Цепенюк М.И.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА СИНХРОННОГО ВРАЩЕНИЯ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ РАБОЧИМ ВАЛОМ С УЧЕТОМ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В АСИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯХ, ТРАНСФОРМАТОРЕ И МЕХАНИЧЕСКОЙ ПОДСИСТЕМЕ

Многодвигательные механизмы, оборудованные асинхронными электродвигателями, имеют широкое распространение в народном хозяйстве. Согласованная работа двигателей обеспечивается многими способами, но наиболее простой и надежный из них – это оборудование механизмов системой электрического рабочего вала (ЭРВ), которая образуется в результате подключения обмоток роторов асинхронных двигателей к общему трехфазному сопротивлению.

В большинстве случаев динамика механизмов, оборудованных ЭРВ, исследуется с учетом электромагнитных переходных процессов в двигателях. В случае, когда мощность двигателей соизмерима с мощностью силового трансформатора, учитываются переходные процессы в трансформаторе. Упругие механические колебания при определенных соотношениях механических и электрических параметров также существенно влияют на переходные процессы в механизмах синхронного вращения. Поэтому целью данной работы есть создание математической модели электромеханической системы, оборудованной ЭРВ, уравнения которой учитывают электромагнитные переходные процессы в асинхронных двигателях, силовом трансформаторе и механической подсистеме.

Система уравнений, описывающих переходные процессы в исследуемом механизме синхронного вращения с ЭРВ, состоит из уравнений элементов, структурных уравнений, отражающих способ электрического соединения элементов, а также уравнений движения сосредоточенных масс, соединенных невесомыми упругими звеньями. В качестве элементов в данном случае фигурируют асинхронные двигатели, трансформатор и дополнительное активное сопротивление в цепи роторов этих двигателей.

Уравнения движения m–массовой механической подсистемы запишем в матрично-векторном виде

$$\dot{\omega} = J^{*}\left(M - B\omega - C\varphi\right); \qquad \dot{\varphi} = \omega, \tag{1,2}$$

где ω, φ – m-мерные векторы-функции (матрицы-столбцы) угловых скоростей и углов поворота масс системы с компонентами

$$\omega = [\omega_1(t), \omega_2(t), ..., \omega_m(t)]' \ ; \ \varphi = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)]' \ .$$

J^* – $(m \times m)$– диагональная матрица моментов инерции масс системы с постоянными элементами: $\{J^*\}i,i = \frac{1}{J_i}$, J_i – момент инерции i-той массы (i=1,2,…,m).

M – m-мерная вектор-функция внешнего воздействия с компонентами $M = [M_1, M_2, ..., M_m]'$.

B, C – матрицы коэффициентов рассеяния энергии $\beta_{i,j}$ и жесткостей упругих звеньев $c_{i,j}$ при j≠ i имеют вид

B=

$\sum_{j=1}^{m} \beta_{1,j}$	$-\beta_{1,2}$	- - -	$-\beta_{1,m}$
$-\beta_{1,1}$	$\sum_{j=1}^{m} \beta_{2,j}$	- - -	$-\beta_{2,m}$
- - -	- - -	- - -	- - -
$-\beta_{m,1}$	$-\beta_{m,2}$	- - -	$\sum_{j=1}^{m} \beta_{m,j}$

C=

$\sum_{j=1}^{m} c_{1,j}$	$-c_{1,2}$	- - -	$-c_{1,m}$
$-c_{2,1}$	$\sum_{j=1}^{m} c_{2,j}$	- - -	$-c_{2,m}$
- - -	- - -	- - -	- - -
$-c_{m,1}$	$-c_{m,2}$	- - -	$\sum_{j=1}^{m} c_{m,j}$

Коэффициенты рассеяния энергии и жесткости упругих звеньев есть кусочно-линейные функции

$$\beta_{i,j} = 0, \ c_{i,j} = 0, \text{ если } |\varphi_i - \varphi_j| \le \Delta_{i,j} ;$$

$$\beta_{i,j} = \beta^*_{i,j}, \ c_{i,j} = c^*_{i,j}, \text{ если } |\varphi_i - \varphi_j| \ge \Delta_{i,j} ,$$

где $\Delta_{i,j}$ – величина зазора в упругом звене $i - j$; $\beta^*_{i,j}$ – коэффициент рассеяния энергии, $c^*_{i,j}$ – жесткость упругого звена при выбранном зазоре.

Уравнения асинхронного электродвигателя запишем в фазных координатах с учетом насыщения магнитной цепи [1]

$$\dot{\psi}_S = U_S - r_S i_S \ ; \ \dot{\psi}_R = U_R - r_R i_R \ ; \ \dot{\Psi}_S = G_S \dot{\psi}_S + G_R \dot{\psi}_R + G_O \ ; \ \Psi_R = G_{SR} \Psi_S \ ; \ (3,4,5,6)$$

$$i_S = \alpha_S (\psi_S - \Psi_S) ; \ i_R = \alpha_R (\psi_R - \Psi_R) , \ (7,8)$$

где h (h=$\psi_S,\psi_R,\Psi_S,\Psi_R,U_S,U_R,i_S,i_R$) = colon($h_A,h_R$); $\psi_j,\Psi_j,U_j,i_j(j=s,R)$ – матрицы – столбцы соответственно полных и рабочих потокосцеплений, напряжений, токов фаз статора (j=s) и ротора (j=R); r_S,r_R – сопротивления обмоток статора и ротора; α_S,α_R – величины, обратные к индуктивностям рассеивания соответствующих обмоток; G_S,G_R – матрицы связи рабочих потокосцеплений фаз статора с полными потокосцеплениями фаз статора и ротора; G_0 – матрица-столбец э.д.с. вращения фаз статора; G_{SR} – матрица связи рабочих потокосцеплений фаз статора и ротора.

Матрицы GS, GR , GO и GSR имеют вид

$$G_S=\alpha_S\cdot G^*;\ G_R=\alpha_R\cdot G^*\cdot G_{RS};\ G_O=\alpha_R\cdot G^*\cdot \dot{G}_{RS}\cdot\psi_R;\ G^*=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} T+g_A & g_{AB}\\ g_{BA} & T+g_B\end{bmatrix};$$

$$G_{RS}=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sin\left(\varphi_r+\frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\varphi_r\\ \sin\varphi_r & -\sin\left(\varphi_r-\frac{2}{3}\pi\right)\end{bmatrix};\ G_{SR}=\begin{bmatrix}-\sin\left(\varphi_r-\frac{2}{3}\pi\right) & \sin\varphi_r\\ -\sin\varphi_r & \sin\left(\varphi_r+\frac{2}{3}\pi\right)\end{bmatrix},$$

где

$$g_A=b\Psi_{SA}(2\Psi_{SA}+\Psi_{SB});\ g_{AB}=b\Psi_{SA}\cdot(\Psi_{SA}+2\Psi_{SB});$$
$$g_{BA}=b\Psi_{SB}(2\Psi_{SA}+\Psi_{SB});\ g_B=b\Psi_{SB}(\Psi_{SA}+2\Psi_{SB}).$$

Здесь

$$b=\frac{2}{3}(R-T)\frac{1}{\Psi_m^2};\ T=\frac{1}{\tau+\frac{3}{2}(\alpha_S+\alpha_R)};\ R=\frac{1}{\rho+\frac{3}{2}(\alpha_S+\alpha_R)},$$

величины τ и ρ определяются по кривой намагничивания машины $i_m=i_m(\Psi_m)$

$$\tau=\frac{i_m}{\Psi_m},\ \rho=\frac{di_m}{d\Psi_m}.$$

Рабочее потокосцепление определяем по формуле

$$\Psi_m=2\sqrt{\frac{1}{3}\left(\Psi_{SA}^2+\Psi_{SA}\cdot\Psi_{SB}+\Psi_{SB}^2\right)}.$$

Угол поворота ротора двигателя получаем из уравнений движения

$$\dot{\omega}_r=\frac{P}{J_n}(M_э-M_н);\ \dot{\varphi}_r=\omega_r, \qquad (9,10)$$

где ω_r, φ_r – скорость вращения ротора в эл. рад./с и угол поворота в эл. рад.; Р – число пар магнитных полюсов; J_n – момент инерции ротора; $M_э$, $M_н$ –

электромагнитный момент двигателя и момент нагрузки. Между скоростями вращения ротора $\omega_э$ (в эл. рад./с) и ω_R (в рад./с) существует взаимосвязь

$$\omega_э = P \cdot \omega_R .$$

Момент двигателя определяем по формуле

$$M_э = 2\alpha_R P\left[\Psi_{SR}\left(\psi_{RA}\sin\left(\varphi_э + \frac{2}{3}\pi\right) - \psi_{RB}\sin\varphi_э\right) - \Psi_{SA}\left(\psi_{RA}\sin\varphi_э - \psi_{RB}\sin\left(\varphi_э - \frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]. \quad (11)$$

Уравнения трансформатора запишем в виде[2]

$$\dot{\psi}_1 = U_1 - R_1 i_1;\ \dot{\psi}_2 = U_2 - R_2 i_2;\ \dot{\Psi} = G_1\dot{\psi}_1 + G_2\dot{\psi}_2; \quad (12,13,14)$$

$$i_1 = \alpha_1(\psi_1 - \Psi);\ i_2 = \alpha_2(\psi_2 - c\Psi), \quad (15,16)$$

где $h(h = \psi_1, \psi_2, \Psi, U_1, U_2, i_1, i_2) = colon(h_A, h_B)$; ψ_j, U_j, i_j – матрицы-столбцы фазных полных потокосцеплений, напряжений и токов первичной (j=1) и вторичной (j=2) обмоток; Ψ – матрица-столбец рабочих потокосцеплений; R_1, R_2 – сопротивления обмоток; α_1, α_2 – величины, обратные к индуктивностям рассеяния; G_1, G_2 – матрицы связи рабочих и полных потокосцеплений; c – коэффициент трансформации. Матрицы G_1, G_2 определяем по формуле

$$G_1 = \alpha_1 G;\ G_2 = c\alpha_2 G,$$

причем

$$G = \frac{1}{\alpha_A\alpha_B + (\alpha_A + \alpha_B)\alpha_C}\begin{pmatrix} 2\alpha_B + \alpha_C & \alpha_B - \alpha_C \\ \alpha_A - \alpha_C & 2\alpha_A + \alpha_C \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что обмотки статоров двигателей параллельно подключены к вторичной обмотке трансформатора, структурные уравнения ЭМС имеют вид

$$U_{S1} = U_{S2} = ... = U_{Sn} = U_2;\ \sum_{j=1}^{n} i_{Sj} = i_2, \quad (17,18)$$

где n – количество двигателей.

Совместное решение уравнений (3), (5), (7), (13), (14), (16), (17), (18) представим в виде [3]

$$U_2 = \left[\alpha_2(1 - cG_2) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{Sj}(1 - G_{Sj})\right]^{-1} x$$
$$x\left[\alpha_2 c G_1 \dot{\psi}_1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{Sj}(G_{Rj}\dot{\psi}_{Rj} + G_{0j}) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{Sj}(1 - G_{Sj}) x (R_2 i_2 - r_{Sj} i_{Sj})\right]. \quad (19)$$

Уравнение сопротивления электрического уравнительного вала имеет вид [4]

$$U = R_0 \mathrm{i}, \quad (20)$$

где U, i – матрицы-столбцы напряжений и токов; R_0- сопротивление фазы

Используя законы токов и напряжений Кирхгофа, запишем структурные уравнения системы [4]

$$U_{Rj} = -U; \ \sum_{j=1}^{n} i_{Rj} = i; \ \mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n}, \quad (21,22)$$

где $h_j(h_j = U_{Rj}, i_{Rj}) = colon(h_{1j}, h_{Bj}); U_{Rj}, i_{Rj}$ - матрицы-столбцы соответственно напряжений и токов фаз ротора j-го двигателя.

С учетом (22) выражение (20) примет вид

$$U = R_0 \sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}_{Rj}. \quad (23)$$

Совместное решение уравнений (4) и (21) для j –го двигателя имеет вид [4]

$$\dot{\psi}_{Rj} = -(U + r_{Rj} i_{Rj}), \ \mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n}. \quad (24)$$

Уравнения (1), (2), (12)-(17), (19), (23), (24) совместно с n уравнениями (3), (5)-(8), (9)-(11) образуют математическую модель n-двигательного механизма синхронного вращения, оборудованного электрическим рабочим валом с учетом электромагнитных переходных процессов и насыщения магнитной цепи в асинхронных двигателях, силовом трансформаторе и упругих колебаний. Все дифференциальные уравнения представлены в нормальной форме Коши. Интегрируя данную систему уравнений при разных начальных условиях и параметрах системы, можно исследовать влияние электромагнитных и механических переходных процессов на динамические режимы работы механизмов синхронного вращения с ЭРВ.

Литература

1. Чабан В.И. Дифференциальные уравнения насыщенной неявнополюсной машины в физических координатах. – Известия вузов СССР. Электромеханика, 1977, №4.
2. В.И. Чабан. Методы анализа электромеханических систем. – Львов: Высшая школа, 1985.-192 с.
3. Цепенюк М.И. Математическая модель приводного механизма с учетом переходных процессов в асинхронных двигателях и трансформаторе. – Оралдың Ғылым жаршысы. №7(22). Қазақстан, Орал каласы, 2009, с.57-62.
4. Чабан В.И.,Цепенюк М.И. Математическая модель рабочего электрического вала. – Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1980. №4, с. 420-421.