УДК 536.24

М. Михайлишин, О.Децик
(Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

Розглядається осесиметрична задача теплопровідності полого циліндра кінцевої довжини, який протягом деякого часу нагрівається внутрішніми джерелами тепла і після цього вільно охолоджується. Вважається, що на всіх граничних поверхнях справедливі умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. В початковий момент часу температура циліндра нульова.

Використовуючи метод розділення змінних, загальний розв'язок задачі записано у вигляді

$$T(r,z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(r,t)Z_k(z),$$

де $Z_k(z)=(\cos\nu_k z+\beta_k\sin\nu_k z)-$ власні функції задачі за осьовою координатою z,
ν_k- власні числа, які є коренями рівняння $tg2\nu_k l=\nu_k\left(h^-+h^+\right)\Big/\left(\nu_k^2-h^-h^+\right)$,
$h^\pm-$ відносні коефіцієнти тепловіддачі із зовнішньої і внутрішньої поверхонь циліндра.

Для знаходження функцій $\theta_k(r,t)$ отримано наступну крайову задачу

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2\theta_k}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta_k}{\partial r}-\nu_k^2\theta_k\right)-\frac{w_k(r,t)}{\lambda}=0,\qquad \theta_k(r,t)=0\qquad \text{при}\quad t=0$$

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial r}-k_1(\theta_k-t_{1k})=0\ \text{ при } r=R_1,\qquad \frac{\partial\theta_k}{\partial r}+k_2(\theta_k-t_{2k})=0\ \text{ при } r=R_2,\quad k=1,2,...$$

Задача розв'язується для кожного k числовим методом, запропонованим в роботі [1]. Введено безрозмірний час і координату за формулами

$$\tau=\frac{a^2t}{R_2^2};\qquad \rho=\frac{r}{R_2};\qquad \rho_1=\frac{R_1}{R_2}.$$

Після дискретизації по часу за схемою Кранка-Ніколсона для знаходження розв'язку на $j+1$ - му часовому шарі отримано систему рівнянь і граничні умови

$$\frac{d\theta_1^{j+1}}{d\rho}=\theta_2^{j+1}+\theta_2^j-\frac{d\theta_1^j}{d\rho},$$

$$\frac{d\theta_2^{j+1}}{d\rho}=\frac{2}{\Delta\tau}\left(\theta_1^{j+1}-\theta_1^j\right)-\frac{1}{\rho}\left(\theta_2^{j+1}+\theta_2^j\right)+\nu_k^2R_2^2\left(\theta_1^{J+1}+\theta_1^j\right)-\frac{1}{\lambda'}\left(\omega_k^{j+1}+\omega_k^j\right),$$

$$\theta_2^{j+1}+k_1R_2\theta_1^{j+1}+\theta_2^j+k_1R_2\left(\theta_1^j-2t_{1k}\right)=0,\quad \rho=\rho_1,$$

$$\theta_2^{j+1}-k_2R_2\theta_1^{j+1}+\theta_2^j-k_2R_2\left(\theta_1^j-2t_{2k}\right)=0,\quad \rho=1$$

Для розв'язування крайової задачі за радіальною координатою r використано метод дискретної ортогоналізації Годунова. Проведено числові розрахунки, отримано результати.

Література

1. Михайлишин М. Про один числовий метод розв'язування осесиметричних задач теплопровідності тонких оболонок обертання // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- Тернопіль.: 1999, том 4, число 1.-С 10-15.