

ВТОМНЕ РУЙНУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ДВОВІСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

О. Є. Андрейків, М. Б. Кіт

FATIGUE FRACTURE OF THIN-WALLED STRUCTURAL ELEMENTS UNDER BIAXIAL LOADING

O. E. Andreykiv, M. B. Kit

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Abstract. An energy approach to evaluation of the subcritical fatigue crack growth period under biaxial tension of a plate with an initially rectilinear crack has been proposed. The influence of the change of such external loading parameters as: an angle between the loading axes, difference in amplitudes and frequencies, differences in the beginning of cycles (shear by please), difference in loading types (one-long-term static loading, the other – cyclic loading) has been investigated.

Визначенню залишкової довговічності тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами присвячено багато праць [1, 2]. Однак, більшість з них відноситься до випадків одновісного розтягу. Проте в експериментальній практиці часто зустрічаються двох- або багатовісне навантаження різної частоти. В даній роботі зроблена спроба узагальнити розроблений [3] раніше авторами енергетичний підхід на випадок двоосьового навантаження.

Постановка задачі і метод її розв'язання. Розглянемо пластину, яка послаблена прямолінійною тріщиною початкової довжини $2l_0$ (рис. 1) і розтягується у нескінченно віддалених точках рівномірно розподіленими циклічними зусиллями p і q ,

$$p = a_1 + b_1 \sin(\omega_1 \cdot t), \quad q = a_2 + b_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \beta) \quad (1)$$

Тут α - кут між напрямками дії зусиль p і q ; a_1, a_2 - відповідно середні значення p і q за цикл; b_1, b_2 - відповідно амплітуди зміни p і q за цикл; ω_1, ω_2 - частоти зміни відповідно p і q за цикл; β - відмінність у початку циклів зміни p і q (зсув по фазі). Вважається, що зусилля p направлені перпендикулярно до лінії розміщення тріщини. Задача полягає у визначенні такого числа $N = N_g$ циклів навантаження, по досягненню якого тріщина досягне критичної довжини і пластина зруйнується.

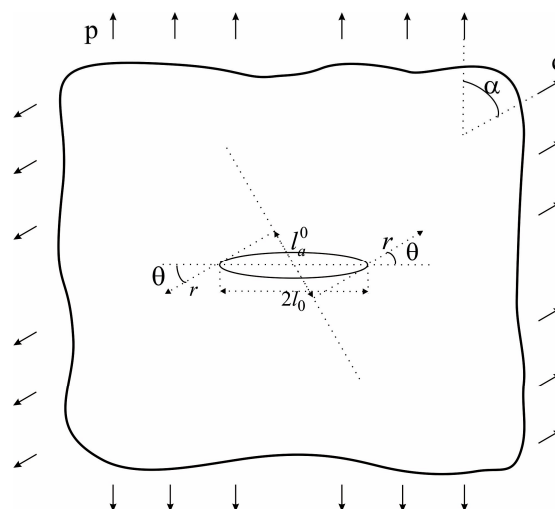


Рис. 1. Схема двовісного розтягу пластини з прямолінійною тріщиною.

Для реалізації такої задачі застосуємо відомий [3] енергетичний підхід, який зведе дану задачу до розв'язку наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{W_c}{\gamma_c - \gamma_t}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \left[\frac{W_c}{\gamma_c - \gamma_t} \right]_{\theta=\theta} = 0 \quad (2)$$

при початкових $N = 0$, $l(0) = l_0$

та кінцевих умовах $N = N_g$, $l(N_g) = l_*$, $\gamma_t(l_*) = \gamma_c$ (3)

Тут W_c - робота пластичних деформацій в зоні передруйнування біля вершини тріщини, які генеруються самим тілом [3]; γ_c - густина енергії руйнування матеріалу; γ_t - густина дисипації енергії пластичних деформацій в зоні передруйнування за максимум навантаження; N - кількість циклів навантаження для (1) з більшим періодом T_i циклу; $T_i = 2\pi\omega_i^{-1}$; ω_i - частоти зміни зусиль p і q ($i = 1, 2$); l_* - критична довжина тріщини l , по досягненню якої пройде руйнування пластини; згідно [2, 3, 4]. Ці величини будемо визначати наближено наступним чином

$$W_c = \int_0^{l_{fp}} \sigma_t \delta_t(x) dx = \int_0^{l_{fp}} (\delta_{I\theta} \sigma_{0t} + \delta_{II\theta} \tau_{0t}) dx, \quad \delta_t(x) \approx \delta_t(0) \left(1 - \frac{x}{l_{fp}}\right)^2,$$

$$\gamma_c = \delta_c \sigma_{fc} = \frac{K_{fc}^2}{E}, \quad \gamma_t = \delta_{I\theta} \sigma_{0f} + \delta_{II\theta} \tau_{0f}, \quad (4)$$

$$l_{fp} = \frac{K_{I\theta}^2}{4\sigma_{0f}^2}, \quad l_{fp} = \frac{K_{II\theta}^2}{4\tau_{0f}^2}, \quad \delta_{I\theta} = \frac{K_{I\theta}^2}{2E\sigma_{0f}}, \quad \delta_{II\theta} = \frac{K_{II\theta}^2}{2E\tau_{0f}}.$$

Тут $\delta_t(x)$ - розкриття у вершині тріщини; $\delta_{I\theta}$, $\delta_{II\theta}$ - проєкції $\delta_t(0)$ на направляючі орти полярної системи координат $O_{r\theta}$ (рис.1); σ_t - усереднені напруження в зоні передруйнування; σ_{0t} , τ_{0t} - відповідні їх проєкції; E - модуль пружності; K_I , K_{II} - коефіцієнти інтенсивності напружень біля вершини тріщини; θ - кут напрямку поширення втомної тріщини.

На основі цього, а також відомих результатів [2, 3, 4] можемо записати

$$W_c = \frac{1}{24} \left[\frac{K_{I\theta}^2}{E} + \frac{K_{II\theta}^2}{E} \right] \cdot l_{fp}, \quad (5)$$

де $K_{I\theta} = K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$,

$$K_{II\theta} = K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Для розглядуваного випадку при старті тріщини коефіцієнти інтенсивності напружень K_I та K_{II} будуть визначатися [2] так

$$K_I = p\sqrt{\pi l_0} + q\sqrt{\pi l_0} \cdot \cos^2 \alpha, \quad K_{II} = q\sqrt{\pi l_0} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (6)$$

В загальному випадку розв'язок такої задачі пов'язаний із значними математичними труднощами. Але для побудови загальної теорії поширення втомних тріщин важливим є дослідження впливу зміни окремих параметрів зовнішнього навантаження на величину N_g . Тому нижче розглянемо такі конкретні випадки.

Зміна частоти. У даному випадку вважаємо, що $\beta = 0$, $\alpha = 0$,
 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = b$, $0 \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} = \eta_1 \leq 1$.

За напрямком зусилля p і q будуть співпадати і складуть сумарне зусилля, яке буде змінюватись в часі так

$$F(t) = p + q = 2b \cdot [1 + \sin(0.5t\omega_1(1 + \eta_1))\cos(0.5t\omega_1(1 - \eta_1))] \quad (7)$$

Так як в даному випадку тріщина буде змінюватись прямолінійно, то величину N_{1g} будуть визначати [3] наступні рівняння

$$\frac{dl}{dN} = \frac{W_c E}{K_{fc}^2 - \pi l F_{lmax}^2}; N = 0, l(0) = l_0, N = N_{1g}, l(N_{1g}) = l_*, l_* = \pi^{-1} K_{fc}^2 F_{max}^{-2} \quad (8)$$

Тут W_c визначаємо наступним чином. Для кожного значення $\eta_1 = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ будемо залежність $F(t)$, визначаємо період і форму зміни циклу. Розбиваємо кожен цикл на n -ділянок з піками зміни $F(t)$ і для кожної ділянки визначаємо $F_{i\max}$ і $F_{i\min}$. На основі цього, а також результатів [3] визначаємо W_c наступним чином

$$W_c = \frac{\pi^2 l^2}{24 E \sigma_t^2} \sum_{i=1}^n (F_{i\max} - F_{i\min})^4 \quad (9)$$

Тут $F_{i\max}$ і $F_{i\min}$ - максимальне і мінімальне значення $F(t)$ для кожної ділянки з піком зміни. Тоді, інтегруючи (8) з врахуванням (9), отримаємо

$$N_{1g} = A \cdot \left[-\frac{K_{fc}^2}{l_*} + \frac{K_{fc}^2}{l_0} - F_{lmax}^2 \pi \ln\left(\frac{l_*}{l_0}\right) \right], \quad A = \frac{24 \sigma_t^2}{\pi} \left[\sum_{i=1}^n (F_{i\max} - F_{i\min})^4 \right]^{-1} \quad (10)$$

Для числового аналізу формули (10) задамо параметри зовнішнього навантаження, довжини початкової тріщини і характеристики матеріалу так

$$l_0 = 0,01m, K_{fc} = 85MPa \cdot \sqrt{m}, b = 1, \sigma_t = 550MPa$$

На основі цього і формули (10) на рис. 2 побудована графічна залежність N_{1g} від η_1 (суцільна лінія). Тут також побудована (пунктирна лінія) графічна залежність N_{1g} від η_1 для випадку неврахування реальної форми циклу (синусоїдальна зміна $F(t)$). Як видно з рис. 2 неврахування форми циклу може привести (для деяких значень η_1) до значних похибок при визначенні N_{1g} .

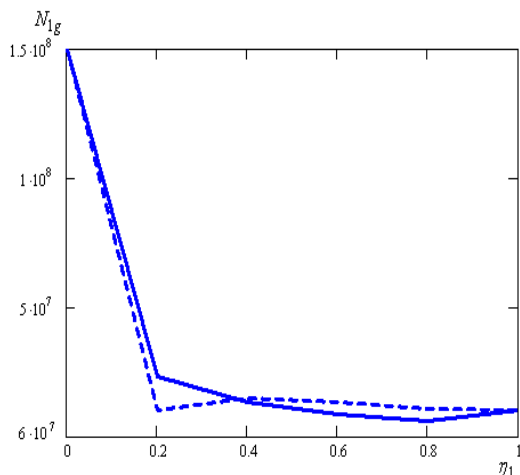


Рис. 2 Графічне порівняння залежностей $N_{1g}(\eta_1)$ при врахуванні (суцільна лінія) і неврахуванні (пунктирна лінія) форми циклу.

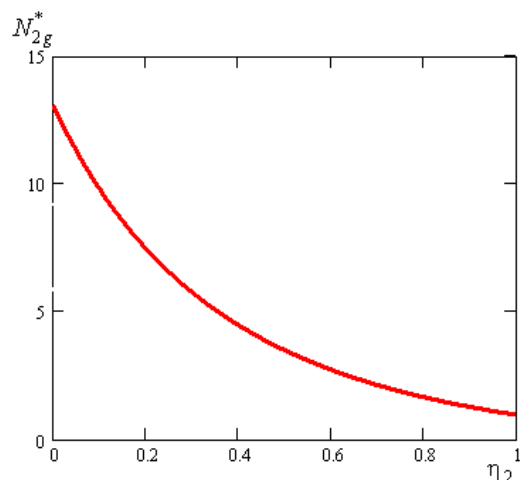


Рис. 3 Графічна залежність N_{2g}^* від η_2 .

Зміна амплітуди. Для даного випадку приймаємо $\beta = 0$, кут $\alpha = 0$, $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\eta_2 = a_2 a_1^{-1}$, $0 \leq \eta_2 \leq 1$.

Зусилля p і q змінюються в одному напрямку і сумарне зусилля буде визначатися так

$$F_{\max} = 2a_1 + 2a_2 = 2a_1(1 + \eta_2), \quad F_{\min} = 0 \quad (11)$$

$$\text{Звідси} \quad K_{I_{\max}} = 2a_1(1 + \eta_2) \cdot \sqrt{\pi l}, \quad K_{I_{\min}} = 0 \quad (12)$$

Так як F_{\max} направлена перпендикулярно лінії розміщення тріщини, то остання буде поширюватись прямолінійно і величина N_{2g} буде визначатися співвідношеннями (8).

Для числового аналізу задамо параметр зовнішнього навантаження a_1 і початкову довжину тріщини у такому вигляді

$$l_0 = 0,01m, \quad a_1 = 0,56 K_{fc} m^{-1/2} \quad (13)$$

Тоді величини l_* і W_c будуть визначатися так

$$l_* = 0,25(1 + \eta_2)^{-2}, \quad W_c = \frac{2l^2(1 + \eta_2)^4}{3E\sigma_t^2} \quad (14)$$

Інтегруючи рівняння (8) з врахуванням (11)-(14) для обчислення N_{2g} отримаємо формулу

$$N_{2g} = \sigma_t^2 K_{fc}^{-2} N_{2g}^*, \quad N_{2g}^* = 1,5(1 + \eta_2)^{-4} \frac{l_* - l_0}{l_0 l_*} - 4(1 + \eta_2)^2 \ln \frac{l_*}{l_0} \quad (15)$$

На основі формул (15) на рис. 3 побудована графічна залежність N_{2g}^* від η_2 . Як видно з рис. 3 збільшення η_2 , що відповідає збільшенню амплітуди циклу, приводить до зменшення довговічності пластини з тріщиною. Це повністю відповідає основним положенням теорії втоми.

Зсув по фазі. У даному випадку приймаємо $\alpha = 0$, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тоді сумарне зусилля $F(t)$ можна записати так:

$$F = 2a_1(1 + b_0 \sin \omega t_1), \quad \text{де } t_1 = t + \frac{\beta}{\omega}, \quad b_0 = \cos \frac{\omega\beta}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi \quad (16)$$

$$\text{Звідси} \quad F_{\max} = 2a_1(1 + b_0), \quad F_{\min} = 2a_1(1 - b_0) \quad (17)$$

Для числового аналізу задамо початкову довжину тріщини l_0 і параметр навантаження

$$a_1 \text{ так} \quad l_0 = 0,01m, \quad a_1 = \frac{K_{fc}}{2\sqrt{\pi}} \quad (18)$$

$$\text{Тоді критична довжина тріщини буде визначатися формулою } l_* = \frac{1}{(1 + b_0)^2}. \quad (19)$$

Так як $\alpha = 0$, то тріщина буде поширюватись по лінії розміщення і її кінетика описується співвідношеннями (8). При цьому W_c буде визначатися так

$$W_c = \frac{2l^2 K_{fc}^4 \cos^4 \omega\beta}{3E\sigma_t^2} \quad (20)$$

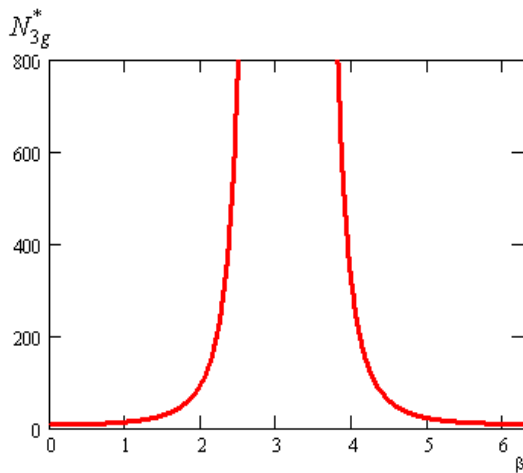


Рис. 4. Графічна залежність N_{3g}^* від β .

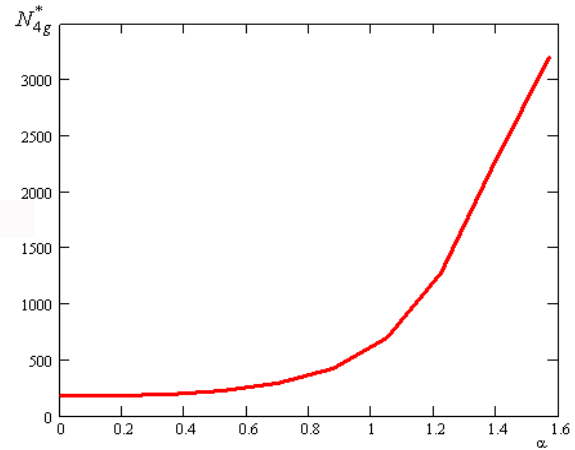


Рис. 5. Графічна залежність N_{4g}^* від кута α .

Інтегруючи рівняння (8) з врахуванням (18)-(19), для визначення N_{3g} отримаємо формулу

$$N_{3g} = \sigma_t^2 K_{fc}^{-2} N_{3g}^*, \quad N_{3g}^* = 0,094 \cos^{-4} \frac{\beta}{2} \left[\frac{l_* - l_0}{l_0 l_*} - \left(1 + \cos \frac{\beta}{2} \right)^2 \ln \frac{l_*}{l_0} \right] \quad (21)$$

З допомогою формул (21) на рис. 4 побудована графічна залежність відносної довговічності пластини N_{3g}^* від величини β . Як видно з цього рисунка при $\beta = \pi$ навантаження p і q взаємно нівелюються (пластина ненавантажена) і довговічність прямує до нескінченності.

Зміна кута α . У даному випадку приймаємо у формулах (1) $\beta = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = g$.

Тоді коефіцієнти інтенсивності напружень набудуть такого вигляду

$$K_{lp} = 2g\sqrt{\pi l}, \quad K_{llp} = 0, \quad K_{lq} = 2g \cos^2 \alpha \sqrt{\pi l}, \quad K_{llq} = 2g \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{\pi l} \quad (22)$$

$$K_{lmax} = K_{lp} + K_{lq} = 2g\sqrt{\pi l} (1 + \cos^2 \alpha),$$

$$K_{llmax} = K_{llp} + K_{llq} = 2g\sqrt{\pi l} \cos \alpha \sin \alpha$$

Для даного випадку основна система рівнянь (2) з врахуванням (4), (5) набуде вигляду

$$\frac{dl}{dN} = \frac{E}{3} \left(\frac{\delta_t^2}{\delta_{lc} \sigma_0 - \delta_t \sigma_t} \right), \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta_t} \left[\frac{\delta_t^2}{\delta_{lc} \sigma_0 - \delta_t \sigma_t} \right] \frac{\partial \delta_t}{\partial \theta} = 0 \quad (24)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_0, \quad N = N_{4g}, \quad l(N_{4g}) = l_*, \quad \delta_t(l_*) \sigma_t = \delta_{lc} \sigma_0$$

Тут на основі робіт [2, 5]

$$\delta_{lc} \sigma_0 - \delta_t \sigma_t = \frac{1}{E} (K_{fc}^2 - K_{l\theta}^2 - K_{ll\theta}^2), \quad \delta_t = \sqrt{\delta_{l\theta}^2 + \delta_{ll\theta}^2}$$

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_{0f}^2 + \tau_{0f}^2} = \frac{\sigma_r}{K_{I\theta}} \sqrt{\left(K_{I\theta}^2 + K_{II\theta}^2\right) \left(1 - \xi + \xi^2 + 3 \frac{K_{II\theta}^2}{K_{I\theta}^2}\right)},$$

$$\xi = \frac{K_r}{K_{I\theta}}, \quad K_r = K_I \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Із аналізу рівняння (24) приходимо до висновку, що його можна звести до виду

$$\frac{\partial \delta_t}{\partial \theta} = 0 \quad (25)$$

Із рівняння (25) чисельно для різних значень α ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$) знаходимо напрямок початкового старту тріщини $\theta = \theta_0$. Далі вважаємо, що тріщина буде рухатись приблизно під кутом $\theta = \theta_0$ аж до руйнування пластини. Тоді для опису кінетики такої втомної тріщини і визначення періоду її докритичного росту рівняння (23) і (24) зведуться до такого вигляду

$$\frac{dl}{dN} = \frac{2\pi^2 g^4 l^2 f_1^2(\alpha, \theta)}{3E\sigma_0^2 [\delta_{Ic} \sigma_0 - 4\pi g^2 E^{-1} \sigma_0^{-1} \sigma_t l f_1(\alpha, \theta)]} \quad (26)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_0 \cos \theta, \quad N = N_{4g},$$

$$l(N_{4g}) = l_*, \quad l_* = 0,25\pi^{-1} \delta_{Ic} \sigma_0^2 \sigma_t^{-1} g^{-2} E f_1^{-1}(\alpha, \theta)$$

Тут функція $f_1(\alpha, \theta)$ визначається так

$$f_1(\alpha, \theta) = 0,25\pi^{-1} g^{-2} l^{-1} \sigma_0 E (\delta_{I\theta}^2 + \delta_{II\theta}^2)^{1/2} \quad (27)$$

Інтегруючи рівняння (26), для визначення періоду докритичного росту тріщини N_{4g} отримаємо формулу

$$N_{4g} = \sigma_0^2 K_{fc}^{-2} N_{4g}^*,$$

$$N_{4g}^* = \frac{3E\sigma_0^2}{2\pi^2 g^4} \left[\delta_{fc} \sigma_0 f_1^{-2}(\alpha, \theta) \frac{l_* - l_0 \cos \theta}{l_0 l_* \cos \theta} - 4\pi g^2 E^{-1} \sigma_0^{-1} \sigma_t f_1^{-1}(\alpha, \theta) \ln \frac{l_*}{l_0} \right] \quad (28)$$

Для чисельного аналізу задачі задамо параметри тріщини і навантаження так

$$l_0 = 0,01m, \quad g = 0,63 K_{fc} \quad (29)$$

Обчислюючи з рівняння (25) кут θ для кожного значення α і підставляючи ці значення в (28), знаходимо величини N_{4g}^* враховуючи (29). На основі цього на рис. 5 побудована графічна залежність відносного значення довговічності пластини N_{4g}^* від кута α між напрямками дії зусиль p і q . Як видно з цього графіка, при збільшенні кута α довговічність пластини зростає.

Висновки

На основі раніше розробленого авторами енергетичного підходу побудована математична модель для визначення періоду докритичного росту втомної тріщини в пластині при її двовісному циклічному навантаженні.

З допомогою цієї моделі проаналізовано вплив параметрів двовісного циклічного навантаження на період докритичного росту втомної тріщини.

Література

1. Schijve. S. Fatigue of Structures and Materials in the State of the Art – Proc. of the ECF14. – 2002 – V.III. – P.211-262.
2. Механика разрушения и прочность материалов: Спр. пос.: в 4-х т. /Под общей ред. В.В. Панасюка. – К: Наук. думка, 1988 – 1990. Т.4: Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов/ О. Н. Романив, С. Я. Ярема, Г. Н. Никифорчин и др. – 1990. – 680 с.
3. Андрейків О.Є., Кіт М.Б. Визначення періоду докритичного росту тріщин в елементах конструкцій при їх двохчастотному навантаженні //Машинознавство – 2006р. №2 – С. 3-7.
4. Шата М., Терлецька З. Енергетичний підхід у механіці втомного поширення макротріщини. //Механіка руйнування і міцність конструкцій//. – Львів: Каменяр. – 1999. – В. 2. – С.141-148.
5. О.Є. Андрейків, Я.Л. Іваницький, З.О. Терлецька, М.Б. Кіт Оцінка довговічності труби нафтопроводу з поверхневою тріщиною під двохвісним блочним навантаженням // Фізико-хімічна механіка матеріалів – Львів, 2004, №3. – С. 103 – 108.