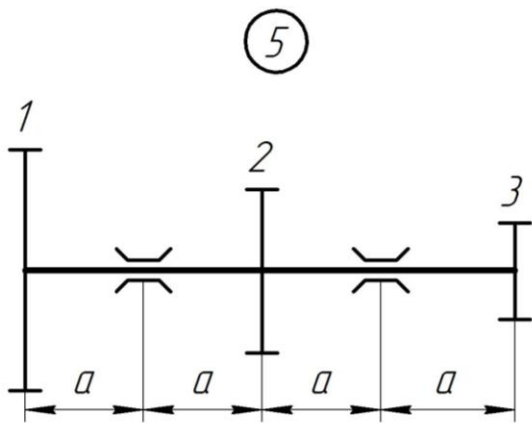


Рисунок до задачі №6 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №6 Розрахунок вала на згин з крученням

Стальний вал трансмісії обертається з частотою $n = 300 \text{ об/хв}$ і передає через два ведені шків пасових передач потужності $P_1 = 70 \text{ кВт}$ і $P_3 = 40 \text{ кВт}$ (рис. 7.2а). Діаметри шківів $D_1 = 60 \text{ см}$, $D_2 = 40 \text{ см}$, $D_3 = 30 \text{ см}$. Кути нахилу пасів $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 240^\circ$, $\alpha_3 = 180^\circ$ (на рис. 7.2. кути відкладено від осі Y), відстань $a = 100 \text{ см}$. Матеріал вала – сталь 45; $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$. Визначити діаметр вала з умови міцності.

Розв'язування

З балансу потужностей визначаємо потужність, яку передає ведучий шків

$$P_2 = P_1 + P_3 = 70 + 40 = 110 \text{ кВт.}$$

Величини моментів, які передають шків, визначаємо за формулою

$$M_i = P_i / \omega,$$

де ω – кутова швидкість вала, визначаємо її за формулою

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Скручувальні моменти на шківах:

$$M_1 = 70 / 31,4 = 2,23 \text{ кНм};$$

$$M_2 = 110 / 31,4 = 3,50 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 40 / 31,4 = 1,27 \text{ кНм.}$$

Використовуючи метод перетинів, будуємо епюру крутних моментів, M_{KP} (рис. 7.2б).

Визначаємо сили натягів пасових передач за формулою

$$t_i = 2M_i / D_i.$$

Відповідно

$$t_1 = \frac{2 \cdot 2,23}{0,6} = 7,43 \text{ кН}; \quad t_2 = \frac{2 \cdot 3,50}{0,4} = 17,5 \text{ кН}; \quad t_3 = \frac{2 \cdot 1,27}{0,3} = 8,47 \text{ кН.}$$

Сили тиску на вал у місцях посадки шківів визначаємо за формулою

$$F_i = 3t_i.$$

Тобто

$$F_1 = 3 \cdot 7,43 = 22,3 \text{ кН};$$

$$F_2 = 3 \cdot 17,5 = 52,4 \text{ кН};$$

$$F_3 = 3 \cdot 8,47 = 25,4 \text{ кН.}$$

Розкладаємо сили тиску на вертикальні і горизонтальні складові:

$$F_{1Z} = -F_1 \cdot \sin 30^\circ = -22,3 \cdot \sin 30^\circ = -11,2 \text{кН};$$

$$F_{1Y} = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 22,3 \cdot \cos 30^\circ = 19,3 \text{кН};$$

$$F_{2Z} = F_2 \cdot \sin 60^\circ = 52,4 \cdot \sin 60^\circ = 45,4 \text{кН};$$

$$F_{2Y} = -F_2 \cdot \cos 60^\circ = -52,4 \cdot \cos 60^\circ = -26,2 \text{кН};$$

$$F_{3Z} = 0;$$

$$F_{3Y} = -F_3 = 25,4 \text{кН}.$$

Розглянемо вертикальну площину (рис. 7.2в)

Вертикальні складові реакцій опор A і B визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} M_B = 0; & A_Z \cdot 4 - F_{2Z} \cdot 3 + F_{1Z} \cdot 2 = 0; \\ M_A = 0; & -B_Z \cdot 4 - F_{1Z} \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = 0; \end{cases}$$

звідки

$$A_Z = \frac{45,4 \cdot 3 - 11,2 \cdot 2}{4} = 28,4 \text{кН};$$

$$B_Z = \frac{45,4 \cdot 1 - 11,2 \cdot 2}{4} = 5,8 \text{кН}.$$

$$\begin{aligned} \text{Перевірка: } \sum Z &= -A_Z + F_{2Z} - F_{1Z} - B_Z = \\ &= -28,4 + 45,4 - 11,2 - 5,8 = 45,4 - 45,4 = 0. \end{aligned}$$

Визначаємо згинальні моменти у характерних точках вертикальної площини:

$$M_Y^A = M_Y^B = 0;$$

$$M_Y^K = -A_Z \cdot 1 = -28,4 \cdot 1 = -28,4 \text{кНм};$$

$$M_Y^L = -A_Z \cdot 2 + F_{2Z} \cdot 1 = -28,4 \cdot 2 + 45,4 \cdot 1 = -11,4 \text{кНм};$$

$$M_Y^C = -B_Z \cdot 1 = -5,8 \cdot 1 = -5,8 \text{кНм}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині (рис. 7.2з).

Розглянемо горизонтальну площину (рис. 7.2д).

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0; \quad -A_Y \cdot 4 + F_{2Y} \cdot 3 - F_{1Y} \cdot 2 + F_{3Y} \cdot 1 = 0; \quad A_Y = 16,4 \text{кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad B_Y \cdot 4 - F_{3Y} \cdot 3 + F_{1Y} \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 0; \quad B_Y = 15,9 \text{кН}.$$

$$\begin{aligned} \text{Перевірка: } \sum Y &= A_Y - F_{2Y} + F_{1Y} - F_{3Y} + B_Y = \\ &= 16,4 - 26,2 + 19,3 - 25,4 + 15,9 = 51,6 - 51,6 = 0; \end{aligned}$$

тобто опорні реакції визначено вірно.

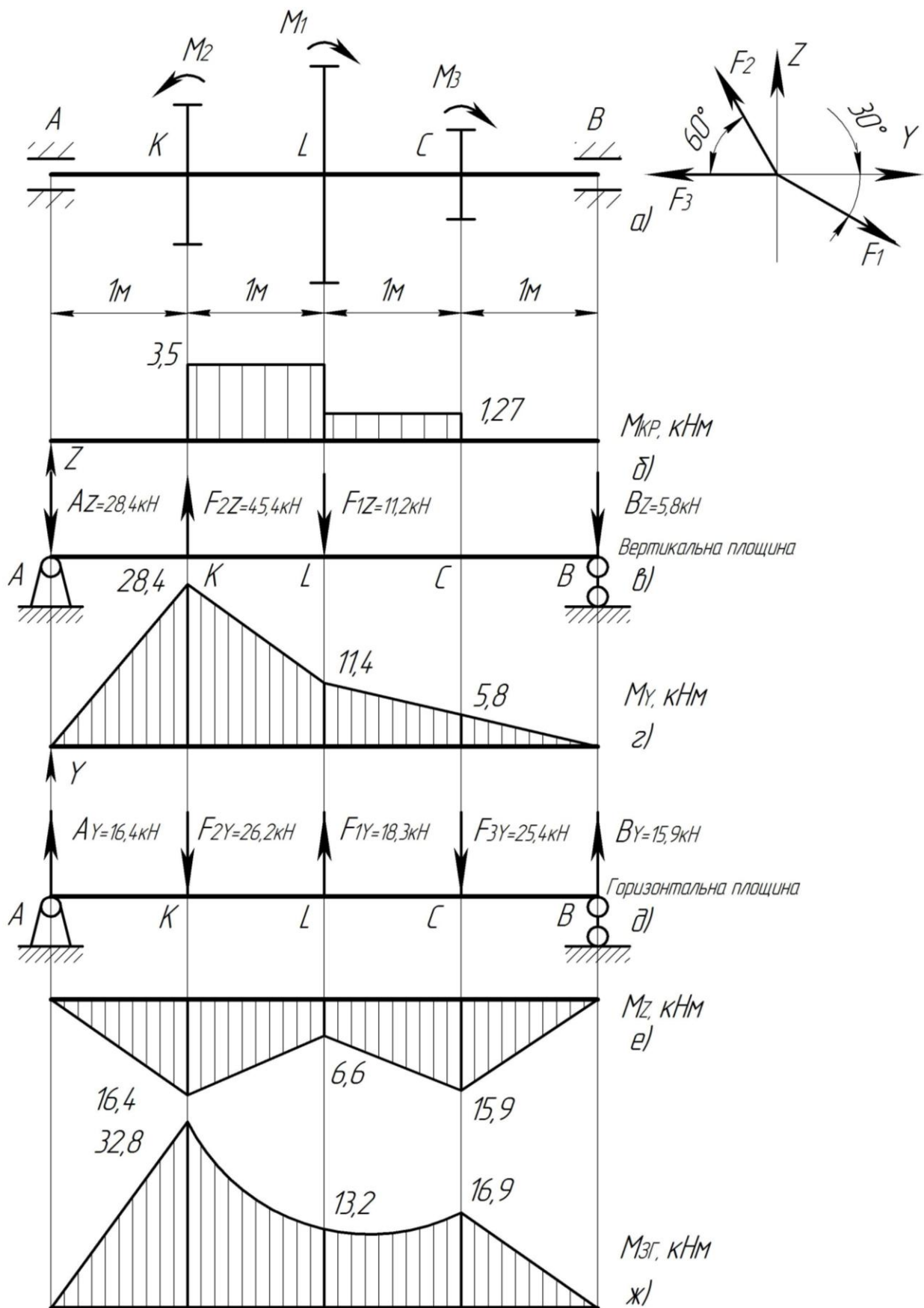


Рисунок 7.2

Визначаємо згинальні моменти у характерних точках горизонтальної площини:

$$\begin{aligned}M_Z^A &= M_Z^B = 0; \\M_Z^K &= A_Y \cdot 1 = 16,4 \cdot 1 = 16,4 \text{ кНм}; \\M_Z^L &= A_Y \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 1 = 16,4 \cdot 2 - 26,2 \cdot 1 = 6,6 \text{ кНм}; \\M_Z^C &= B_Y \cdot 1 = 15,9 \cdot 1 = 15,9 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині (рис. 7.2e).

Визначаємо сумарні значення згинальних моментів у характерних перетинах вала за формулою

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Визначимо:

$$\begin{aligned}M_{3\Gamma}^A &= M_{3\Gamma}^B = 0; \\M_{3\Gamma}^K &= \sqrt{28,4^2 + 16,4^2} = 32,8 \text{ кНм}; \\M_{3\Gamma}^L &= \sqrt{11,4^2 + 6,6^2} = 13,2 \text{ кНм}; \\M_{3\Gamma}^C &= \sqrt{5,8^2 + 15,9^2} = 16,9 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру сумарних згинальних моментів (рис. 7.2ж).

З аналізу епюр M_{KP} (див. рис. 7.2б) і $M_{3\Gamma}$ (див. рис. 7.2ж) визначимо небезпечний перетин – це перетин K , у якому

$$M_{3\Gamma} = 32,8 \text{ кНм}; \quad M_{KP} = 3,5 \text{ кНм}.$$

Розрахунковий момент визначимо за 3-ю теорією міцності

$$M_P = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_{KP}^2} = \sqrt{32,8^2 + 3,5^2} = 33 \text{ кНм}.$$

З умови міцності при сумісній дії згину з крученням

$$\sigma_{\max} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

визначаємо діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_P}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 33,0}{\pi \cdot 200 \cdot 10^3}} = 119 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $d = 120 \text{ мм}$.

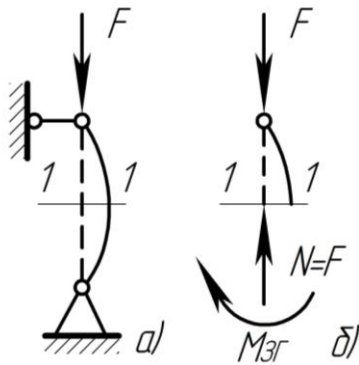
8. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ

Умови міцності та жорсткості доповнюють умовою стійкості, яка передбачає збереження початкової форми рівноваги конструкції або окремих її елементів під дією заданого навантаження.

Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають **критичними**, а відповідні їм стани – **критичними станами**.

Небезпека втрати стійкості виникає для тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, довгих стиснених стержнів, пластин і оболонок.

Критична сила – це найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою. Згин, пов'язаний із втратою стійкості стержнем прямолінійної форми, називають **поздовжнім згином**.



Унаслідок викривлення осі у поперечних перетинах стержня виникають два внутрішні силові фактори – **поздовжня сила** $N = F$ і **згинальний момент** $M_{зг}$ (рис. 8.1). Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.

Рисунок 8.1

Визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості

$$n_{cm} = \frac{F_{KP}}{F}.$$

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила F , яка діє на стержень, була меншою за критичну F_{KP} . Стійкість стержня достатня, якщо $n_{cm} > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Для сталей $n_{cm} = 1,8...3$; для чавунів $n_{cm} = 5...5,5$; для дерева $n_{cm} = 2,8...3,2$.

Рівновага абсолютно твердого тіла може бути стійкою, байдужою і нестійкою. Аналогічно це можна віднести і до деформованого тіла.

Довгий стержень при дії осьового стискуючого навантаження проходить **три форми рівноваги: стійку, байдужу та нестійку**.

Стиснений стержень перебуває у стані **стійкої** рівноваги (рис. 8.2a), якщо сила стиску F не перевищує критичного значення F_{KP} . Тобто, якщо стержень незначно зігнути якимось поперечним навантаженням, а потім

це навантаження забрати, то стержень знову вирівнюється, набуде початкове положення.

Форма рівноваги стисненого стержня є *байдужою* (рис. 8.2б), якщо сила стиску досягає певного значення, яке дорівнює критичній силі. При незначному відхиленні від початкового положення, під дією поперечної сили стержень назад не повертається.

При значенні стискуючої сили, яке перевищує критичне, прямолінійна форма рівноваги стержня стає *нестійкою*, стержень втрачає свою початкову форму (рис. 8.2в).

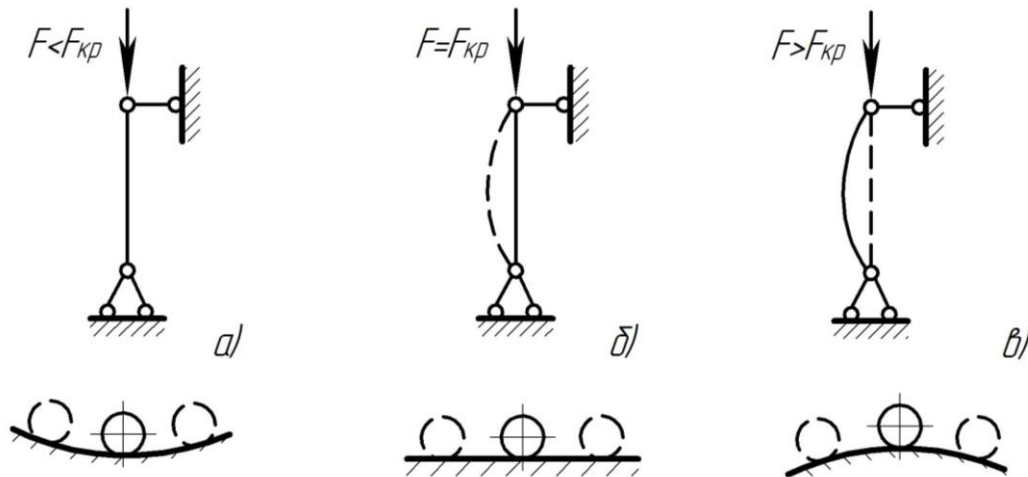


Рисунок 8.2

Втрата стійкості стержня може відбутися навіть тоді, коли напруження під дією критичної сили не досягнуло границі пропорційності.

Найменше значення стискуючої сили, при якій стержень втрачає властивість зберігати прямолінійну форму, називають критичною, позначають F_{KP} .

Задачу визначення величини критичної сили вперше розв'язав академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер у 1744р. **Формула Ейлера**

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де E – модуль пружності I-го роду;

I_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стержня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, залежить від способу закріплення кінців стержня;

l – довжина стержня.

Варіанти закріплення кінців стержня зображено на рис. 8.3.

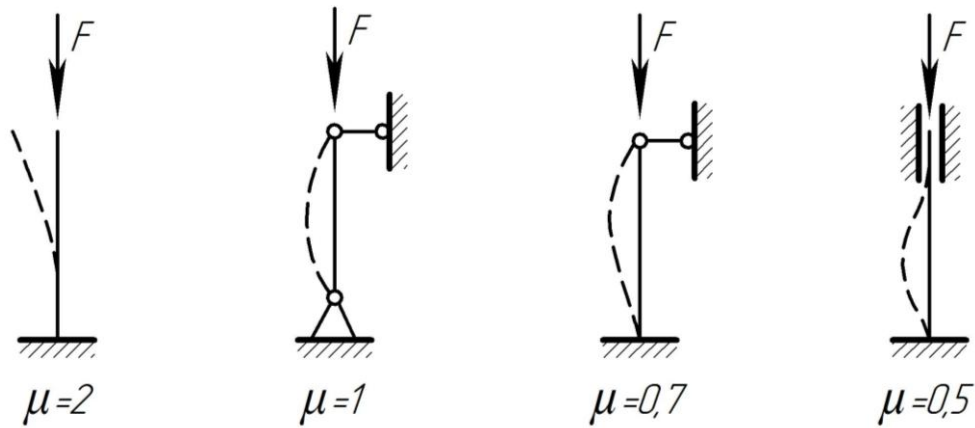


Рисунок 8.3

Межі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського

Формула Ейлера отримана з диференціального рівняння зігнутої осі стержня при шарнірно закріплених кінцях. Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, доки напруження у матеріалі не перевищує границю пропорційності.

$$\sigma_{KP} \leq \sigma_{пц}; \quad \sigma_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \leq \sigma_{пц},$$

де A – площа поперечного перетину стержня;

λ_{\max} – максимальна гнучкість стержня, залежить від геометрії стержня, способів закріплення його кінців. Визначають її за формулою

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

де i_{\min} – мінімальний радіус інерції поперечного перетину стержня, залежить від геометричних параметрів, визначають його за формулою

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}.$$

Формулу Ейлера використовують при гнучкостях, які більші за граничну гнучкість стержня λ_0 , яка залежить від матеріалу стержня і визначають її за формулою

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

Формулу Ейлера застосовують тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості матеріалу, з якого його виготовлено,

$$\lambda_{\max} \geq \lambda_0.$$

Як приклад, можна визначити граничну гнучкість для маловуглецевої сталі Ст.3, для якої $\sigma_{\text{тц}} = 200 \text{ МПа}$, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

$$\lambda_0 = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стержнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість $\lambda \geq 100$. Аналогічно визначають граничну гнучкість для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_0 = 80$; для дерева $\lambda_0 = 110$.

Якщо гнучкість стержнів менша від граничної, зокрема для сталей $\lambda = 40 \dots 100$, для визначення напружень застосовують емпіричну формулу Ясинського

$$\sigma_{\text{КР}} = a - b \cdot \lambda_{\max},$$

де a, b – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стержня. Для сталі Ст.3 ці величини дорівнюють

$$a = 310 \text{ МПа}; \quad b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стержні можна розраховувати на міцність при простому стиску, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулами

$$\sigma = F/A; \quad [\sigma] = \sigma_T (\sigma_{\text{КР}}) / n_{\text{ст}}.$$

Графік залежності критичних напружень від гнучкості для стержнів, виготовлених із маловуглецевої сталі, зображено на рис. 8.4.

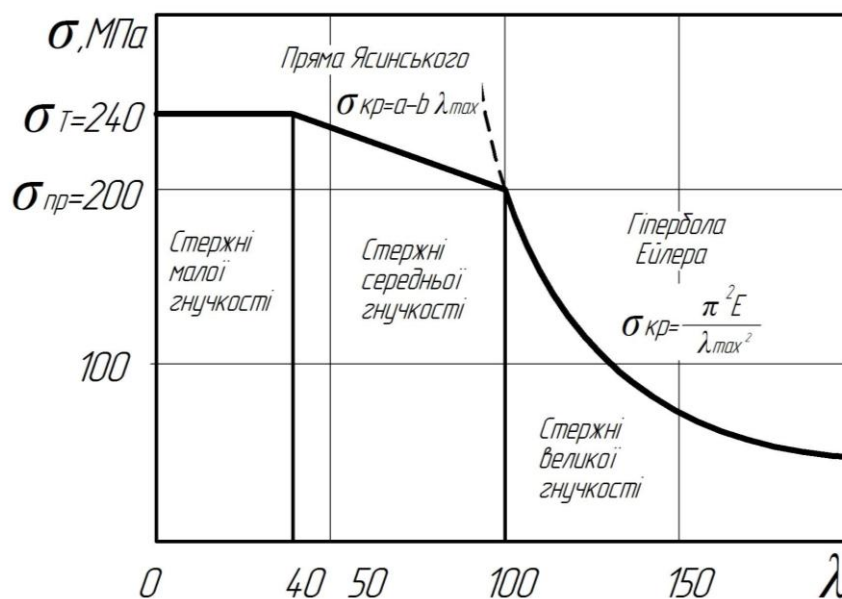


Рисунок 8.4

Зазначимо, що:

1) при малих значеннях λ критичне напруження дорівнює границі текучості $\sigma_{KP} = \sigma_T$;

2) при середніх значеннях λ критичне напруження менше від границі текучості, але більше ніж границя пропорційності $\sigma_{ny} < \sigma_{KP} < \sigma_T$;

3) при великих значеннях λ критичне напруження менше від границі пропорційності $\sigma_{KP} < \sigma_{ny}$.

Величину критичної сили, яку можна прикласти до стержня, отримують у такій послідовності. Визначають:

а) граничну гнучкість λ_0 ;

б) максимальну дійсну гнучкість стержня λ_{\max} .

в) маючи λ_0 і λ_{\max} , для визначення критичних напружень використовують одну з таких формул:

- при $\lambda_{\max} \geq \lambda_0$ формулу Ейлера, $\sigma_{KP} = \pi^2 E / \lambda_{\max}^2$;

- при $\lambda_{cp} \leq \lambda_{\max} \leq \lambda_0$ формулу Ясинського, $\sigma_{KP} = a - b \cdot \lambda_{\max}$;

- при $\lambda_{\max} < \lambda_{cp}$, формулу на стиск, $\sigma_{KP} = \sigma_T$;

г) маючи σ_{KP} , знаходять $F_{KP} = \sigma_{KP} \cdot A$.

Допустиме значення сили, прикладеної до стержня, визначають як

$$[F] = F_{KP} / n_{cm}.$$

У розрахунках на стійкість критичне напруження є руйнівним, як границя текучості або границя міцності в розрахунках на міцність. Тому введено поняття **допустимого напруження на стійкість** $[\sigma_{CT}]$, що визначається як частина критичного напруження

$$[\sigma_{CT}] = \sigma_{KP} / n_{cm}.$$

Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає при стиску, не перевищувало допустимого напруження на стійкість

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{A} \leq [\sigma_{CT}].$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, але й від гнучкості стержня. Тому введено поняття **коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на міцність при розрахунку на стійкість**

$$\varphi = \frac{[\sigma_{CT}]}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на міцність при стиску, $[\sigma] = \sigma_T / n$.

Коефіцієнт φ для кожного матеріалу можна визначити при будь-якому значенні гнучкості. Значення його для деяких матеріалів наведено у додатку 10.

Отже, умова стійкості

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma].$$

За допомогою умови стійкості розв'язують три типи задач.

1. Підбір поперечного перетину стержня або проектний розрахунок.

Виконується цей розрахунок визначенням площі перетину з умови стійкості

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}.$$

2. Визначення допустимого навантаження з умови стійкості

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A$$

виконується аналогічно до п.1, крім останньої дії, замість якого обчислюють допустиме навантаження.

3. Перевірний розрахунок. Перевірка стійкості, тобто виконання умови стійкості. Виконують у такій послідовності:

- визначають мінімальний момент інерції поперечного перетину стержня та мінімальний радіус інерції (при однаковому закріпленні у головних площинах);

- обчислюють гнучкість стержня;

- вибирають коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження φ ;

- отримані дані підставляють в умову стійкості й перевіряють її виконання.

Ця задача не має єдиного розв'язку, оскільки до нерівності входять дві невідомі величини: площа перетину A і коефіцієнт φ , який залежить від невизначених ще розмірів перетину, його форми та довжини стержня. Розв'язують задачу методом послідовних наближень з перевіркою проміжних результатів за допомогою умови стійкості. У першому наближенні беруть довільне значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження, орієнтовно $\varphi = 0,5 \dots 0,6$.

Визначення розмірів поперечного перетину стержня при стійкості ускладнюється ще й тим, що наперед не відомо, в якому діапазоні буде знаходитися дійсна гнучкість стержня, тобто якою з формул потрібно користуватися: Ейлера, Ясинського чи на простий стиск.

Задача №7

Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для заданого стержня (рис. до задачі №7, табл. до задачі №7), підібрати елементи його поперечного перетину із умови стійкості. Матеріал елементів – сталь Ст.3; $[\sigma]=160\text{МПа}$; $\lambda_0=100$. Елементи стержня приварені один до одного.

План розв'язування задачі:

1. Накреслити задану схему, розмістивши елементи (кутники, швелери чи двотаври) під стержнем.
2. Визначити площину найменшої жорсткості (площина, в якій деформується вісь при досягненні силою критичної величини).
3. Провести розрахунок стержня на стійкість у площині найбільшої гнучкості, користуючись таблицею сортаменту на фасонний прокат (додатки 6, 7, 8, 9) і таблицею коефіцієнтів зниження основного допустимого напруження (додаток 10).

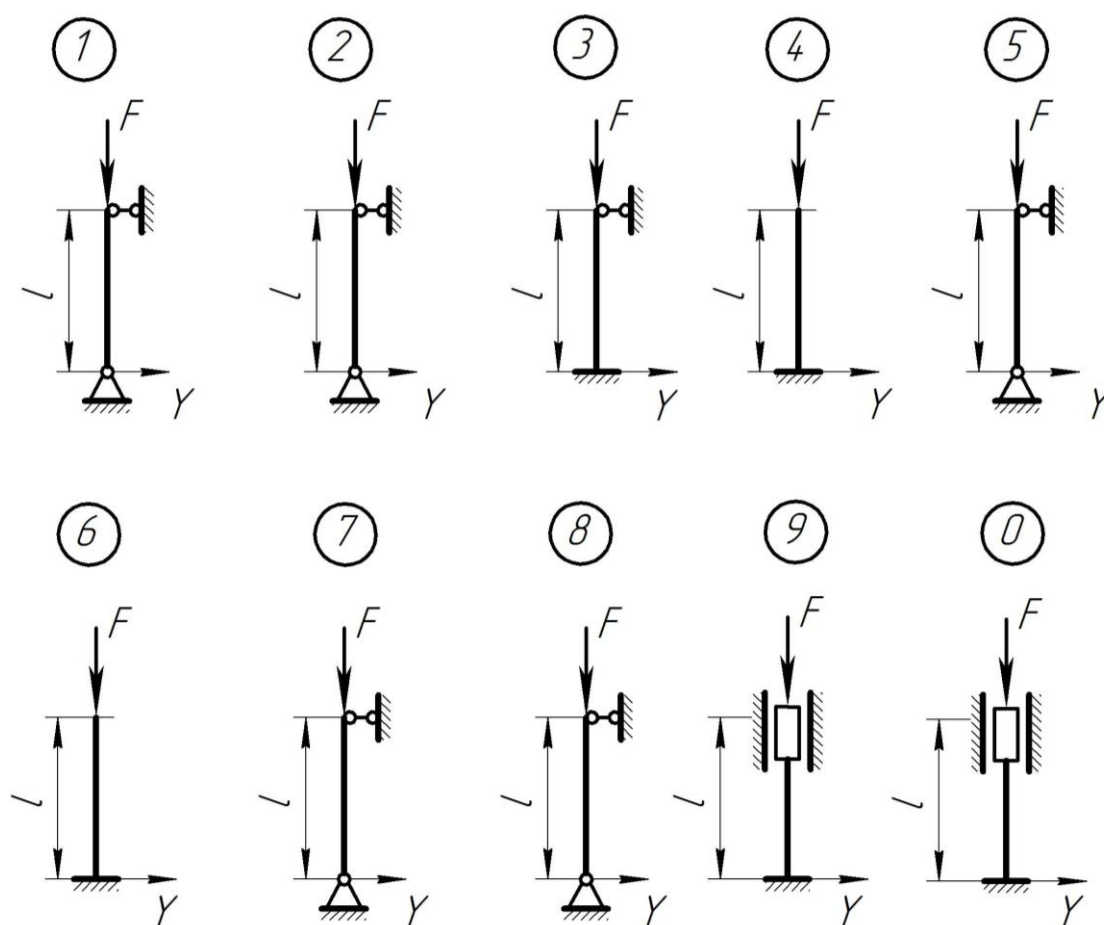
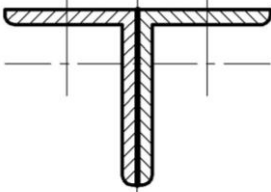
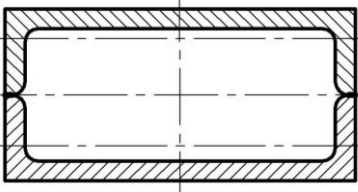
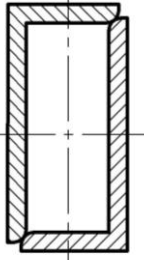
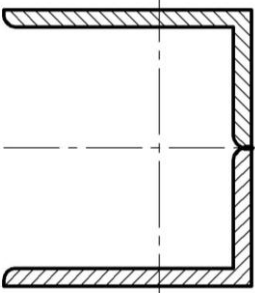
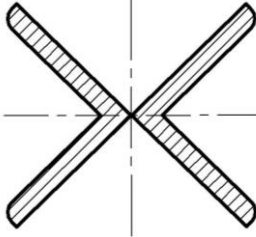
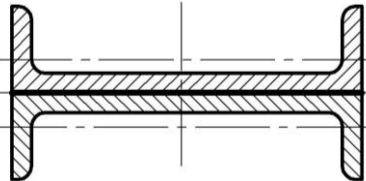
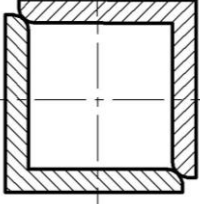
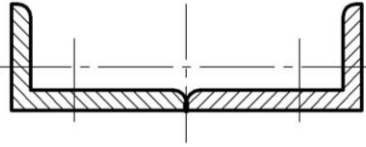
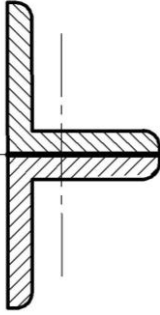
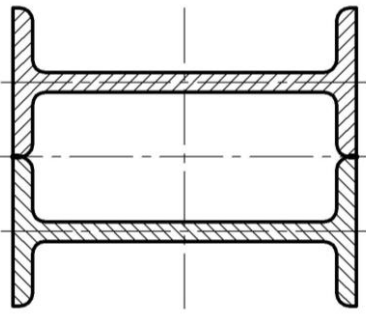


Рисунок до задачі №7

Таблиця до задачі №7

№ з/п	F , кН	l , м	Поперечний перетин	№ з/п	F , кН	l , м	Поперечний перетин
1	130	2,5		6	130	2,0	
2	180	4,5		7	180	2,5	
3	100	1,5		8	100	4,0	
4	80	3,0		9	80	2,0	
5	90	3,5		0	90	6,0	

Приклад розв'язування задачі №7

Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для заданого стержня (рис. 8.5а) підібрати двотавровий перетин. Матеріал стержня – сталь Ст.3; $[\sigma]=160\text{МПа}$; $\lambda_0=100$; $F=200\text{кН}$; $l=3\text{м}$.

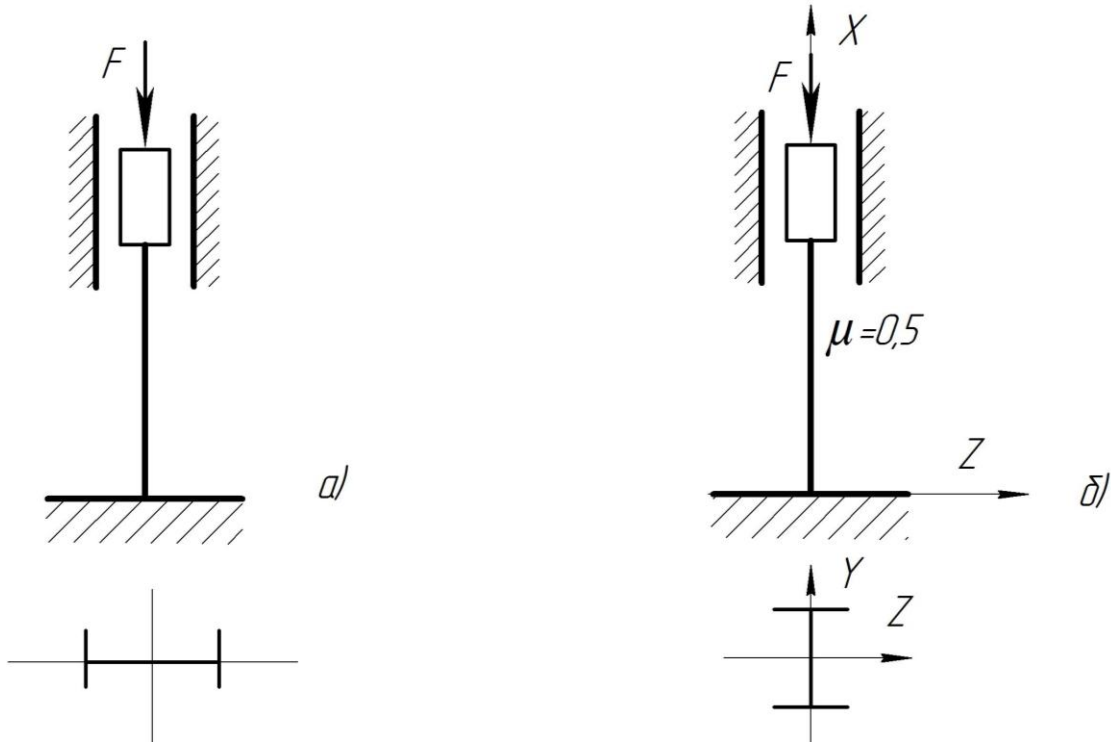


Рисунок 8.5

Розв'язування

Розміщуємо поперечний перетин під стержнем (рис. 8.5б).

Розрахунок проводимо методом послідовних наближень.

Перше наближення, приймаємо значення коефіцієнта поздовжнього згину $\varphi_1 = 0,5$.

З умови стійкості визначаємо площу поперечного перетину

$$A_1 \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{200}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^3} = 25,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

З ГОСТ 8239-56 (додаток 6) вибираємо двотавр №10, для якого: $A_{\text{дв}1} = 25,4 \text{ см}^2$, $i_{y1} = 2,12 \text{ см}$, $i_{z1} = 7,51 \text{ см}$.

Визначаємо гнучкості стержня у двох площинах:

$$\lambda_{y1} = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 300}{2,12} \approx 71;$$

$$\lambda_{z1} = \frac{\mu \cdot l}{i_z} = \frac{0,5 \cdot 300}{7,51} \approx 20.$$

Оскільки $\lambda_{Y1} > \lambda_{Z1}$, то розрахунок ведемо у площині XOZ (див. рис. 8.5б). Використовуючи метод лінійної інтерполяції, визначаємо уточнене значення коефіцієнта поздовжнього згину, що відповідає гнучкості $\lambda_{Y1} = 71$. З таблиці (додаток б) випишемо:

при $\lambda = 70$; $\varphi = 0,81$; при $\lambda = 80$; $\varphi = 0,75$.

Визначимо коефіцієнт зниження основних допустимих напружень для гнучкості $\lambda_{Y1} = 71$

$$\varphi'_1 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 1 = 0,804.$$

Визначаємо дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 1} = \frac{F}{A_{\partial 1}} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{25,4 \cdot 10^{-4}} = 78,7 \text{ МПа}.$$

Визначаємо допустиме напруження

$$[\sigma]_{cm1} = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0,804 \cdot 160 = 129 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає

$$\frac{|\sigma_{\partial 1} - [\sigma]_{cm1}|}{[\sigma]_{cm1}} \cdot 100\% = \frac{78,7 - 129}{129} \cdot 100\% = 38,7\%, \text{ що недопустимо.}$$

Друге наближення, приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,804}{2} = 0,652.$$

Тоді

$$A_2 \geq \frac{200}{0,652 \cdot 160 \cdot 10^3} = 19,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 19,2 \text{ см}^2.$$

Приймаємо двотавр №16 (додаток б), для якого $A_{\partial 2} = 20,2 \text{ см}^2$; $i_{y2} = 1,70 \text{ см}$; $i_{z2} = 6,57 \text{ см}$.

Визначаємо гнучкість стержня

$$\lambda_{Y2} = \frac{0,5 \cdot 300}{1,70} = 88,$$

що відповідає

$$\varphi'_2 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 8 = 0,702.$$

Дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 2} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{20,2 \cdot 10^{-4}} = 99 \text{ МПа.}$$

Допустиме напруження

$$[\sigma]_{cm2} = 0,702 \cdot 160 = 112 \text{ МПа.}$$

Недонапруження становить

$$\frac{112 - 99}{112} \cdot 100\% = 11,6\%, \text{ що більше } 5\%.$$

Третє наближення, приймаємо

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,652 + 0,702}{2} = 0,677.$$

Тоді

$$A_3 = \frac{200}{0,677 \cdot 160 \cdot 10^3} = 18,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 18,5 \text{ см}^2.$$

Приймаємо двотавр №14 (додаток б), для якого $A_{\partial \partial 3} = 17,4 \text{ см}^2$;
 $i_{y3} = 1,55 \text{ см}$; $i_{z3} = 5,73 \text{ см}$.

Визначаємо гнучкість

$$\lambda_{z3} = \frac{0,5 \cdot 300}{1,55} = 97,$$

що відповідає

$$\varphi_3' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 7 = 0,627.$$

Дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 3} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{17,4 \cdot 10^{-4}} = 115 \text{ МПа.}$$

Допустимі напруження

$$[\sigma]_{cm3} = 0,627 \cdot 160 = 100 \text{ МПа.}$$

Перенапруження становить $\frac{115 - 100}{100} \cdot 100\% = 15\%$, що недопустимо.

Отже, приймаємо для даного стержня поперечний перетин – двотавр №16, для якого недонапруження складає 11,6%, тому що для стержня перетином з двотавра №14 перенапруження складає 15%, що недопустимо.

9. ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ УДАРІ

Динамічне навантаження – це навантаження, яке частково або повністю спричинене силами інерції (при прискореному русі деталей, при обертанні їх та коливанні), а також *при миттєвому навантаженні та ударах*. Одні і ті ж елементи конструкцій та їх матеріал деформуються по-різному залежно від того, як вони навантажені: статично чи динамічно.

Особливість руйнування при динамічній дії сил – та, що пластичні матеріали, такі як маловуглецева сталь, при миттєвому (ударному) навантаженні проявляють крихкі властивості, тобто руйнуються без значних залишкових деформацій і при значно меншій енергії деформування. *Механічну характеристику матеріалу, що відображає його здатність чинити опір ударному навантаженню, називають ударною в'язкістю*. Ударна в'язкість характеризується площею діаграми напружень « $\varepsilon - \sigma$ » до руйнування (див. розділ 2). Модулі пружності при динамічному навантаженні теж інші, ніж при статичному. В опорі матеріалів використовують **наближену теорію удару**, вважаючи, що і **закон Гука виконується, модулі пружності незмінні і немає розсіювання енергії при ударі**.

Робота деяких машин (пресування, забивання свай та ін.) супроводжуються ударним навантаженням, наприклад, падіння вантажу Q з деякої висоти h на нерухому пружну систему. У момент удару в конструкції напруження і деформації досягають максимальних значень.

Ударне навантаження вільно падаючим тілом

У системах, на які падає вантаж, можуть виникати різні види деформацій: стиск (рис. 9.1а), згин (рис. 9.1б,в), кручення (рис. 9.1г).

Для отримання формул міцності і жорсткості при такому навантаженні (у наближеному вигляді) приймають такі припущення:

1. Прискорення і сила інерції тіла, що спричиняє удар, зростають не змінюючи напрямку від нуля до кінцевого значення.
2. Тіло, що зазнає удару, має лише один ступінь вільності.
3. Тіло, що ударяє – абсолютно жорстке і не деформується; удар – пружний, але тіла після удару переміщуються разом (немає «відскоку»).
4. Деформації того тіла, що зазнало удару, – пружні і закон Гука для нього прийнятний.
5. Масою пружної системи при наближених розрахунках нехтують.
6. Розсіюванням енергії при ударі нехтують. Кінетична енергія вантажу, який падає, повністю переходить у потенціальну енергію пружної системи.

Розглянемо найпростіший випадок ударного навантаження вертикальної колони вільно падаючим абсолютно твердим тілом (рис. 9.1а).

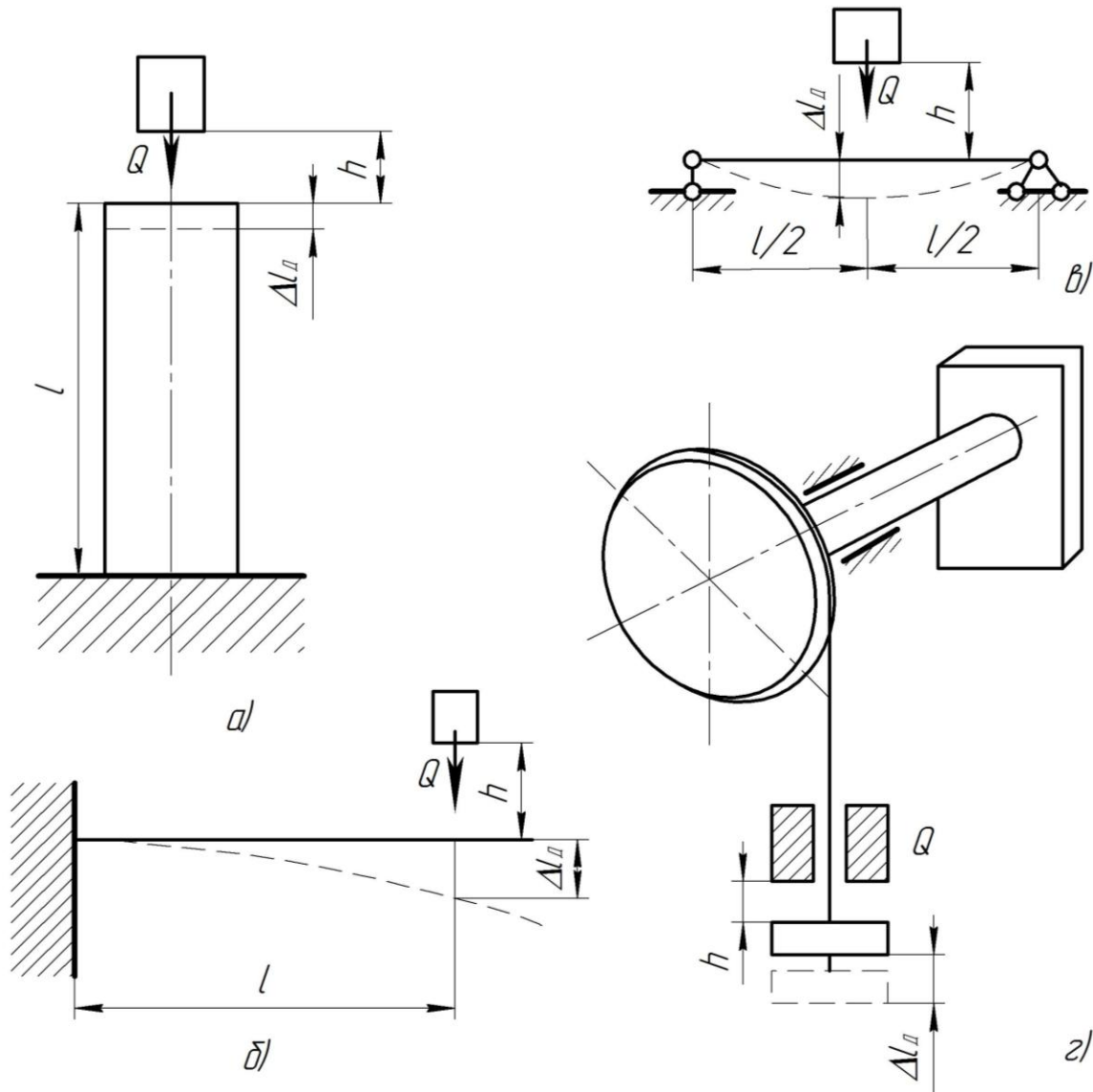


Рисунок 9.1

Скористатися принципом Даламбера у цьому випадку неможливо, оскільки невідоме прискорення при деформуванні самої колони. Користуючись законом збереження енергії, складемо рівняння балансу енергії системи «падаюче тіло – конструкція» для моменту найбільшого переміщення Δl_D

$$K_T = U_{\text{кол}}, \quad (9.1)$$

де K_T – кінематична енергія тіла, що падає, з врахуванням переміщення його (разом з динамічним укороченням колони на Δl_D) аж до зупинки в кінці максимального переміщення точки удару

$$K_T = Q(h + \Delta l_D). \quad (9.2)$$

Потенціальна енергія пружної деформації, що накопичиться при такому укороченні колони

$$U = \frac{1}{2} N_D \cdot \Delta l_D, \quad (9.3)$$

де N_D – найбільше внутрішнє зусилля при пружному деформуванні,

$N_D \neq Q$, це невідомий параметр, так як і Δl_D .

Запишемо зв'язок між цими параметрами, вважаючи, що закон Гука виконується:

$$\Delta l_D = \frac{N_D \cdot l}{E \cdot A}, \quad \text{звідки} \quad N_D = \frac{\Delta l_D \cdot E \cdot A}{l}.$$

Енергія деформування буде відповідно до (9.3)

$$U = \frac{\Delta l_D^2 \cdot E \cdot A}{2l}. \quad (9.4)$$

Згідно балансу енергій (9.2) і (9.4) порівняємо

$$Q(h + \Delta l_D) = \frac{\Delta l_D^2 \cdot E \cdot A}{2l}. \quad (9.5)$$

Запишемо квадратне рівняння у найпростішому вигляді

$$\Delta l_D^2 - \frac{2Q \cdot l}{E \cdot A} \cdot \Delta l_D - \frac{2Q \cdot l \cdot h}{E \cdot A} = 0. \quad (9.6)$$

Вираз $\frac{Q \cdot l}{E \cdot A}$ – це вкорочення (згідно закону Гуку) колони при статичній дії ваги Q , тобто це Δl_{CT} (переміщення перетину пружної системи від статичної дії вантажу).

Динамічне вкорочення можна отримати у вигляді

$$\Delta l_D = \Delta l_{CT} + \sqrt{\Delta l_{CT}^2 + 2\Delta l_{CT} \cdot h}, \quad (9.7)$$

або

$$\Delta l_D = \Delta l_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{CT}}} \right) = \Delta l_{CT} \cdot k_D. \quad (9.8)$$

Вираз у дужках вважають **коефіцієнтом динамічності при ударі вільно падаючим тілом**.

При $h=0$, тобто при падінні тіла з нульової висоти (або ж при так званому миттєвому прикладенні сили) $k_D = 1 + \sqrt{1} = 2$.

Пружні деформації частіше всього набагато менші ніж h , тому коефіцієнт динамічності можна брати

$$k_D \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{СТ}}}. \quad (9.9)$$

Чим більший знаменник, тим менший k_D . Це означає, що податливіша деформуванню (менш жорстка) система є міцнішою при ударах і при коливаннях.

При отриманні залежності для коефіцієнта динамічності, нехтують власною масою тіла, що деформується. Це допускається лише для наближених розрахунків.

Аналогічно визначимо переміщення і напруження бруса при осьовому ударі (рис. 9.2).

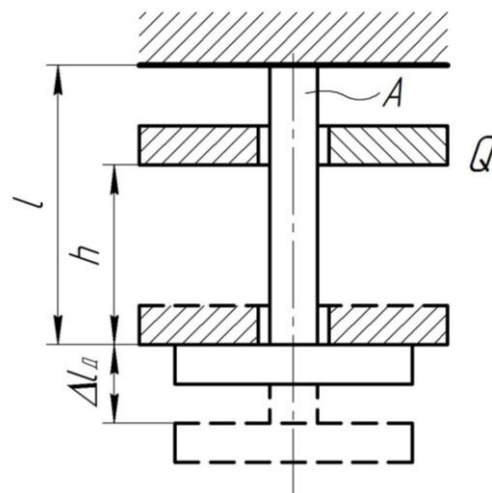


Рисунок 9.2

На основі лінійної залежності між силою та переміщеннями можна записати, що

$$\sigma_D = \sigma_{СТ} \cdot k_D; \quad \tau_D = \tau_{СТ} \cdot k_D,$$

де σ_D, τ_D – динамічні нормальні та дотичні напруження;

$\sigma_{СТ}, \tau_{СТ}$ – статичні нормальні та дотичні напруження, визначені в елементах конструкції від статичної дії вантажу.

Задача №8

Визначення максимальних динамічних напружень і переміщень при ударі

Для заданої пружної системи (рис. до задачі №8, табл. до задачі №8) визначити максимальні напруження при ударі, що виникають при падінні на неї з висоти $h = 0,5\text{ м}$ вантажу $Q = 100\text{ Н}$ та величину переміщення у зазначеному перетині (див. табл. до задачі №8) у напрямі удару. Матеріал пружної системи – сталь; $l = 2\text{ м}$; $d = 4\text{ см}$.

План розв'язування задачі:

1. Визначити, на які види деформації працюють елементи конструкції.
2. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів при статичній дії вантажу Q .
3. Визначити максимальні статичні напруження в елементах конструкції.
4. Визначити статичне переміщення у заданому перетині.
5. Визначити статичне переміщення у місці удару.
6. Визначити динамічний коефіцієнт (без врахування власної ваги пружної системи).
7. Визначити максимальні динамічні напруження.
8. Визначити переміщення під час удару у заданому перетині ($f_A^{верт}$ або Θ_B).

Таблиця до задачі №8

№ з/п	D, см	Переміщення
1	4,5	$f_A^{верт}$
2	4,0	Θ_B
3	5,0	$f_A^{верт}$
4	6,0	Θ_B
5	7,0	$f_A^{верт}$
6	8,0	Θ_B
7	9,0	$f_A^{верт}$
8	10,0	Θ_B
9	11,0	$f_A^{верт}$
0	12,0	Θ_B

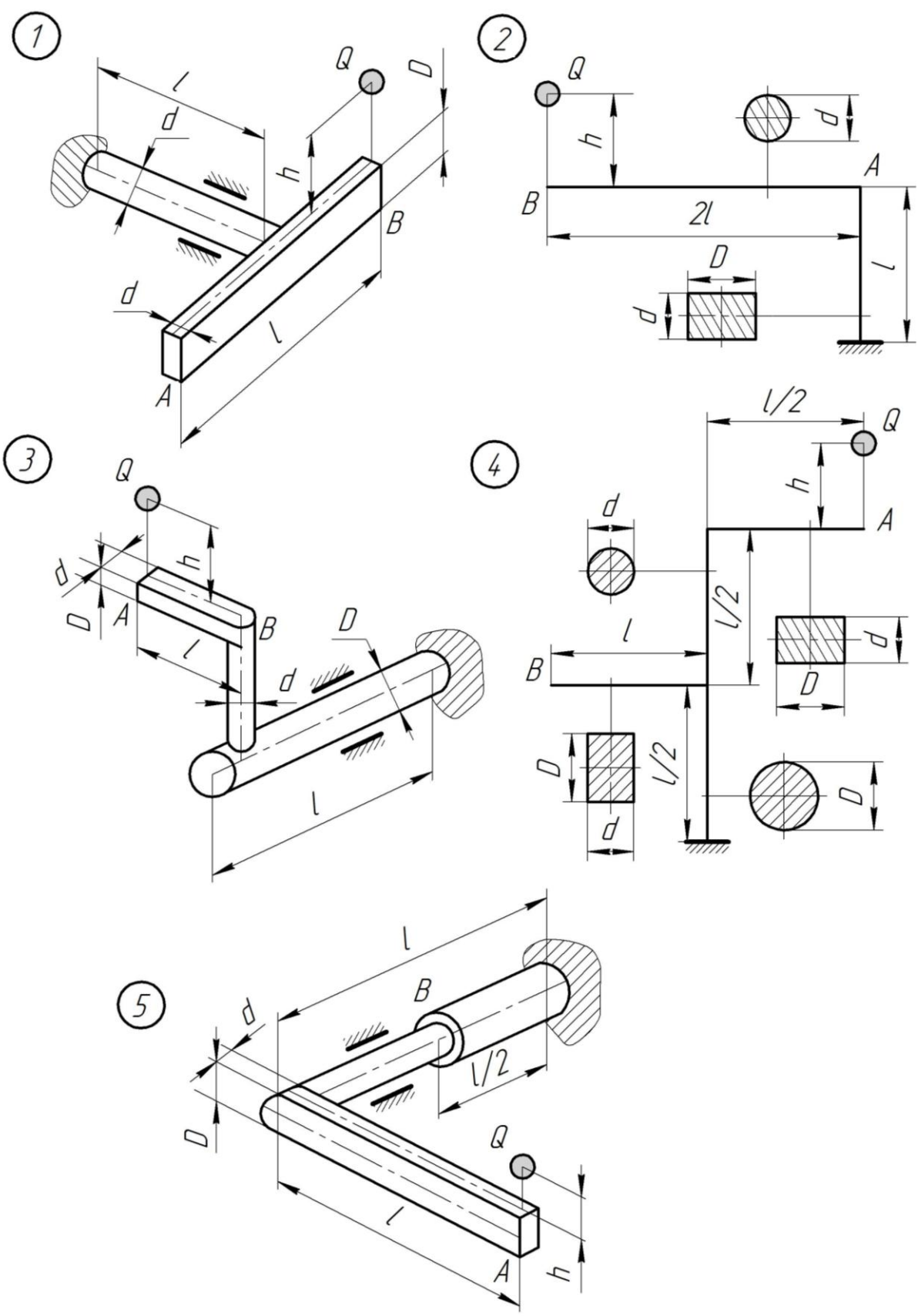


Рисунок до задачі №8

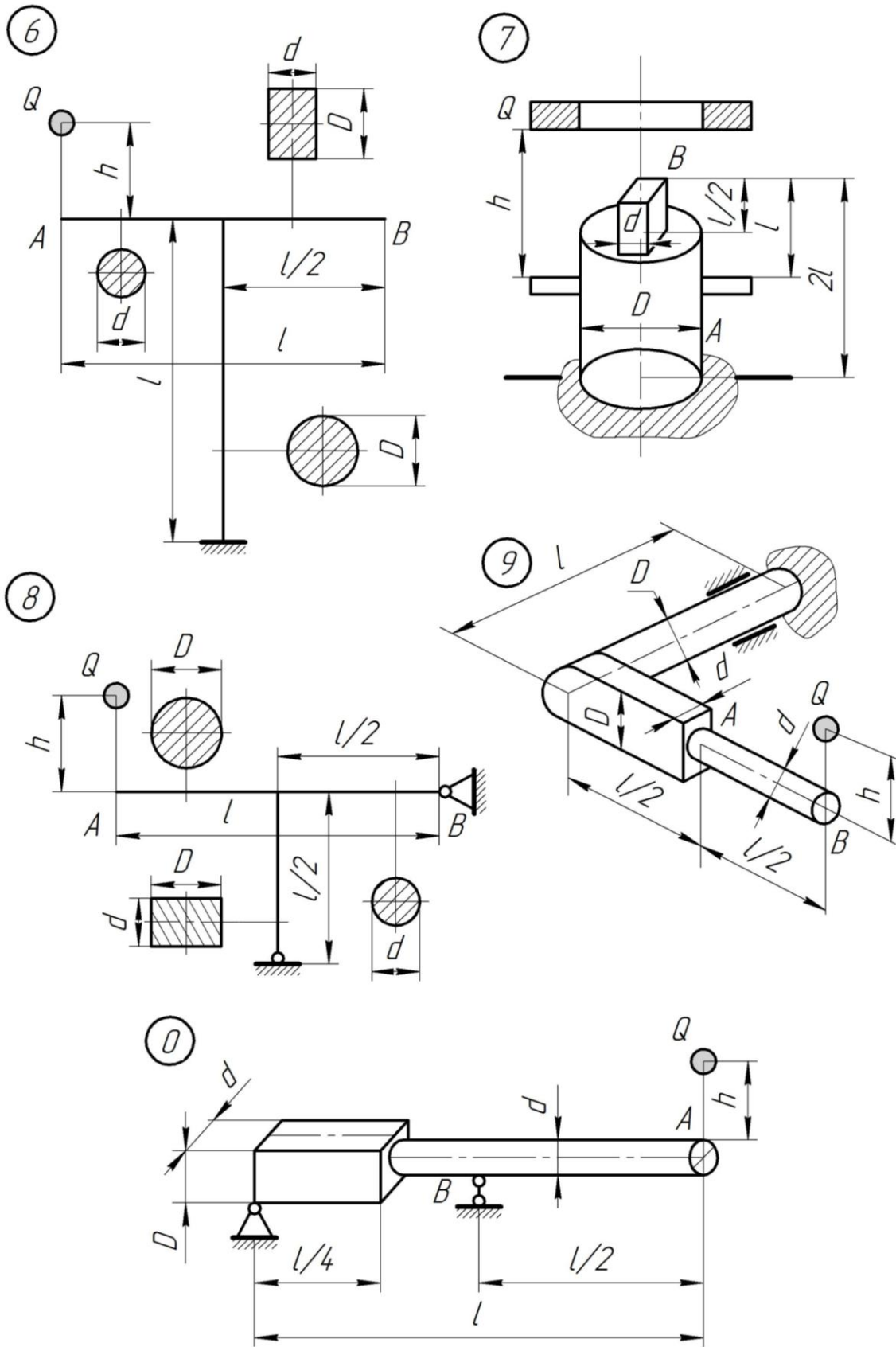


Рисунок до задачі №8 (закінчення)

Приклад розв'язування задачі №8.1

Для заданої пружної системи (рис. 9.3а) визначити максимальні напруження, що виникають при ударі об неї вантажу $Q = 100\text{Н}$, що падає з висоти $h = 0,5\text{м}$ та величину переміщення у перетині, на який падає вантаж. Дано: $E = 2 \cdot 10^{11}\text{Па}$; $l = 2\text{м}$; $d = 4\text{см}$; $D = 5\text{см}$.

Розв'язування

Задана стержнева система (рис. 9.3б) працює на такі види деформацій: ділянки AB , BC – прямий поперечний згин.

Визначаємо максимальні внутрішні силові фактори при статичній дії навантаження $Q = 100\text{Н}$. Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 9.3в).

Ділянка AB , перетин B : $M_{зг.В} = 100\text{Нм}$.

Ділянка BC , $M_{зг.ВС} = 100\text{Нм}$.

Визначаємо максимальні статичні напруження.

Перетин B :

$$\sigma_{СТ.В} = \frac{M_{зг.В}}{W_{01}} = \frac{100}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 15,9\text{МПа},$$

де

$$W_{01} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6,28\text{см}^3 = 6,28 \cdot 10^{-6}\text{м}^3.$$

Ділянка BC :

$$\sigma_{СТ.ВС} = \frac{M_{зг.ВС}}{W_{02}} = \frac{100}{12,3 \cdot 10^{-6}} = 8,15\text{МПа},$$

де

$$W_{02} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 5^3}{32} = 12,3\text{см}^3 = 12,3 \cdot 10^{-6}\text{м}^3.$$

Визначаємо статичне переміщення перетину, на який падає вантаж, використовуючи графоаналітичний метод розв'язку інтегралу Мора (рис. 9.3г, д)

$$\begin{aligned} \Delta l_{СТ} &= \frac{1}{EI_{01}} \omega_1 \cdot M_{C1} + \frac{1}{EI_{02}} \omega_2 \cdot M_{C2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \left(\frac{50 \cdot 0,67}{12,56} + \frac{200 \cdot 1}{30,6} \right) \cdot \frac{1}{10^{-8}} = 5,93 \cdot 10^{-3}\text{м}; \end{aligned}$$

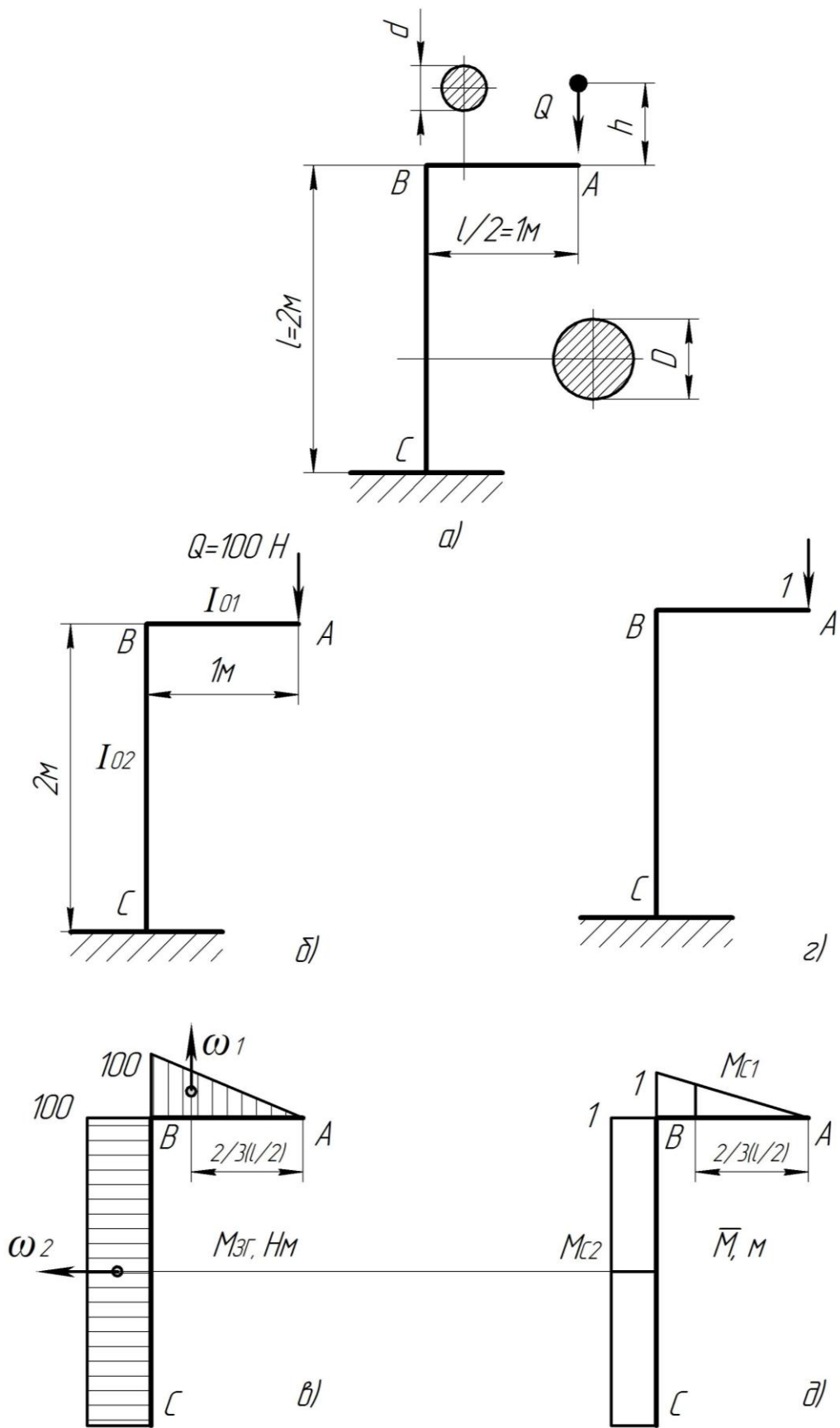


Рисунок 9.3

де $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 = 50;$ $\omega_2 = 100 \cdot 2 = 200;$

$$M_{C1} = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0,67; \quad M_{C2} = 1;$$

$$I_{01} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4 = 12,56 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{02} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 5^4}{64} = 30,6 \text{ с} = 30,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо динамічний коефіцієнт

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta l_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{5,93 \cdot 10^{-3}}} = 14,0.$$

Визначаємо динамічні напруження в елементах конструкції:
перетин B ,

$$\sigma_{D.B} = \sigma_{CT.B} \cdot k_D = 15,9 \cdot 14 = 223 \text{ МПа}.$$

ділянка BC ,

$$\sigma_{D.BC} = 8,15 \cdot 14 = 114 \text{ МПа}.$$

Вертикальний прогин перетину A під час удару

$$f_{D.A} = \Delta l_{CT.A} \cdot k_D = 5,93 \cdot 14 = 83 \text{ мм},$$

де $\Delta l_{CT.A} = \Delta l_{CT}$.

Приклад розв'язування задачі №8.2

Для заданої пружної системи (рис. 9.4) визначити максимальні напруження, що виникають при ударі об неї вантажу $Q = 100\text{Н}$, що падає з висоти $h = 0,5\text{м}$ та величину переміщення перетину B , на який падає вантаж. Дано: $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$; $l = 2\text{м}$; $d = 4\text{см}$; $D = 4\text{см}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{МПа}$.

Розв'язування

Задана стержнева система працює на такі види деформацій (рис. 9.4а): ділянки BA та AC – згин; ділянка CK – кручення.

Визначаємо максимальні внутрішні силові фактори при статичній дії навантаження $Q = 100\text{Н}$ (рис. 9.4б).

Ділянка BA , перетин A ; $M_{3Г.А} = 100 \cdot 1 = 100\text{Нм}$.

Ділянка AC , перетин C ; $M_{3Г.С} = 100 \cdot 2 = 200\text{Нм}$.

Ділянка CK , $M_{КР.С} = 200\text{Нм}$.

Будуємо епюри внутрішніх силових факторів (рис. 9.4в).

Визначаємо максимальні статичні напруження.

Перетин A :
$$\sigma_{СТ.А} = \frac{M_{3Г.А}}{W_{01}} = \frac{100}{6,28} = 15,9\text{МПа},$$

де
$$W_{01} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6,28\text{см}^3 = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{м}^3.$$

Перетин C :
$$\sigma_{СТ.С} = \frac{M_{3Г.С}}{W_{02}} = \frac{200}{10,7} = 18,7\text{МПа},$$

де
$$W_{02} = \frac{d \cdot D^2}{6} = \frac{4^3}{6} = 10,7\text{см}^3 = 10,7 \cdot 10^{-6} \text{м}^3.$$

Перетин CK :
$$\tau_{СТ.СК} = \frac{M_{КР}}{W_P} = \frac{200}{12,6} = 15,9\text{МПа},$$

де
$$W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 4^3}{16} = 12,6\text{см}^3 = 12,6 \cdot 10^{-6} \text{м}^3.$$

Визначаємо статичне переміщення перетину, на якій падає вантаж

$$\Delta l_{СТ} = \Delta l_{СТ.КР} + \Delta l_{СТ.3Г} = 0,398 + 0,00679 = 0,0466\text{м},$$

де $\Delta l_{СТ.КР}$ – переміщення перетину від деформації кручення ділянки CK

$$\Delta l_{СТ.КР} = \varphi \cdot 2 = 0,0199 \cdot 2 = 0,0398\text{м};$$

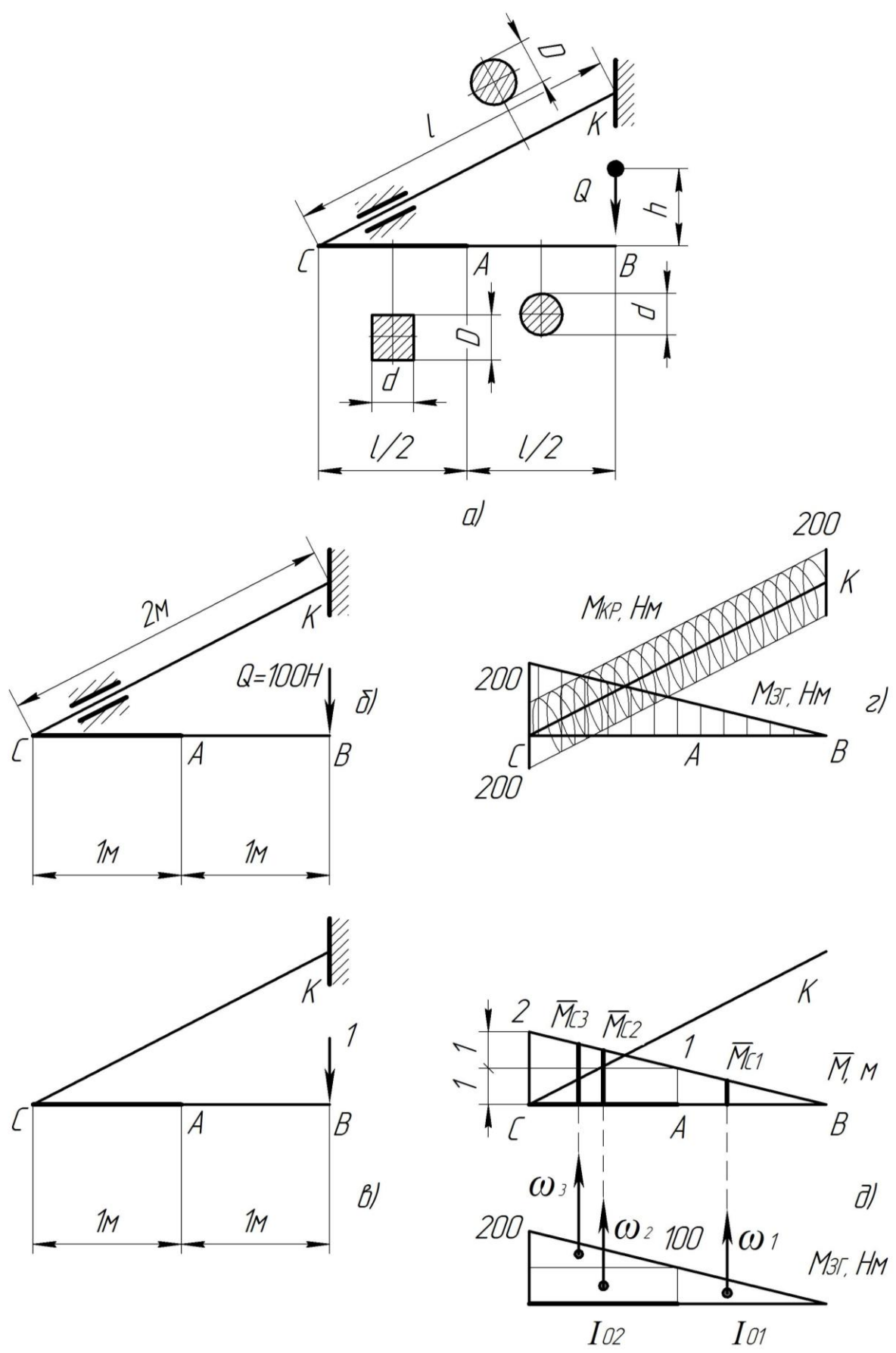


Рисунок 9.4

$$\varphi = \frac{M_{KP.CK} \cdot l_{CK}}{G \cdot I_P} = \frac{200 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,1 \cdot 10^{-8}} = 0,0199 \text{ рад};$$

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = 25,1 \text{ см}^4 = 25,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$\Delta l_{CT.3Г}$ – переміщення перетину B від деформації згину ділянки BC , визначаємо графоаналітичним методом розв'язку інтегралу Мора (рис. 9.4z)

$$\begin{aligned} \Delta l_{CT.3Г} &= \frac{\omega_1 \cdot M_{C1}}{E \cdot I_{01}} + \frac{1}{E \cdot I_{02}} (\omega_2 \cdot M_{C2} + \omega_3 \cdot M_{C3}) = \\ &= \frac{50 \cdot 0,667}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12,56 \cdot 10^{-8}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 21,3 \cdot 10^{-8}} (100 \cdot 1,5 + 50 \cdot 1,667) = \\ &= 6,79 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

де $\omega_1 = 0,5 \cdot 100 = 50$;

$M_{C1} = 0,667$;

$\omega_2 = 100 \cdot 1 = 100$;

$M_{C2} = 1,5$;

$\omega_3 = 50$;

$M_{C3} = 1 + 0,667 = 1,667$;

$$I_{01} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4 = 12,56 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{02} = \frac{d \cdot D^3}{12} = \frac{4^4}{12} = 21,3 \text{ см}^4 = 21,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначаємо динамічний коефіцієнт

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{0,0466}} = 5,74.$$

Визначаємо максимальні динамічні напруження та переміщення перетину B у момент падіння вантажу:

$$\sigma_{D.A} = \sigma_{CT.A} \cdot k_D = 15,9 \cdot 5,74 = 91,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{D.C} = \sigma_{CT.C} \cdot k_D = 18,7 \cdot 5,74 = 107 \text{ МПа};$$

$$\tau_{D.CK} = \tau_{CT.CK} \cdot k_D = 15,9 \cdot 5,74 = 91,3 \text{ МПа};$$

$$f_D = \delta_{CT} \cdot k_D = 0,0466 \cdot 5,74 = 0,268 \text{ м}.$$

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Варіанти задач для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Опір матеріалів». Частина 1 / Т.І. Рибак, А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2003. – 24с.
2. Дарков, А.В., Шпиро, Г.С. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1969.
3. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов / Г.М. Ицкович. – М.: Высшая школа, 1986. – 352с.
4. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Розрахунок кривих брусів. Розрахунок на стійкість центрально стиснутих стержнів» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2002. – 30с.
5. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Складний опір» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2001. – 32с.
6. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Статично невизначені системи» для напрямів підготовки «Інженерна механіка» і «Машинобудування» денної та заочної форм навчання / Т.І. Рибак, А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2007. – 35с.
7. Опір матеріалів; за ред. С.Е. Гарфа. – К.: Вища школа, 1972. – 230с.
8. Опір матеріалів. Теорія і практика розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів механізмів та споруд: навч. посібник / В.С. Кравчук, П.М. Калініченко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко; за ред. О.Ф. Дашенка. – Одеса: ВМВ, 2009. – 316с.
9. Опір матеріалів. Методичний посібник для виконання контрольних робіт. Частина 2. Для студентів денної та заочної форм навчання / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2011. – 92с.
10. Посацький, Л.С. Опір матеріалів/Л.С. Посацький. – Львів: в-во Львівського університету, 1973. – 440с.
11. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / Миролубов И.Н. и др. – М.: Высшая школа, 1974.
12. Сопротивление материалов: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных / А.В. Дарков, Б.Н. Кутуков. – М.: Высшая школа, 1985.
13. Хомик, Н.І. Технічна механіка: навчально-методичний посібник до курсової роботи / Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2013. – 192с.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

(повна назва вищого навчального закладу)

технічної механіки, сільськогосподарських машин і транспортних технологій

(повна назва кафедри, циклової комісії)

КУРСОВА РОБОТА

з Опору матеріалів

(назва дисципліни)

на тему: _____

Студента (ки) 3 курсу ХСс-31 групи

=(прізвище та ініціали)

напряму підготовки машинобудування
спеціальності Машини та обладнання
сільськогосподарського виробництва

Керівник _____

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала _____

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

Члени комісії

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

м. Тернопіль - 20 рік

ЗМІСТ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Задача №1. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу і стиску	3
Задача №2. Розрахунок статично невизначеної стержневої системи	7
Задача №3. Розрахунок вала на кручення	11
Задача №4. Побудова епюр перерізуючих сил і згинальних моментів для балки на двох опорах, розрахунок на міцність	15
Задача №5. Розрахунок статично невизначеної рами	20
Задача №6. Розрахунок вала на згин з крученням	25
Задача №7. Розрахунок на стійкість стиснутого стержня	30
Перелік використаної літератури	34

					КР ОМ 15-199.00.00.000 ПЗ			
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата	Зміст курсової роботи	Літ.	Арк.	Аркушів
Розроб.		Антонюк В.І					2	1
Перевір.		Довбуш А.Д.						
Консульт.								
Н. контр.								
Затв.		Рибак Т.І.				ФХМ, гр. ХВс-31		

ЗАДАЧА 3
Розрахунок вала на кручення

На вал (рис. 3.1) насаджено 5 шківів, які передають потужності P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta] = 2 \text{град}/\text{м}$.

Дано: $P_1 = 10 \text{кВт}$; $P_2 = 50 \text{кВт}$; $P_3 = 48 \text{кВт}$; $P_4 = 80 \text{кВт}$.
Матеріал вала – сталь 45, $[\tau] = 50 \text{МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{МПа}$. Частота обертання вала $\omega = 40 \text{с}^{-1}$.

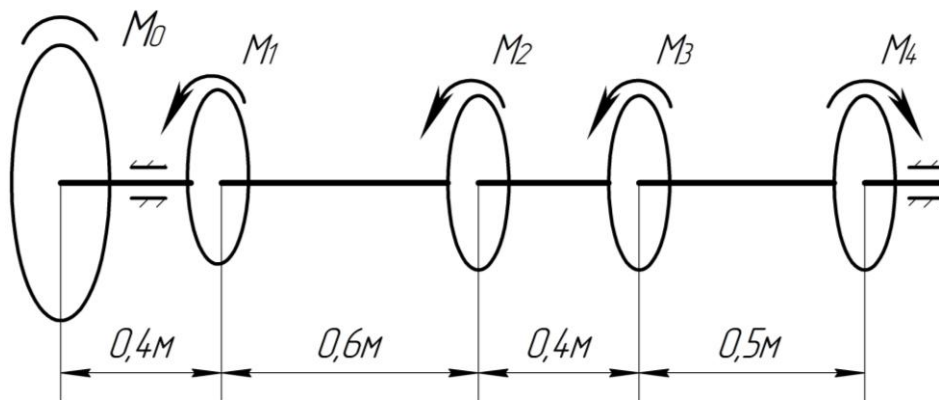


Рисунок 3.1

					КР ОМ 15-199.00.00.000 ПЗ			
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата				
Розроб.	Антонюк В.І.				Розрахунок вала на кручення	Літ.	Арк.	Аркшів
Перевір.	Довбунш А.Д.						11	5
Консульт.						ФХМ, гр. ХСв-21		
Н. контр.								
Затв.	Рибак Т.І.							

Розв'язування задачі 4

Потужність P_0 визначаємо з рівняння балансу потужностей, записаного з урахуванням напряму дії зосереджених моментів (тертям в опорах нехтуємо)

$$-P_0 + P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 0;$$

звідки

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 10 + 50 + 48 - 80 = 28 \text{ кВт.}$$

Скручувальні моменти M_i ($i=0,1,2,3,4$), які передаються кожним шківом, визначаємо за формулою

$$M_i = \frac{P_i}{\omega}.$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$M_0 = \frac{28}{40} = 0,7 \text{ кНм}; \quad M_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ кНм}; \quad M_2 = \frac{50}{40} = 1,25 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{ кНм}; \quad M_4 = \frac{80}{40} = 2,0 \text{ кНм}.$$

Крутні моменти M_{KPi} ($i=0,1,2,3,4$) на кожній ділянці вала відповідно рівні (рис. 3.2а):

$$M_{KP1} = -M_0 = -0,7 \text{ кНм};$$

$$M_{KP2} = -M_0 + M_1 = -0,7 + 0,25 = -0,45 \text{ кНм};$$

$$M_{KP3} = M_4 - M_3 = 2,0 - 1,2 = 0,8 \text{ кНм};$$

$$M_{KP4} = M_4 = 2,0 \text{ кНм}.$$

Використовуючи отримані значення, будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.2б).

З умови міцності на кручення визначаємо діаметр вала

$$d \geq 3 \sqrt{\frac{M_{KP}}{0,2 [\tau]}}.$$

Підставивши значення крутних моментів для кожної ділянки вала, отримаємо:

					КР ОМ 15-199.00.00.000 ПЗ	Адк.
Зм.	Адк.	№ докум.	Підп.	Дата		12

Продовження додатка 4

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 41,0 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{0,45}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 35,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 42,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{2,0}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 58,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо діаметри ділянок вала:

$$d_{1\partial} = 42\text{мм}; \quad d_{2\partial} = 36\text{мм}; \quad d_{3\partial} = 44\text{мм}; \quad d_{4\partial} = 58\text{мм}.$$

Виконуємо ескіз вала (рис. 3.2в).

Кути закручування окремих ділянок вала визначимо за формулою

$$\varphi_i = \frac{M_{KPi} \cdot l_i}{G \cdot I_{Pi}}, \quad i=1,2,3,4,$$

де l_i – довжина ділянки вала;

G – модуль зсуву, $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$;

I_{Pi} – полярний момент інерції поперечного перетину вала,

$$I_{Pi} = \frac{\pi \cdot d_{i\partial}^4}{32} \cong 0,1d_{i\partial}^4.$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$\varphi_1 = \frac{-0,7 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,042)^4} = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-0,45 \cdot 0,6}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,036)^4} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{0,8 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,044)^4} = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

					КР ОМ 15-199.00.00.000 ПЗ	Арк. 13
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підп.	Дата		

Закінчення додатка 4

$$\varphi_4 = \frac{2,0 \cdot 0,5}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,058)^4} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Визначаємо кути закручування перетинів вала B, C, D, E відносно перетину A :

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,10 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,08 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,08 + 1,10) \cdot 10^{-2} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-1,98 + 1,09) \cdot 10^{-2} = -0,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Будуємо епюру кутів закручування вала (рис. 3.2г), прийнявши за початок відліку перетин A .

Перевірку вала на жорсткість проведемо за умовою жорсткості

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де θ_{\max} – максимальний відносний кут закручування вала.

Визначимо відносні кути закручування на кожній ділянці вала:

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1}{l_1} = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{\varphi_2}{l_2} = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \theta_1 = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{\varphi_4}{l_4} = \frac{1,09 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо, що

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Отже, умову жорсткості забезпечено.

					КР ОМ 15-199.00.00.000 ПЗ	Арк. 14
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підп.	Дата		

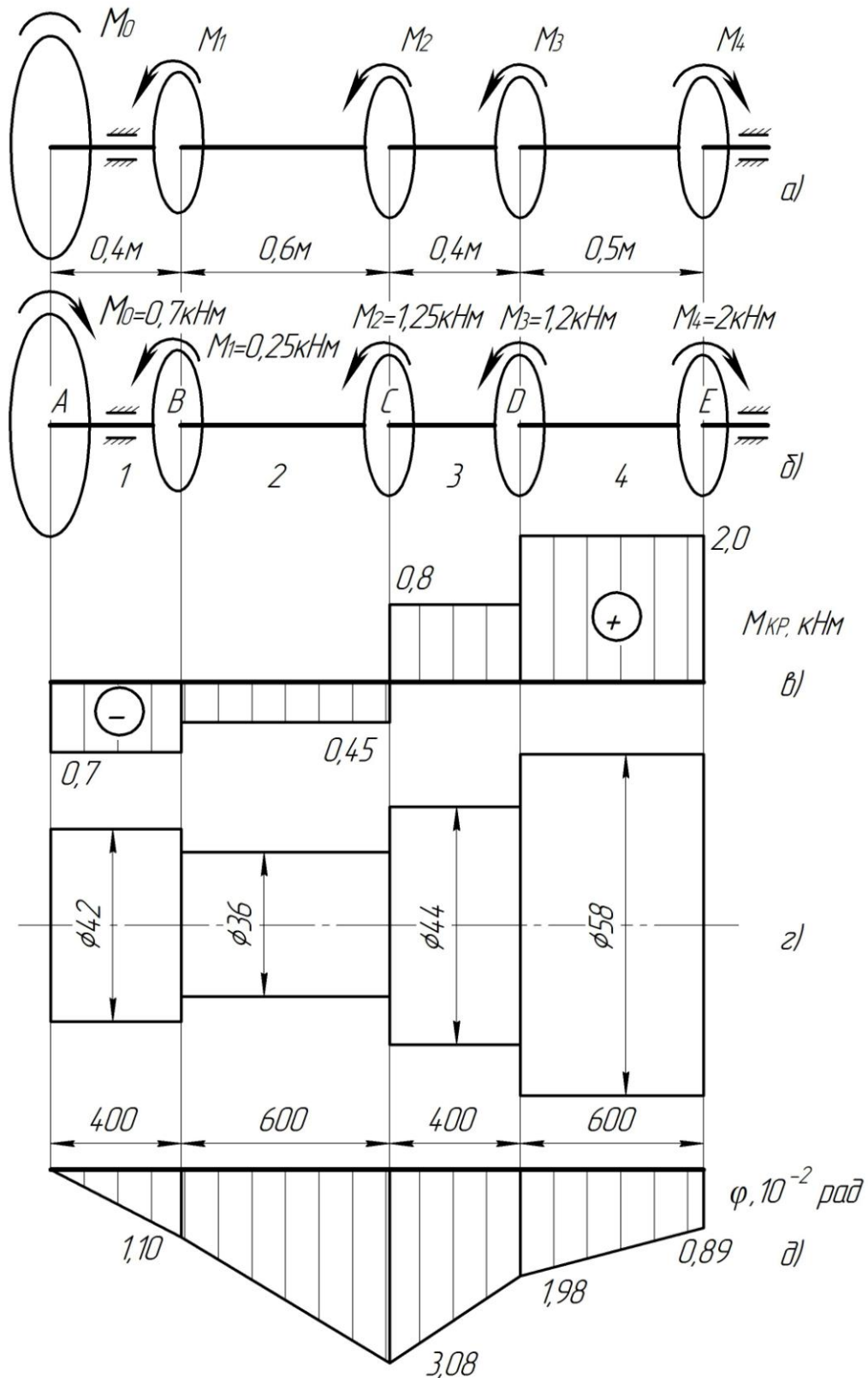
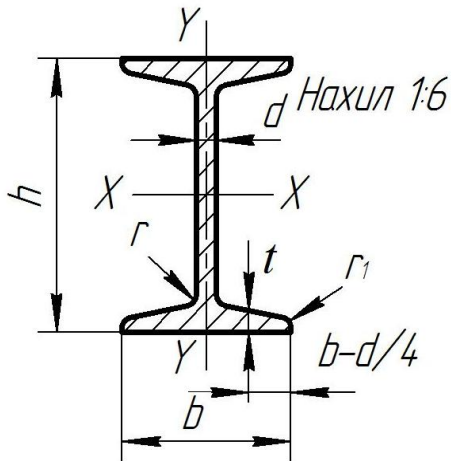


Рисунок 3.2

Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата

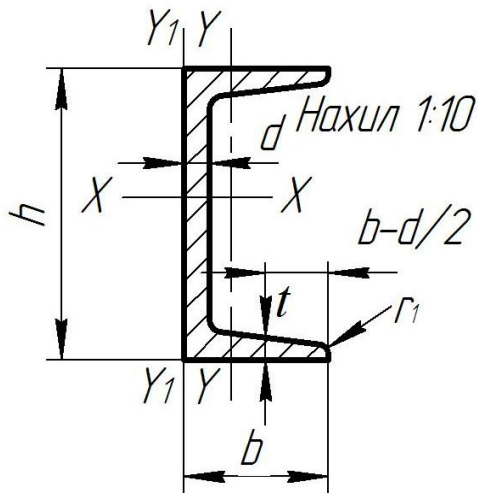
КР ОМ 15-199.00.00.000 ПЗ

Арк.
15



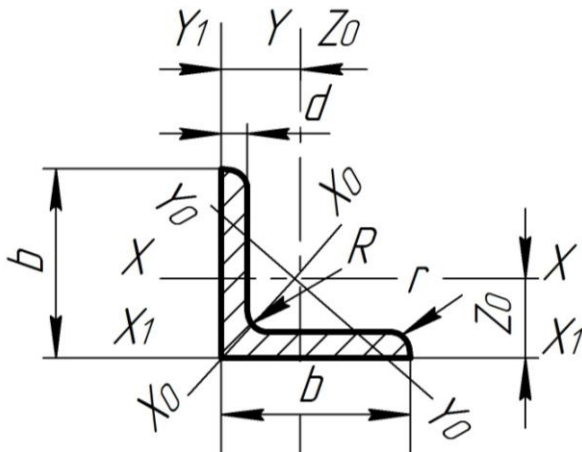
Сталь прокатна. Балки двотаврові. Сортамент. ГОСТ 8239-89

Но- мера про- філю	Розміри				Площа перетину A , $см^2$	Довідкові величини для осей						
	h	b	d	t		$x-x$				$y-y$		
						J_X	W_X	i_x	S_X	J_Y	W_Y	i_y
						$см^4$	$см^3$	$см$	$см$	$см^4$	$см^3$	$см$
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	665	85,9	3,05
45	450	160	6,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	500	170	9,5	15,2	97,3	39120	1560	20,1	899	1040	122	3,28
55	550	180	10,0	16,5	113	54810	1990	22,0	1150	1350	150	3,46
60	600	190	10,8	17,8	131	75010	2500	23,9	1440	1720	181	3,62



Сталь прокатна. Швелери. Сортамент. ГОСТ 8240-89

Номера профілю	Розміри				Площа перетину A , $см^2$	Довідкові величини для осей						
	h	b	d	t		$x-x$			$y-y$			z_0
						J_x	W_x	i_x	J_y	W_y	i_y	
						$см^4$	$см^3$	$см$	$см^4$	$см^3$	$см$	
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	45,4	11,0	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	63,3	13,8	1,87	1,80
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	86,0	17,0	2,04	1,94
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	113	20,5	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	208	31,6	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	642	73,4	3,23	2,75



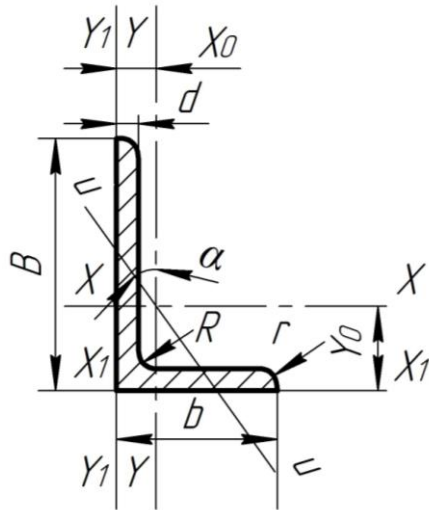
Сталь прокатна кутова рівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8509-86

Номера профілю	Розміри			Площа профілю A , $см^2$	Довідкові величини для осей		
	b	d	R		$x-x$		z_0
					J_x	i_x	
	мм				см	см	см
1	2	3	4	5	6	7	8
2	20 {	3	3,5	1,13	0,40	0,59	0,60
		4		1,46	0,50	0,58	0,64
2,5	25 {	3	3,5	1,43	0,81	0,75	0,73
		4		1,86	1,03	0,74	0,76
2,8	28	3	4	1,62	1,16	0,85	0,80
3,2	32 {	3	4,5	1,86	1,77	0,97	0,89
		4		2,43	2,26	0,96	0,94
3,6	36 {	3	4,5	2,10	2,56	1,10	0,99
		4		2,75	3,29	1,09	1,04
4	40 {	3	5	2,35	3,55	1,23	1,09
		4		3,08	4,58	1,22	1,13
4,5	45 {	3	5	2,65	5,13	1,39	1,21
		4		3,48	6,63	1,38	1,26
		5		4,29	8,03	1,37	1,30
5	50 {	3	5,5	2,96	7,11	1,55	1,33
		4		3,89	9,21	1,54	1,38
		5		4,80	11,2	1,53	1,42
5,6	56 {	3,5	6	3,86	11,6	1,73	1,50
		4		4,38	13,1	1,73	1,52
		5		5,41	16,0	1,72	1,57
6,3	63 {	4	7	4,96	18,9	1,95	1,69
		5		6,13	23,1	1,94	1,74
		6		7,28	27,1	1,93	1,78

Закінчення додатка 8

Сталь прокатна кутова рівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8509-86
(закінчення)

1	2	3	4	5	6	7	8
7	70	4,5	8,0	6,20	29,0	2,16	1,88
		5		6,86	31,9	2,16	1,90
		6		8,15	37,6	2,15	1,94
		7		9,42	43,0	2,14	1,99
		8		10,7	48,2	2,13	2,02
7,5	75	5	9	7,39	39,5	2,31	2,02
		6		8,78	46,6	2,30	2,06
		7		10,1	53,3	2,29	2,10
		8		11,5	59,8	2,28	2,15
		9		12,8	66,1	2,27	2,18
8	80	5,5	9	8,63	52,7	2,47	2,17
		6		9,38	57,0	2,47	2,19
		7		10,8	65,3	2,45	2,23
		8		12,3	73,4	2,44	2,27
9	90	6	10	10,6	82,1	2,78	2,43
		7		12,3	94,3	2,77	2,47
		8		13,9	106	2,76	2,51
		9		15,6	118	2,75	2,55
10	100	6,5	12	12,8	122	3,09	2,68
		7		13,8	131	3,08	2,71
		8		15,6	147	3,07	2,75
		10		19,2	179	3,05	2,83
		12		22,8	209	3,03	2,91
		14		26,3	237	3,00	2,99
		16		29,7	264	2,98	3,06
11	110	7	12	15,2	176	3,40	2,96
		8		17,2	198	3,39	3,00
12,5	125	8	14	19,7	294	3,87	3,46
		9		22,0	327	3,86	3,40
		10		24,3	360	3,85	3,45
		12		28,9	422	3,82	3,53
		14		33,4	482	3,80	3,61
		16		37,8	539	3,78	3,68
14	140	9	14	24,7	466	4,34	3,78
		10		27,3	512	4,33	3,82
		12		32,5	602	4,31	3,90



Сталь прокатна кутова нерівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8510-86

Номера профілю	Розміри				Площа профілю A , $см^2$	Довідкові величини для осей					
	B	b	d	R		$x-x$		$y-y$		x_1-x_1	y_1-y_1
						J_x	i_x	J_y	i_y	Відстань від центра тяжіння	
	мм					$см^4$	см	$см^4$	см	y_0	x_0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,86	0,42
3,2/2	32	20	3	3,5	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	1,08	0,49
			4		1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	1,12	0,53
4/2,5	40	25	3	4,0	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	1,32	0,59
			4		2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	1,37	0,63
4,5/2,8	45	28	3	5	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	1,47	0,64
			4		2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,51	0,68
5/3,2	50	32	3	5,5	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	1,60	0,72
			4		3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,65	0,76
5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	3,16	10,1	1,79	3,30	1,02	1,80	0,82
			4		3,58	11,4	1,78	3,70	1,02	1,82	0,84
			5		4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	1,86	0,88
6,3/4,0	63	40	4	7,0	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	2,03	0,91
			5		4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	2,08	0,95
			6		5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	2,12	0,99
			8		7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	2,20	1,07

Закінчення додатка 9

**Сталь прокатна кутова нерівнобічна. Сортамент. ГОСТ 8510-86
(закінчення)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7/4,5	70	45 {	4,5	7,5	5,07	25,3	2,23	8,25	1,28	2,25	1,03
			5		5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	2,28	1,05
7,5/5	75	50 {	5	8	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	2,39	1,17
			6		7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	2,44	1,21
			8		9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	2,52	1,29
8/5	80	50 {	5	8	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	2,6	1,13
			6		7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	2,65	1,17
9/5,6	90	56 {	5,5	9	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	2,92	1,26
			6		8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	2,95	1,28
			8		11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	3,04	1,36
10/6,3	100	63 {	6	10	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	3,23	1,42
			7		11,1	113	3,19	35,0	1,78	3,28	1,46
			8		12,6	127	3,18	39,2	1,77	3,32	1,50
			10		15,5	154	3,15	47,1	1,75	3,40	1,58
11/7	110	70 {	6,5	10	11,4	142	3,53	45,6	2	3,55	1,58
			7		12,3	152	3,52	48,7	1,99	3,57	1,6
			8		13,9	172	3,51	54,6	1,98	3,61	1,54
12,5/8	125	80 {	7	11	14,1	227	4,01	73,7	2,29	4,01	1,8
			8		16	256	4	83,0	2,28	4,05	1,84
			10		19,7	312	3,98	100	2,26	4,14	1,92
			12		23,4	356	3,95	117	2,24	4,22	2
14/9	140	90 {	8	12	18	364	4,49	120	2,58	4,49	2,02
			10		22,2	444	4,47	146	2,56	4,58	2,12

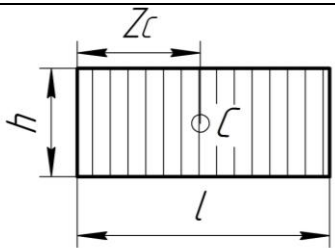
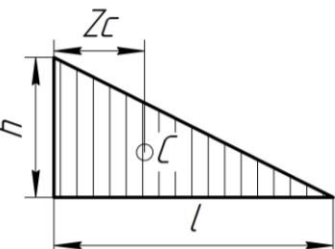
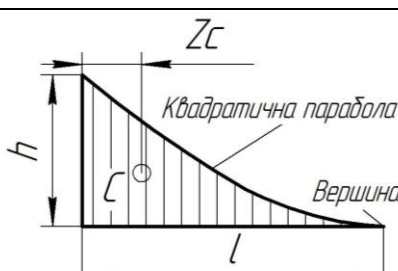
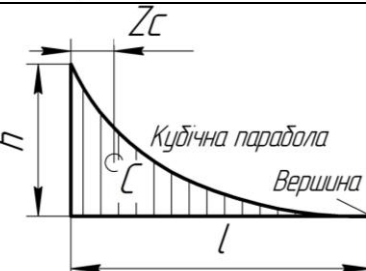
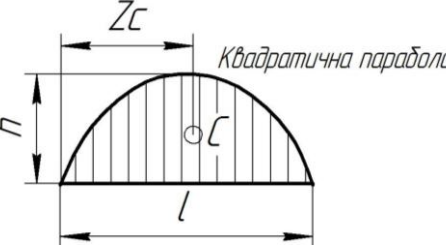

Додаток 10

Коефіцієнти зменшення основного допустимого напруження

Гнучкість бруса $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок Ст.0С, Ст.2, Ст.3, Ст.4.	Сталь Ст.5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Додаток 11

Площі ω і координати z_C центра тяжіння простих фігур

Фігура	ω	z_C
	$l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{3}l \cdot h$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{1}{4}l \cdot h$	$\frac{1}{5}l$
	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{3}{8}l$

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

**Кафедра технічної механіки,
сільськогосподарських машин і транспортних технологій**

**Довбуш Анатолій Дмитрович
Хомик Надія Ігорівна
Довбуш Тарас Анатолійович
Рубінець Наталія Андріївна**

ОПР МАТЕРІАЛІВ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

до курсової роботи

для студентів зі скороченим терміном навчання

Комп'ютерний набір: Рубінець Наталя

Графічне оформлення: Олендер Назар

Наклад 100прим.