РОЛЬ ЛОКАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В УСТАЛОСТНОМ РАЗРУШЕНИИ МЕТАЛЛОВ

Т.Ю.Яковлева

THE ROLE OF THE LOCAL PLASTIC DEFORMATION IN THE FATIGUE FRACTURE OF METALS

T.Yu. Yakovleva

Институт проблем прочности Национальной академии наук Украины, Киев

Abstract. The higher the degree to which an analytical model of the fatigue damages accumulation accounts local and heterogeneous in time and material volume nature of the process, the wider is the range of materials and lives it covers. In particular, based on the analysis of the mathematical structure of the equation for S-N curves given in the paper, the author shows that the value of physical limit of endurance is determined by the parameters characterizing the development of local plastic deformation and the value of true limit elasticity. The parameters characterizing the development of local plastic deformation reflect the interconnection between the fatigue and inelasticity phenomena. The dependence of fatigue limit on the frequency $\sigma_a(f)$, cycles asymmetry ratio $\sigma_a(R)$, and size of structural elements $\sigma_a(d)$ for a given number of cycles N_{Fr}, as well as the dependence of frequency on the cyclic life $N_{Fr}(f)$ for a specified stress level σ_a = const are caused by the dependence of the development of the plastic damage localization areas on the listed parameters.

Усталостное разрушение металлов, как известно, является результатом процесса постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений или деформаций. Отличительными особенностями этого процесса являются локальный и неоднородный во времени и по объему материала характер протекания. Практически все известные и развиваемые в последнее время модели усталостного разрушения в области как мало-, так и многоцикловой усталости, в той или иной степени учитывают указанные особенности, о чем свидетельствуют работы [1 – 3], в которых выполнено обобщение большого объема экспериментальных и теоретических исследований. Анализ приведенных в этих и других работах уравнений усталости показывает, что чем в большей мере модель учитывает указанные особенности, тем больший класс материалов и диапазон долговечностей она охватывает.

Одной из первых моделей является гипотеза линейного накопления повреждений, позднее названная правилом Пальмгрена-Майнера. В настоящее время для условий одноосного, многоосного, пропорционального и непропорционального нагружения используют модели, основанные на гипотезе нелинейного накопления усталостных повреждений, которые учитывают зависимость от напряжений [4]. Эти модели, как правило, ограничены материалами, для которых они разработаны. Отражая немонотонный характер процессов на микроуровне, ограниченностью применения, они показывают необходимость учитывать зависимость этих процессов от вида материала и условий нагружения.

Модели, развиваемые на базе первоначального соотношения Коффина – Мэнсона, учитывают только пластическую составляющую циклических деформаций или раздельное влияние упругой и пластической составляющих, которые зависят от числа циклов нагружения. Такие уравнения также учитывают факт постепенного накопления повреждений и его неоднородный по объему материала характер. В отличие от уравнений Коффина-Мэнсона, в соотношении Лэнджера [5] принято, что упругая деформация постоянна, соответствует пределу выносливости и не зависит от числа циклов. В результате оно лучше описывает результаты испытаний в интервале долговечностей $1 \cdot 10^4$ ... $1 \cdot 10^5$ циклов [1] и отражает асимптотическое приближение кривой усталости к физическому пределу выносливости на бесконечности, что отсутствует в уравнении Коффина-Мэнсона. Это соотношение фактически отражает упругое деформирование основного массива материала и решающую роль локальной пластической деформации, однако, как и предыдущие модели, не учитывает ее кинетику. Кроме того, упомянутые уравнения и аналогичные им по структуре неудовлетворительно соответствуют экспериментальным данным в области усталости металлов на базе 10^7 циклов [6].

Энергетические критерии предполагают, что разрушение наступает в тот момент, когда суммарная необратимо рассеянная энергия достигает критического значения, равного предельной работе деформации при статическом нагружении [7]; энергия, связанная с упрочнением материала, достигает своего предельного значения [8, 9]; полная энергия диссипации, определяемая суммарной площадью петли гистерезиса, достигает критического значения за N_{Fr} циклов [11, 12]. Эти критерии, не выделяя тепловое рассеяние энергии, отражают роль суммарной накопленной пластической деформации, немонотонный характер ее развития (если содержат коэффициент деформационного упрочнения, как, например [7]), но, как и уравнения на базе деформационных критериев, не отражают одну из характерных особенностей кривой усталости – асимптотическое приближение к физическому пределу выносливости базах нагружения, стремящихся к бесконечности.

Неоднородность свойств материала на зеренном и субзеренном уровнях учитывают статистические модели, используемые для оценки вероятности появления усталостных микротрещин. За основу принимают неоднородность химического состава, напряженного состояния, механических свойств отдельных зерен металла [12]; распределения зерен по размерам [13, 14]; различные комбинации указанных параметров [15, 16]. Отражая реальную зависимость областей локализации деформации от свойств материала на микроуровне, указанные модели не учитывают изменение этих свойств в процессе циклического нагружения.

Еще одним фундаментальным свойством усталости является зависимость храктеристик прочности материала от параметров цикла. Чаще всего это – коэффициент асимметрии и частота. Немногочисленные модели, учитывающие частоту, либо содержат ее в неявном виде [17] либо распространяются на один [18] или несколько материалов [19], либо трудноприменимы на практике [20]. Исключение составляют эмпирические соотношения для частотной зависимости пределов выносливости и пороговых коэффициентов интенсивности напряжений, справедливые для широкого спектра материалов в диапазоне частот от 100 Гц до 10 кГц [30, 31].

Приведенный краткий обзор основных модельных представлений показывает, что все более тщательный учет отдельных аспектов усталости является недостаточным условием для получения общей картины. Для решения этой задачи необходимо разделить общие закономерности усталостного разрушения как явления в целом и особенности, связанные с изменением тех или иных параметров нагружения или характеристик материала. Выполнить это позволяет последовательное изменение одного из параметров нагружения или исходного состояния материала при сохранении постоянных значений остальных и последующий сравнительный анализ результатов. Кроме того, указанный подход дает возможность установить взаимосвязь эволюции физических и структурных характеристик с усталостными свойствами материала.

В работах [22–24] приведены результаты систематических исследований, выполненных на различных классах металлических материалов по единой методологической схеме, позволившей выявить влияние вида и исходной структуры материала и конкретных условий нагружения, в частности, частоты и коэффициента асимметрии циклов, и установить общие закономерности, присущие исследованным материалам, во всем диапазоне условий нагружения. К общим закономерностям относятся [22]: 1) структура большей части материала изменяется очень слабо или практически не претерпевает изменений, то есть в процессе циклического нагружения деформация основного объема (массива) материала носит обратимый или почти обратимый характер; 2) накопление необратимых структурных изменений осуществляется в локальных микрообъемах, которые в результате приобретают свойства, и, как следствие, внутреннюю энергию, отличные от остального материала; 3) возрастание степени локализации структурной перестройки материала по мере увеличения продолжительности нагружения, которое также подтверждено прямыми измерениями деформаций по фиксированным микрообъемам [25], анализом магнитных шумов Баркхаузена [26], Фурье-методами [27, 28]; 4) между основным массивом материала и областями накопления необратимых структурных изменений, то есть областями локализации пластической деформации (областями ЛПД), существует граничная поверхность, энергия которой изменяется по мере увеличения числа циклов нагружения; 5) размер областей ЛПД зависит от локального напряженного состояния, микромеханизмов пластической деформации, относительной долговечности и частоты нагружения. Локальное разрушение наступает в результате исчерпания способности материала указанных микрообъемов к дальнейшей пластической деформации, чему соответствуют критические характеристики структурного состояния и средний линейный размер.

На основании проведенных исследований предложена модель поведения металлического материала, подвергающегося циклическому нагружению с частотой f со следующими начальными допущениями: 1) материал области ЛПД представляет собой сплошную среду, физико-механические свойства которой, в том числе удельная поверхностная энергия α, являются функцией координат и времени; 2) текущее значение среднего радиуса области линейно зависит от средней скорости процессов микропластической деформации ν_0 и времени, выраженного через период цикла $T = 1/f$; и текущее число циклов N; 3) конкретный характер и механизмы структурной эволюции области находят свое отражение в изменении величины удельной поверхностной энергии. В результате получено уравнение, связывающее амплитуду нагрузки с числом циклов до появления микротрещины N_{Fr}, с учетом частоты нагружения f и величины коэффициента асимметрии циклов R:

$$\sigma_a = \sigma_e + a_\sigma \sqrt{f} + b_\sigma \sqrt{\frac{1}{N_{Fr}}} + c_\sigma \sqrt{\frac{f}{N_{Fr}}}, \qquad (1)$$

где

$$a_\sigma = k\sqrt{\frac{E_\omega tg\varphi}{3v_0} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial N}}; \quad b_\sigma = k\sqrt{\frac{E_r}{3v_0} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial T}}; \quad c_\sigma = k\sqrt{\frac{E_\omega tg\varphi}{3} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v_0}}; \sigma_e = k\sigma_{e/-1};$$

$$k = 1 - k_{a/R}\frac{1+R}{2},$$

E_ω, E_i – динамический и релаксированный модули упругости соответственно, φ – угол сдвига фаз между напряжением и деформацией, $k_{a/R}$ характеризует чувствительность материала к статической составляющей напряжений.

Делением всех членов уравнения (1) на величину соответствующего модуля упругости получено аналогичное соотношение для функциональной зависимости величины циклической деформации ε_a от f и N_{Fr}

$$\varepsilon_a = \varepsilon_e + a_\varepsilon \sqrt{f} + b_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{N_{Fr}}} + c_\varepsilon \sqrt{\frac{f}{N_{Fr}}}, \quad a_\varepsilon = \frac{a_\sigma}{E_\omega}; \; b_\varepsilon = \frac{b_\sigma}{E_r}; \; c_\varepsilon = \frac{c_\sigma}{E_\omega}. \qquad (2)$$

Соотношения (1), (2) приводятся к простейшему виду, представляющему собой уравнения кривой усталости с двумя коэффициентами для заданных условий мягкого и жесткого нагружения соответственно:

$$\sigma_a = \sigma_{ue} + \frac{C_f}{\sqrt{N_{Fr}}}\ , \ \sigma_{ue} = \sigma_e + a_\sigma\sqrt{f}\ , \qquad C_f = b_\sigma + c_\sigma\sqrt{f}\ . \tag{3}$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ue} + \frac{C_f}{\sqrt{N_{Fr}}}\ , \ \varepsilon_{ue} = \varepsilon_e + a_\varepsilon\sqrt{f}\ , \qquad C_f = b_\varepsilon + c_\varepsilon\sqrt{f}\ . \tag{4}$$

Полученные уравнения кривой усталости представляют собой уравнения состояния материала для момента времени, непосредственно предшествующего старту усталостной трещины, с учетом частоты и коэффициента асимметрии цикла.

Рассмотрим математическую структуру уравнений (1), (2) и сравним результаты анализа с экспериментальными данными.

Из физического обоснования модели и условий энергетического баланса области ЛПД следует [23], что физические и кристаллографические особенности процессов деформации могут быть охарактеризованы параметрами ν_0, $\partial\alpha/\partial N$, $\partial\alpha/\partial T$ и $\partial\alpha/\partial\nu_0$. Так, частная производная удельной поверхностной энергии области ЛПД по числу циклов $\partial\alpha/\partial N$ характеризует результирующее изменение α за цикл нагрузки; $\partial\alpha/\partial T$ – скорость изменения α в течение одного цикла нагружения; $\partial\alpha/\partial\nu_0$ – изменение α при изменении ν_0 в течение всего времени нагружения, предшествующего рассматриваемому циклу. В уравнениях (1) и (2) указанные параметры относятся к состоянию материала (в окрестности области ЛПД), соответствующему максимуму изменения свободной энергии, т. е. к циклу старта трещины.

Из выражений (1), (2) видно, что

$$\frac{d\sigma_a}{dN_{Fr}} = -\frac{1}{2}N_{Fr}^{-1.5}\left(b_\sigma + \sqrt{f}c_\sigma\right); \qquad \frac{d\varepsilon_a}{dN_{Fr}} = -\frac{1}{2}N_{Fr}^{-1.5}\left(b_\varepsilon + \sqrt{f}c_\varepsilon\right),$$

то есть σ_a и ε_a являются убывающими функциями от N_{Fr} с асимптотами

$$\sigma_a\Big|_{N_{Fr}\to\infty} \to \sigma_e + a_\sigma\sqrt{f} = \sigma_{ue}\ ; \ \varepsilon_a\Big|_{N_{Fr}\to\infty} \to \varepsilon_e + a_\varepsilon\sqrt{f} = \varepsilon_{ue}\ ; \ \frac{\partial\alpha}{\partial N}\Big|_{N_{Fr}\to\infty} \neq 0\ . \tag{5}$$

Отсюда следует, что $a_\varepsilon\sqrt{f}$ характеризует связанную с изменением энергии за цикл нагрузки частотнозависимую составляющую деформации, которая не приводит к разрушению. Перечисленные характеристики свойственны обратимой неупругой деформации [29]. Поэтому выполнение условия (5) означает, что если $\sigma_a = \sigma_{ue}$, то под действием входящих в уравнение факторов разрушение не произойдет при сколь угодно большом числе циклов нагрузки заданной частоты, т. е. поведение материала остается упругим сколь угодно долго для заданной частоты нагружения. Тогда в соотношениях (1) и (2) независящие от скорости нагружения слагаемые σ_e и ε_a представляют собой напряжение и упругую деформацию, распространяющиеся со скоростью звука для данного материала и уровня внешней нагрузки. А слагаемые $a_\sigma\sqrt{f}$ и $a_\varepsilon\sqrt{f}$ характеризуют величины упругого последействия для напряжения и деформации [29]. Отсюда следует, что неограниченный или физический предел выносливости это – величина напряжений, обеспечивающих обратимое деформирование материала с учетом сдвига фаз φ между ε и σ при заданной частоте нагружения.

Если в интервале некоторых значений $N_{Fr1} \le N_{Fr} \le N_{Fr2}$ выполняется условие

$$\frac{d\sigma_a}{dN_{Fr}}\Big|_{\left(b_\sigma+\sqrt{f}c_\sigma\right)\to 0} \to 0; \qquad \sigma_a\Big|_{\substack{\left(b_\sigma+\sqrt{f}c_\sigma\right)\to 0\\ N_{Fr1}\le N_{Fr}\le N_{Fr2}}} \to \sigma_e + a_\sigma\sqrt{f} = \sigma_{tr}\ ; \tag{6}$$

$$\left.\frac{d\varepsilon_a}{dN_{Fr}}\right|_{\left(b_\varepsilon+\sqrt{f}c_\varepsilon\right)\to 0} \to 0\,; \qquad \left.\varepsilon_a\right|_{\substack{\left(b_\varepsilon+\sqrt{f}c_\varepsilon\right)\to 0\\ N_{Fr1}\le N_{Fr}\le N_{Fr2}}} \to \varepsilon_e + a_\varepsilon\sqrt{f} = \varepsilon_{tr}\,,$$

это означает, что одновременно справедливо $\partial\alpha/\partial T = 0$ и $\partial\alpha/\partial\nu_0 = 0$. Следовательно, $\alpha(T)$ – *Const* и $\alpha(\nu_0)$ – *Const*. То есть в течение цикла (или нескольких циклов), соответствующего N_{Fr}, при изменении средней скорости процессов пластической деформации величина удельной поверхностной энергии области ЛПД остается постоянной. С точки зрения физики деформации такое возможно в случае одновременной реализации двух и более конкурирующих механизмов пластической деформации и, как следствие, механизмов разрушения. Кривые $\sigma_a(N_{Fr})$ и $\varepsilon_a(N_{Fr})$ в этом случае распадаются на две с асимптотами в областях $N_{Fr} \to \infty$ и $N_{Fr1} \le N_{Fr} \le N_{Fr2}$. На экспериментальных кривых в интервале долговечностей $N_{Fr1} \le N_{Fr} \le N_{Fr2}$ будут наблюдаться перегибы, а напряжения $\sigma_a = \sigma_{tr}$ соответствовать смене механизмов разрушения.

Дальнейший анализ будем проводить для гладкой кривой с асимптотой при $N_{Fr} \to \infty$, имея в виду, что наличие перегибов требует отдельного рассмотрения как, например, в случае заметной смены механизмов разрушения при переходе от малоцикловой к многоцикловой области усталостной кривой [30, 31].

В уравнениях кривой усталости для заданной частоты нагружения f_{const} слагаемые $b_\sigma\sqrt{1/N_{Fr}}$, $c_\sigma\sqrt{f/N_{Fr}}$ в (3) и $b_\varepsilon\sqrt{1/N_{Fr}}$, $c_\varepsilon\sqrt{f/N_{Fr}}$ в (4) характеризуют зависящие от N_{Fr}, т.е. амплитуды внешней нагрузки или деформации и частоты, составляющие неупругих явлений.

Так как для металлов $\tau_\sigma - \tau_\varepsilon << \tau_\sigma$, $\tau_\sigma - \tau_\varepsilon << \tau_\varepsilon$ [30], то

$$\left. ftg\varphi\right|_{f\to 0} = f\omega\frac{\tau_\sigma - \tau_\varepsilon}{1+\omega^2\tau_\sigma\tau_\varepsilon} \to 0\,,\ \left. ftg\varphi\right|_{f\to\infty} = f\omega\frac{\tau_\sigma - \tau_\varepsilon}{1+\omega^2\tau_\sigma\tau_\varepsilon} \to 0\,. \tag{7}$$

Поэтому

$$\left.\sigma_a\right|_{N_{Fr}\to\infty,\, f\to 0} \to \sigma_e\,, \qquad \left.\sigma_a\right|_{N_{Fr}\to\infty,\, f\to\infty} \to \sigma_e\,.$$

Принимая во внимание, что [29]

$$E_i = E_r\,\frac{1+i\omega\tau_\sigma}{1+i\omega\tau_\varepsilon}\,,\ E_n = E_r\,\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\,,$$

получим

$$\left.\varepsilon_e\right|_{N\to\infty,\, f\to 0} = \frac{\sigma_e}{E_i} = \frac{\sigma_e}{E_r}\,,\ \left.\varepsilon_e\right|_{N\to\infty,\, f\to\infty} = \frac{\sigma_e}{E_i} = \frac{\sigma_e}{E_n}\,. \tag{8}$$

Следовательно, σ_e представляет собой предел пропорциональности или истинный предел упругости для двух граничных случаев. Изотермического при $f \to 0$, т.е. в условиях завершенности релаксационных процессов, а также адиабатического при $f \to \infty$, когда $f >> 1/\tau_\varepsilon$, $f >> 1/\tau_\sigma$ и дополнительная деформация не успевает возникнуть.

Задавая в уравнении (1) в качестве переменной частоту, получим уравнение частотной зависимости пределов выносливости на заданной базе нагружения N_{const},

$$\sigma_a(f) = \sigma_0 + C_N\sqrt{f}\,,\ \sigma_0 = \sigma_e + \frac{b_\sigma}{\sqrt{N_{const}}}\,; \qquad C_N = a_\sigma + \frac{c_\sigma}{\sqrt{N_{const}}}\,. \tag{9}$$

По физическому смыслу σ_0 – величина напряжения разрушения материала на заданной базе нагружения при $f \to 0$, т.е. в условиях максимальной завершенности релаксационных и других, зависящих от времени, процессов. Из (5) следует, что частотная зависимость физического предела выносливости характеризуется частотной зависимостью соответствующих неупругих явлений.

Очевидно, что, зафиксировав в (1) величину напряжения σ_{const}, получим уравнение частотной зависимости циклической долговечности

$$N_{Fr}(f)=\left(\frac{c_\sigma\sqrt{f}+b_\sigma}{\sigma_{const}-\sigma_e-a_\sigma\sqrt{f}}\right)^2 . \tag{10}$$

При этом в изотермическом случае $$N_{Fr}\Big|_{f\to 0}=\left(\frac{b_\sigma}{\sigma_{Const}-\sigma_e}\right)^2 , \tag{11}$$

в адиабатическом $$N_{Fr}\Big|_{f\to\infty}=\left(\frac{c_\sigma}{-a_\sigma}\right)^{\mathbf{2}}=\nu_0\frac{\partial N}{\partial \nu_0} . \tag{12}$$

Из (10) и (11) следует, что при напряжениях $\sigma_{Const} < \sigma_e + a_\sigma\sqrt{f}$ или $\sigma_{Const} < \sigma_e$ (если $f \to 0$), $N_{Fr} \neq \infty$. То есть локальное разрушение материала возможно при напряжениях ниже физического предела выносливости для заданной частоты нагружения. Из (12) следует, что при $f \to \infty$ величина N_{Fr}, не теряя физический смысл, ограничена скоростью процессов пластической деформации.

Известно, что средняя скорость процессов пластической деформации v_0 пропорциональна средней скорости дислокаций, а передача скольжения через границы зерен (субзерен) осуществляется путем генерирования свежих дислокаций [40]. Уменьшение среднего размера d зерна или субзерна (т.е. увеличение числа пересекаемых границ) приводит к снижению средней скорости дислокаций (в частности, за счет времени активации зарождения дислокации). Поэтому величина v_0 также пропорциональна величине d: $v_0 \approx \chi d$; здесь χ – коэффициент пропорциональности. Из изложенного и уравнения (1) следует, что зависимость предела выносливости от размера зерна, субзерна или иного элемента структуры, границы которого являются дислокационными стопорами, имеет вид

$$\sigma_a = A + Bd^{-1/2}, \tag{13}$$

где для σ_a, ограниченного на заданной базе нагружения N_{Fr},

$$A=\sigma_e+\sqrt{\frac{E_\omega tg\varphi}{3}\frac{\partial\alpha}{\partial v_0}\frac{f}{N_{Fr}}}, \qquad B\approx\chi\left(\sqrt{\frac{E_r}{3}\frac{\partial\alpha}{\partial T}\frac{1}{N_{Fr}}}+\sqrt{\frac{E_\omega tg\varphi}{3}\frac{\partial\alpha}{\partial N}f}\right);$$

для физического предела выносливости

$$A=\sigma_e, \qquad B\approx\chi\sqrt{\frac{E_\omega tg\varphi}{3}\frac{\partial\alpha}{\partial N}f} .$$

Таким образом, результаты анализа структуры уравнения кривой усталости позволяют сделать следующие **выводы.**

1. Величина физического предела выносливости определяется параметрами, характеризующими развитие локальной пластической деформации, и величиной истинного предела упругости.
2. Параметры, характеризующие развитие локальной пластической деформации отражают взаимосвязь явлений усталости и неупругости.
3. Зависимость предела выносливости от частоты $\sigma_a(f)$, коэффициента асимметрии циклов $\sigma_a(R)$ и размера структурного элемента $\sigma_a(d)$ для заданной базы нагружения N_{Fr} = *Const*, а также частотная зависимость циклической долговечности $N_{Fr}(f)$ для заданного уровня напряжений σ_a = *Const* обусловлены зависимостью закономерностей развития областей локализации пластической деформации от перечисленных параметров.

Литература

1. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / В.Т. Трощенко, А.А.Лебедев, В.А.Стрижало и др. – К.: Логос, 2000. – 571 с.
2. Schijve J. Fatigue of Structures and Materials. – Dordrecht-Boston: Kluwer Academic Publ, 2001. – 137 p.
3. Терентьев В.Ф. Усталость металлических материалов. – М: Наука, 2002. – 248 с.
4. Chang, D.G., Yao W.X., Wangt D.J. A nonlinear fatigue damage cumulative model // Fatigue'99.: Proc. of the seventh Int. Congress. – Beijing, P.R.China, 8 – 12 June, 1999.– Beijing: Higher Education Press, 1999. Vol. 2.– P. 729 – 734.
5. Langer B.F. Design of pressure vessels for low cycle fatigue //Trans. ASME D. – 1962. – 84, N 3. – P. 389 – 402.
6. Трощенко В.Т. Прочность металлов при переменных нагрузках. – Киев: Наук. думка, 1978. – 174 с.
7. Marrow J. Investigation of plastic Strain Energy as Criterion for Finite Fatigue Life, The Garrett Corporation Report, Phaeniz Ariz. 1950.
8. Martin D., Brinn L. Some observations on the plastic work required to fracture stainless steel under cyclic loading // Proc. ASTM. – 1959. – 59. – P 677 – 690.
9. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С., Антипов Е.А. Пластичность и прчность материадлов при нестационарных нагружениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 216 с.
10. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. – М.: Наука, 1981. – 325 с.
11. A modified energy-based low cycle fatigue model for eutectic solder alloy / Shi X.Q., Pang H.L.J., Zhou W., Wang Z.P. // Scr. Mater. – 1999. – 41, N 3. – P. 289 – 296.
12. Афанасьев И.И. Статистическая теория усталостной прочности металлов. – Киев: изд. АН СССР, 1953. – 128 с.
13. Freudenthal A.M. Fatigue. Handbuch der Physik, t. VI. – Berlin: Springer, 1958. – 386 p.
14. Ding H.-Z., Mughrabi H., Hóppel H.W. A low-cycle fatigue life prediction model of ultra-fine-grained metals //Fatigueand Fract. Eng. Mater and Struct.–2002.–25, N 10.–P. 975 – 984.
15. Toshihiko H., Takahisa K. Statistical properties of fatigue life simulated for notched components under combined loading // JSME Int. J. A. – 2000. – 43, N 3. – P. 210 – 219.
16. Любимов А.К., Берендеев Н.Н., Чувильдеев В.Н. Структурная модель, описы-вающая зарождение трещины // Изв. Акад. инж. наук РФ.–2001, юбил. том.–С.181–199.
17. Kocańda S. Zmęczeniowe niszczenie metali. – Warzawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1972. – 450p.
18. Ifluence of stress state on high temperature fatigue crackgrowth in Incinel 718 / Antunes F.V., Ferreira J.M., Branco C.M., Byrne J. // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. – 2001. – 24. – P. 127 – 135.
19. A multiparameter approach to the prediction of fatigue crack growth in metallic materials / Soboyejo A.B.O., Shademan S., Foster M., Katsube N., Soboyejo W.O. // Ibid. – 2001. – 24. – P. 225 – 241.
20. Yokobori A. T. (Jr), Isogai T. Рост усталостной трещины и динамика дислокаций // Nihon zairyo kyodo gakkaishi=J. Jap. Soc. Strength and Fract. Mater.–2000.–34,N 1.–P.1–10.
21. Матохнюк Л.Е. Ускоренные усталостные испытания высокочастотным нагружением. – Киев: Наук. думка, 1988. – 200 с.
22. Яковлева Т.Ю. Локальная пластическая деформация и усталость металлов. – Киев: Наук. думка, 2003. – 238 с.
23. Яковлєва Т.Ю. Загальні закономірності структурної перебудови конструкційних сплавів за дії циклічного навантажування // Вісник Тернопільського державного технічного університету ім. І.Пулюя. – 2005. – № 2. – С. 40 – 47.
24. Яковлева Т.Ю. Модель повреждаемости металлических материалов при циклическом нагружении // Надійність і довговічність машин і споруд. Міжнар. наук.-техніч. збірник. – 2006. – вип. 27. – С. 187 – 198.
25. Гурьев А.В., Митин В.Я. Особенности развития локальных микронеоднородных деформаций и накопления усталостных повреждений в углеродистой стали // Пробл. прочности. – 1978. – № 11. – С. 19 – 23.
26. Buque C., Tirsher W., Blochwitz Ch. Barkhausen — Raushen in mechanisch ermüdeten Nickeleinkristallen // Z. Metallk. – 1995. – 86, N 10. – P. 671– 681.
27. Яковлева Т.Ю. Использование методов Фурье-оптики для количественного анализа эволюции структурного состояния металлических материалов в условиях циклического нагружения // Пробл. прочности. — 2000. — № 2. — С. 81—89.
28. Яковлева Т.Ю., Матохнюк Л.Е. Оценка деградации структуры металлических материалов методом Фурье-анализа // Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций: Тр. конф. — Киев: Институт проблем прочности НАН Украины, 2000. — Т. 1. — С. 193—197.
29. Zener C. Elasticity and Anelasticity of Metals. – Chicago, 1948. – 73 p.
30. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. – М: Металлургия, 1975. – 456 с.
31. Ботвина Л.Р., Маслов Л.Р. К вопросу о разрывах кривых усталости // ФММ. – 1972. – 34, вып. 4. – С. 886 – 890.