УДК 62-504.462

С. Мовчан, канд.техн.наук; Л. Мовчан, канд.техн.наук;
Я. Проць, канд.техн.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОБУДОВА ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ В ПРОСТОРІ ДВОХ ПАРАМЕТРІВ, ЩО НЕЛІНІЙНО ВПЛИВАЮТЬ НА КОЕФІЦІЄНТИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто питання побудови областей стійкості лінійних неперервних систем в просторі двох параметрів, обидва з яких нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння. Запропоновано алгоритм знаходження точок границі області стійкості шляхом перебору тільки одного параметру, без перевірки на стійкість чи нестійкість системи в цих точках. Коректність результату гарантована застосуванням методу D-розбиття.

Вступ. Важливою задачею дослідження стійкості лінійних неперервних систем є побудова області стійкості системи в площині її параметрів. В реальних системах автоматичного керування вплив параметрів системи на коефіцієнти характеристичного рівняння є нелінійним і таким, що не дозволяє звести визначення області стійкості системи в просторі двох, а тим більше трьох параметрів тільки до лінійної задачі. Для такого випадку загальновідом є застосування чисельних методів перебору точок в просторі параметрів із використанням ЕОМ [1, 2, 3]. Очевидно, що метод перебору параметрів, являючись найбільш загальним, неекономічний з точки зору кількості обчислень при збільшенні точності визначення границі області стійкості (ГОС) і не гарантує коректності результату. Іншим підходом є отримання нелінійних рівнянь границь областей стійкості та розробка спеціальних чисельних методів їх розв’язання [4, 5] для систем із постійним запізненням.

Дана робота є продовженням роботи [6], в якій авторами запропоновано загальний підхід до побудови областей стійкості лінійних неперервних систем в площині параметрів, що нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння. Отримано вирази, з допомогою яких побудовано область стійкості (ОС) системи в площині двох параметрів, один із яких лінійно, а другий – нелінійно входять в коефіцієти характеристичного рівняння, та зазначено, що аналогічно можна побудувати області стійкості в просторі двох параметрів, обидва із яких нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння.

В даній роботі пропонується конкретний алгоритм побудови області стійкості лінійних неперервних систем в просторі двох параметрів, обидва із яких нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння.

Постановка задачі. Розглядається задача побудови області стійкості лінійних неперервних систем в просторі двох параметрів, від яких нелінійно залежать коефіцієнти характеристичного рівняння

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 .$$

Значення параметра k на границі області стійкості в площині параметрів k і ν, перший із яких лінійно, а другий – нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння, визначаються згідно із системою рівнянь, отриманих з допомогою методу D-розбивання [6]

$$\begin{cases} k = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{r} c_{2i} \sum\limits_{k=0}^{r} d_{2k} \omega^{2(k+i)} + \sum\limits_{i=0}^{l} c_{2i+1} \sum\limits_{k=0}^{l} d_{2k+1} \omega^{2(k+i+1)}}{\sum\limits_{i=0}^{n} {d_i}^2 \omega^{2i} + \sum\limits_{i=0}^{n-2} d_i \sum\limits_{k=1}^{l} d_{2k+i} \omega^{2(k+i)}} , \\ \sum\limits_{i=0}^{l} c_{2i+1} \sum\limits_{k=0}^{r} d_{2k} \omega^{2(k+i)+1} + \sum\limits_{i=0}^{r} c_{2i} \sum\limits_{k=0}^{l} d_{2k+1} \omega^{2(k+i)+1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

де c_{ji} і d_{mk} є алгебраїчно залежними від значень параметрів характеристичного рівняння (в т.ч. від ν).

Далі, в роботі [6], значення нелінійного параметра ν змінювали від $\nu_{\min}$ до $\nu_{\max}$ із заданим кроком $\Delta\nu$ і використовуючи рівняння (1), отримували сукупність граничних точок відрізків стійкості параметра k, які в площині параметрів ν і k, сумісно із відповідними значеннями $\nu_{\min} \le \nu \le \nu_{\max}$, визначають точну границю області стійкості.

Розглянемо побудову ОС в площині двох параметрів, обидва із яких нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння, використовуючи запропонований в роботі [6] підхід.

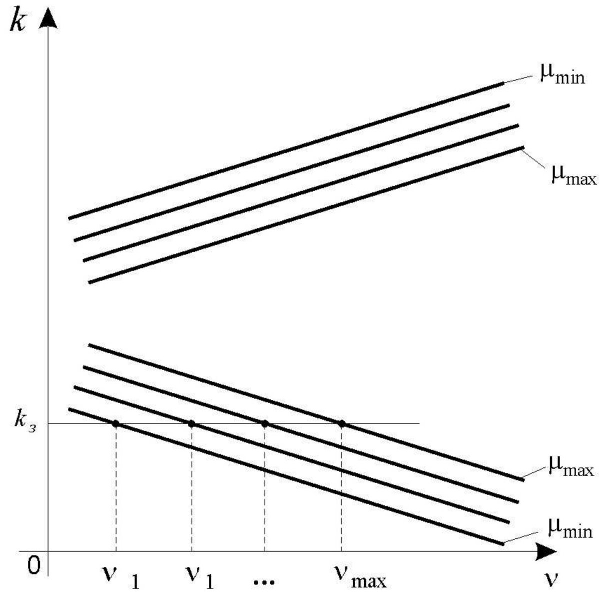


Рис. 1 Множина ГОС в площині параметрів k , ν

Розв'язок поставленої задачі. Визначаючи області стійкості в площині параметрів [k, ν] отримуємо множину ГОС при зміні із заданим кроком $\Delta\mu$ в заданих межах $\mu_{\min} \le \mu \le \mu_{\max}$ іншого параметра μ, що як і ν нелінійно входить в коефіцієнти рівняння досліджуваної системи (рис. 1).

Очевидно, що сукупність значень нелінійних параметрів, які відповідають одному і тому ж значенню лінійного параметра k, отриманого з рівнянь (1), визначає точки границі області стійкості в площині цих параметрів.

Розглянемо метод побудови границі області стійкості в просторі параметрів ν і μ, який не вимагає побудови множини ГОС, дозволяє зменшити кількість точок перебору, не вимагає дослідження стійкості системи в цих точках і підвищує точність побудови області стійкості. Цей метод полягає в тому, що для конкретного значення параметра ν границі ОС, який змінюється з кроком $\Delta\nu$ в межах $\nu_0 = \nu_{\min} \le \nu \le \nu_{\max}$, визначаємо таке значення μ, при якому значення k, визначене з формул (1) задовольняло б умові

$$\left|k_з - k\right| \le \Delta k, \tag{2}$$

де Δk – наперед задане значення точності побудови ОС.

Визначення границі області стійкості в площині параметрів ν і μ для заданого значення $k_з$, починаємо з обчислення початкового значення μ_0 границі ОС при $\nu_0 = \nu_{\min}$. Для наступного значення $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$ ГОС, шляхом перебору параметра μ із змінним кроком $\Delta\mu$ в напрямку, що визначається характером зміни параметра k ГОС при зміні параметра μ, визначаємо таке значення μ, при якому виконується співвідношення (2).

Для визначення характеру зміни параметра k на границі ОС при зміні параметра μ з використанням формул (1), визначаємо значення лінійного параметра k при значеннях нелінійних параметрів $\nu_0, \mu_0 + \Delta\mu$ і $\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0$ і порівнюємо їх із заданим значенням $k_з$. Якщо одночасно виконуються нерівність $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0) > k_з$, що відповідає збільшенню значення параметра k при зростанні значення параметра ν і фіксованому μ, і нерівність $k(\nu_0, \mu_0 + \Delta\mu) > k_з$, що відповідає збільшенню значення параметра k при зростанні значення параметра μ і фіксованому ν, то це означає, що для фіксованого значення параметра k, збільшенню значення ν відповідає зменшення значення μ (рис. 2, *а*). Отже, наступне значення k, при збільшенні ν на крок $\Delta\nu$ $(\nu = \nu_0 + \Delta\nu)$ і $\left|k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0) - k_з\right| > \Delta k$, визначаємо з (1) , змінюючи μ, згідно з вищевикладеним, наступним чином: $\mu = \mu_0 - \Delta\mu$. У випадку, якщо $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - \Delta\mu) > k_з$ і $\left|k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - \Delta\mu) - k_з\right| > \Delta k$, алгоритм зміни μ не міняється, тобто наступне значення $\mu = \mu_0 - 2\Delta\mu$ і т.д.. поки не виконається нерівність $\left|k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - n\Delta\mu) - k_з\right| \le \Delta k$ або $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - \Delta\mu) < k_з$ при $\left|k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - \Delta\mu) - k_з\right| > \Delta k$. В першому випадку перебір значень параметра μ припиняється і значення $\mu = \mu_0 - n\Delta\mu$, сумісно із значенням параметра $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$, є точкою границі області стійкості в площині нелінійних параметрів (ν, μ). В другому випадку крок зміни параметра μ зменшується $\Delta\mu = \Delta\mu / 2$, а алгоритм зміни міняє вигляд на $\mu = \mu_0 - n\Delta\mu + \Delta\mu / 2$. У випадку, коли $\left|k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - n\Delta\mu + \Delta\mu / 2) - k_з\right| \le \Delta k$, перебір значень параметра припиняється і параметри $\mu = \mu_0 - n\Delta\mu + \Delta\mu / 2$ і $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$ відповідають точці границі ОС. При умові, якщо $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - n\Delta\mu + \Delta\mu / 2) > k_з$

або $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - n\Delta\mu + \Delta\mu / 2) < k_з$,

при $\left|k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0 - n\Delta\mu + \Delta\mu / 2) - k_з\right| > \Delta k$, перебір μ продовжуємо. При цьому, крок $\Delta\mu$ кожного разу зменшується в два рази, а знак перед кроком визначається, як було описано вище, співвідношенням між k і $k_з$: якщо $k > k_з$, то знак перед $\Delta\mu$ від'ємний, а при $k < k_з$ – додатній. Перебір значень μ завершується при виконанні умови $\left|k - k_з\right| \le \Delta k$.

Аналогічно, одночасне виконання нерівності $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0) < k_з$, що відповідає зменшенню значення параметра k на ГОС при зростанні значення параметра ν і фіксованому μ, і нерівності $k(\nu_0, \mu_0 + \Delta\mu) < k_з$, що відповідає зменшенню значення параметра k при збільшенні значення параметра μ і фіксованому ν, означає, що для фіксованого значення параметра k, збільшенню значення ν відповідає зменшення значення μ (рис. 2, *б*). Отже, наступне значення k, при збільшенні ν на крок $\Delta\nu$ ($\nu = \nu_0 + \Delta\nu$), визначаємо з (1), також приймаючи $\mu = \mu_0 - \Delta\mu$.

У випадку одночасного виконання нерівності $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0) < k_з$, що відповідає зменшенню значення параметра k на ГОС при зростанні значення параметра ν і фіксованому μ, і нерівності $k(\nu_0, \mu_0 + \Delta\mu) > k_з$, що відповідає збільшенню значення параметра k при зростанні значення параметра μ і фіксованому ν, це означає, що для фіксованого значення параметра k, збільшенню значення ν відповідає збільшення значення μ (рис. 2, *в*).

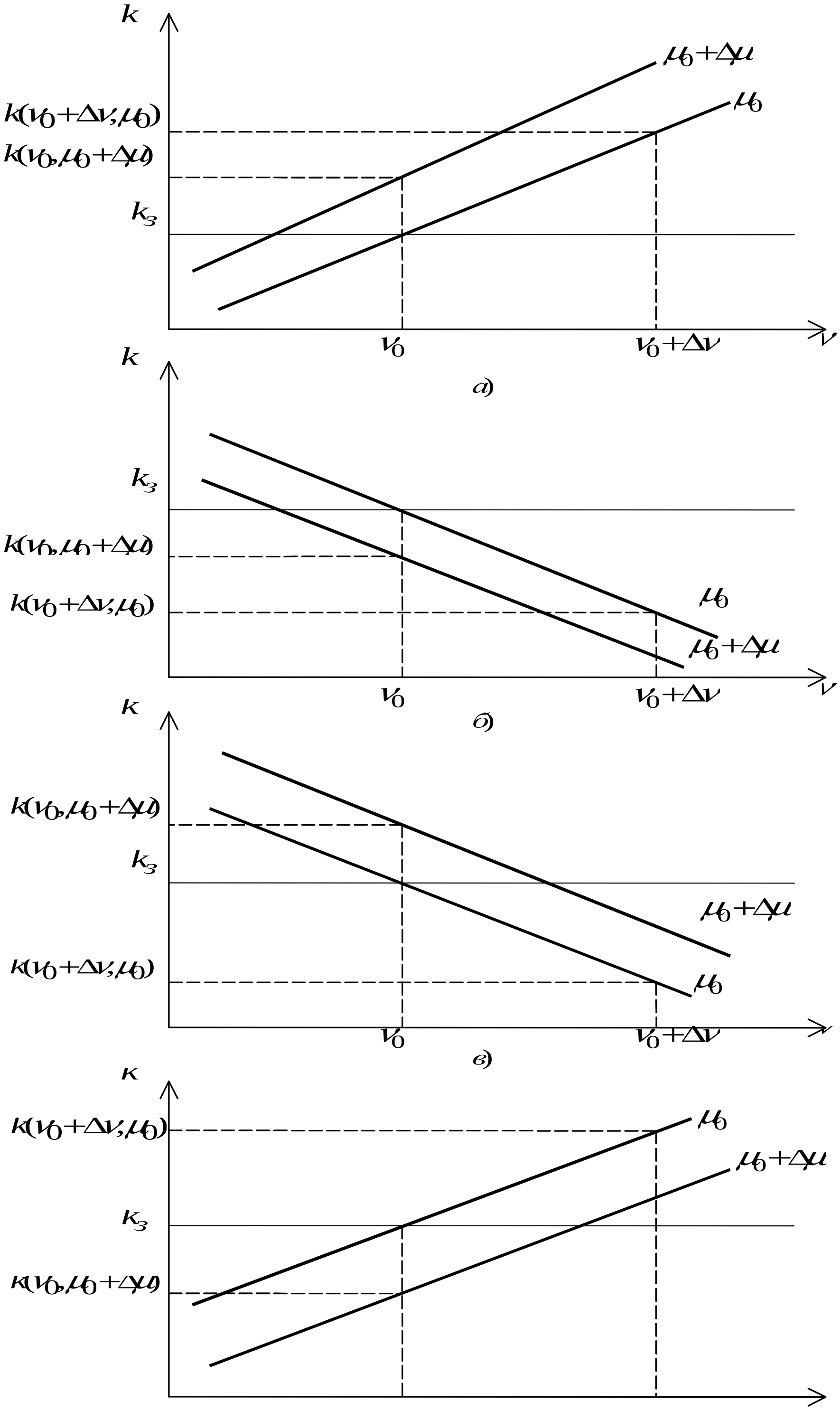


Рис. 2 Визначення характеру зміни параметрів μ і ν, при фіксованому k :

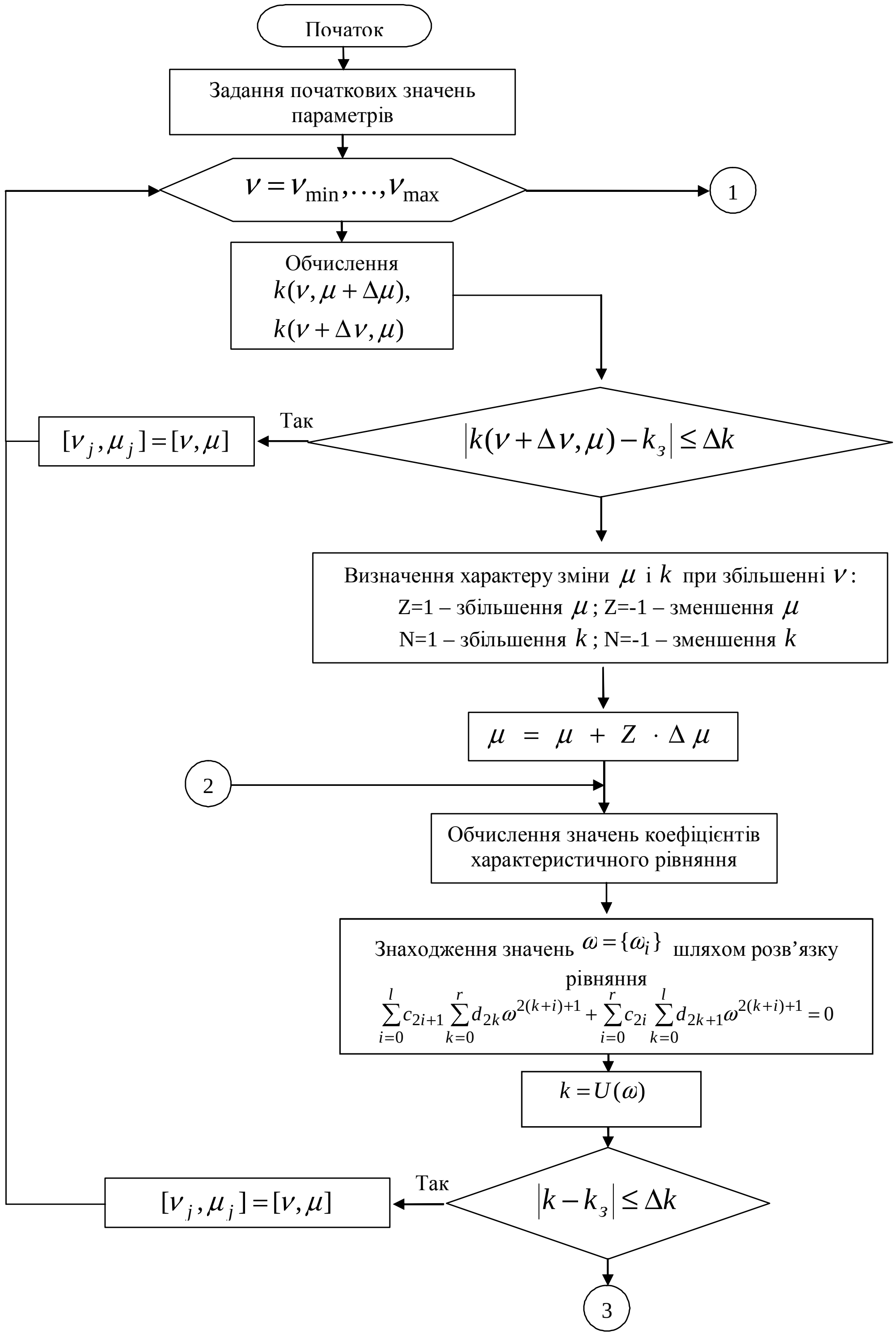
а), *б*) – збільшенню значення ν відповідає *зменшення* значення μ ;

в), *г*) – збільшенню значення ν відповідає *збільшення* значення μ .

Отже, наступне значення k, при збільшенні ν на крок $\Delta\nu$ ($\nu = \nu_0 + \Delta\nu$), визначаємо з (1) , змінюючи μ, згідно з вищевикладеним, наступним чином: $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$. Аналогічно, якщо одночасно виконуються нерівність $k(\nu_0 + \Delta\nu, \mu_0) > k_з$, що відповідає збільшенню значення параметра k при зростанні значення параметра ν і фіксованому μ, і $k(\nu_0, \mu_0 + \Delta\mu) < k_з$, що відповідає зменшенню значення параметра k при зростанні значення параметра μ і фіксованому ν, це означає, що для фіксованого значення параметра k, збільшенню значення ν відповідає збільшення значення μ (рис. 2, *г*). Отже, наступне значення k, при збільшенні ν на крок $\Delta\nu$ ($\nu = \nu_0 + \Delta\nu$), визначаємо з (1) , приймаючи $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$.

Для випадків, наведених на рис. 2 *б*), *в*), *г*), алгоритм визначення граничного значення параметра μ аналогічний випадку рис. 2 *а*). Знак вибору кроку $\Delta\mu$ визначається характером зміни параметра k і змінюється на протилежний одночасно із зменшенням в два рази кроку параметра μ в випадку зміни знаку різниці поточного значення параметра k і заданого $k_з$, тобто зміни знаку різниці $k - k_з$. Перебір завершується, коли $|k - k_з| \le \Delta k$, що є умовою належності одержаного значення μ до границі області стійкості при $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$ і при $k = k_з$ з похибкою Δk.

Аналогічно визначаємо значення параметрів μ при $|k - k_з| \le \Delta k$ для всіх заданих значень параметра $\nu(\nu_0 \le \nu \le \nu_{\max})$, що змінюються з наперед вибраним кроком $\Delta\nu$. При цьому, для кожного наступного значення параметра $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$, початкове значення кроку $\Delta\mu$ параметра вибираємо рівним кінцевому значенню кроку $\Delta\mu$ для попереднього значення параметра ν, що суттєво зменшує час визначення точок границі області стійкості. В результаті проведення таких обчислень, сукупність отриманих значень μ сумісно із відповідними їм значеннями ν відповідають значенням точок границі ОС в площині параметрів [ν, μ] при фіксованих інших параметрах системи. Чим менший крок зміни $\Delta\nu$ параметра ν, тим менше кроків в циклі визначення відповідного параметра μ, але збільшується кількість самих циклів визначення даного параметра. Блок-схему алгоритму визначення точок границі ОС в площині параметрів [ν, μ] наведено на рис. 3.



Початок
Задання початкових значень параметрів
$\nu = \nu_{\min}, \ldots, \nu_{\max}$
1
Обчислення $k(\nu, \mu + \Delta\mu)$, $k(\nu + \Delta\nu, \mu)$
Так
$[\nu_j, \mu_j] = [\nu, \mu]$
$\left|k(\nu + \Delta\nu, \mu) - k_з\right| \leq \Delta k$
Визначення характеру зміни μ і k при збільшенні ν:
Z=1 – збільшення μ; Z=-1 – зменшення μ
N=1 – збільшення k; N=-1 – зменшення k
$\mu = \mu + Z \cdot \Delta\mu$
2
Обчислення значень коефіцієнтів характеристичного рівняння
Знаходження значень $\omega = \{\omega_i\}$ шляхом розв'язку рівняння
$\sum_{i=0}^{l} c_{2i+1} \sum_{k=0}^{r} d_{2k} \omega^{2(k+i)+1} + \sum_{i=0}^{r} c_{2i} \sum_{k=0}^{l} d_{2k+1} \omega^{2(k+i)+1} = 0$
$k = U(\omega)$
Так
$[\nu_j, \mu_j] = [\nu, \mu]$
$\left|k - k_з\right| \leq \Delta k$
3

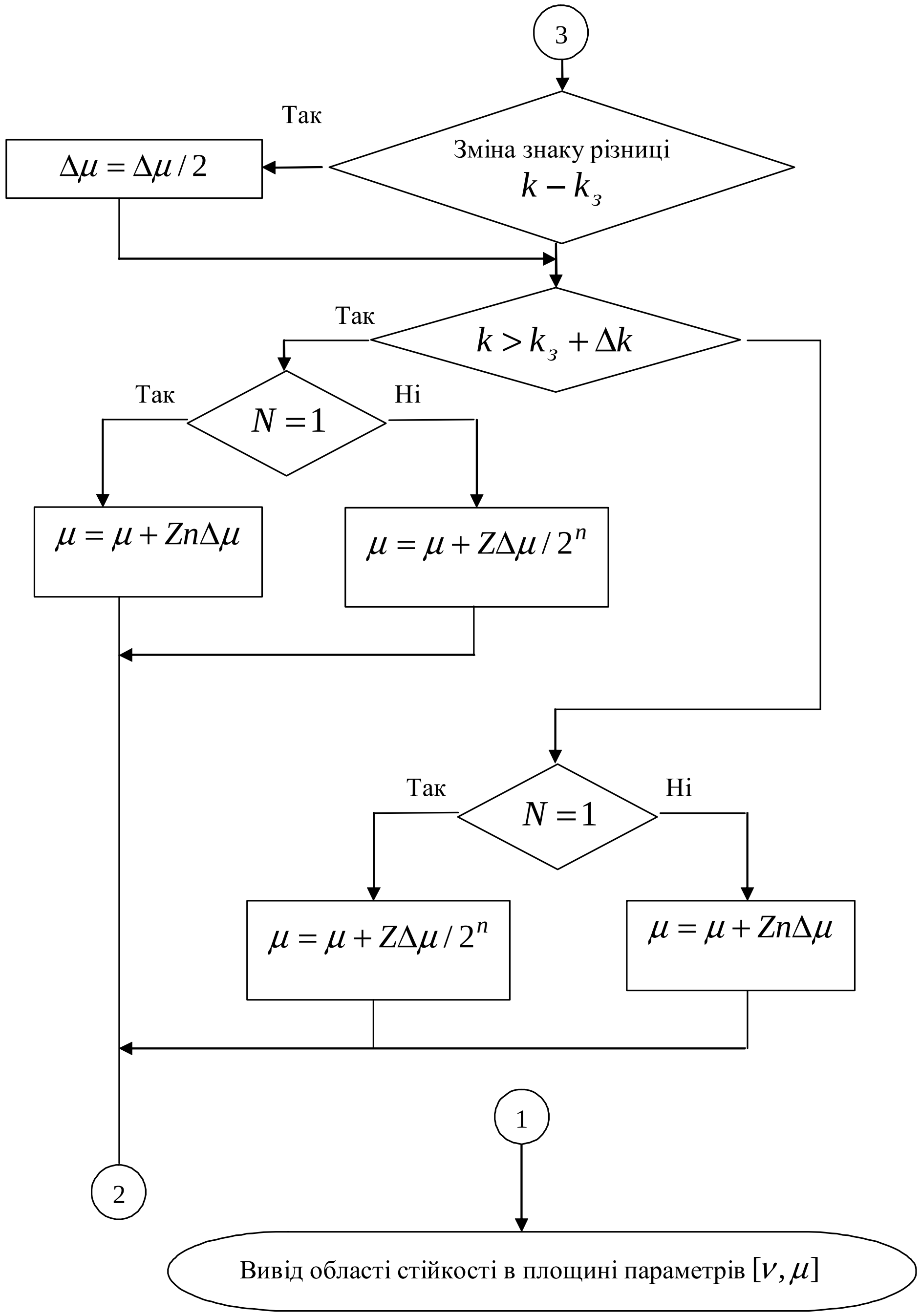


Рис.3. Блок-схема алгоритму визначення точок границі ОС
в площині параметрів $[\nu, \mu]$

Висновок. Очевидно, що даний підхід, на відміну від відомих методів перебору, дозволяє визначити границю області стійкості в площині параметрів, які нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння, шляхом перебору тільки одного параметра, всі значення якого відповідають точкам ГОС. Тому відпадає потреба перевірки стійкості чи нестійкості системи на кожному кроці перебору, що суттєво зменшує час визначення значень нелінійного параметра на границі стійкості. Крім того, точність побудови ГОС визначається відхиленням значень лінійного параметра від наперед заданого, для якого визначаємо область стійкості в площині двох нелінійних параметрів, що дозволяє одержати границю цієї області із найменшим відхиленням від реальної області.

Так як при побудові області стійкості в площині двох параметрів, обидва із яких нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння, використано метод D-розбивання, то даний підхід гарантує коректність результату одержання границі ОС.

The problems of construction of stability regions of linear continuous systems in space of two parameters both of them nonlinearly go into coefficients of a secular equation are considered. The algorithm of determination a stability boundary points is proposed. It's not required to control a stability of system in these points and correctness of results is guaranteed by using of D-partition method.

Література

1. Гостев В.Н., Стеклов В.К. Системы автоматического управления с цифровым регулятором. – К.: «Радіоаматор», 1998. – 704 с.
2. Дидук Г.А. Машинные методы исследования автоматических систем. Л: 1983. – 242 с.
3. Топчеев Ю.И., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г. Системы стабилизации. М.: «Машиностроение», 1974. – 248 с.
4. Пряшников Ф.Д. Метод построения областей заданных свойств в пространстве параметров систем автоматического управления // Вестник Севастопольского ГТУ. Автоматизация процессов и управления. – Севастополь, 1997. – С.3-8.
5. Пряшнікова П.Ф. Побудова областей стійкості і якості систем автоматичного керування з запізнюваннями. Спеціальність 05.13.03.- Системи і процеси керування // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Севастополь, 2002. – 19 с.
6. Проць Я.І., Мовчан С.Л. Побудова області стійкості лінійних неперервних систем в площині параметрів, які нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння // Вісник ТДТУ. – Тернопіль, 2004. – т.9, №2 – С.103-108.