УДК 536.24

М. Михайлишин, Г. Семенишин
(Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя)

ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛІНДРА У ВИПАДКУ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ ТЕПЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛУ

Розглядається задача знаходження температурного поля нескінченно довгого полого циліндра, який протягом деякого часу нагрівається розподіленими симетрично відносно осі циліндра внутрішніми джерелами тепла, після чого джерела відключаються і здійснюється вільне охолодження циліндра. На внутрішній і зовнішній поверхнях задаються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Вважаємо, що теплофізичні властивості матеріалу залежать від температури $\lambda(T)=\lambda_0 f(T)$, $c\rho=\dfrac{\lambda_0}{a}f(T)$, $\lambda(T)$ - коефіцієнт теплопровідності матеріалу, $c\rho$ - добуток теплоємності і густини.

Рівняння теплопровідності в нашому випадку має вигляд

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{f_T'}{f}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2+\frac{W(r,t)}{\lambda_0 f},$$

в якому $a-$ коефіцієнт температуропровідності (постійна величин), $W(M,t)$ - інтенсивність внутрішніх джерел тепла.

Початкові і граничні умови задачі наступні

$$T=T_0 \quad \text{при} \quad t=0,$$

$$\mp\lambda\frac{\partial T}{\partial r}+\alpha^{\mp}\left(T-T_c^{\mp}\right)=0 \quad \text{при} \quad r=R_{1,2},$$

де $\alpha^{\mp}$ - коефіцієнти тепловіддачі з внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра, $T^{\mp}$ - температура зовнішнього середовища всередині і зовні циліндра.

Для розв'язування задачі розроблено числовий метод, який ґрунтується на дискретизації за часом у відповідності зі схемою Кранка-Ніколсона і використанні методу дискретної ортогоналізації Годунова для розв'язування крайової задачі за радіальною координатою. Для лінеаризації нелінійної крайової задачі (нелінійність як в системі рівнянь, так і в граничних умовах) використовується метод Ньютона-Канторовича. У випадку, коли функція $f(T)$ задається у вигляді $f(T)=1+\beta\left(T-T^0\right)$, відповідна крайова задача виглядає так

$$\frac{\partial\theta_{1(s+1)}^{j+1}}{\partial r}=\theta_{2(s+1)}^{j+1}-\frac{\partial\theta_1^j}{\partial r}+\theta_2^j,$$

$$\frac{\partial\theta_{2(s+1)}^{j+1}}{\partial r}=-\frac{\partial\theta_2^j}{\partial r}+\frac{2\left(\theta_{1(s+1)}^{j+1}-\theta_1^j\right)}{a\Delta t}-\frac{\theta_{2(s+1)}^{j+1}+\theta_2^j}{r}-\frac{2\left(w^{j+1}+w^j\right)}{\lambda_0\left[2+\beta\left(\theta_{1(s)}^{j+1}+\theta_1^j\right)\right]}\left[1-\frac{\beta\left(\theta_{1(s+1)}^{j+1}-\theta_{1(s)}^{j+1}\right)}{2+\beta\left(\theta_{1(s)}^{j+1}+\theta_1^j\right)}\right]-$$

$$-\frac{\beta\left[\left(\theta_{2(s)}^{j+1}\right)^2+2\theta_{2(s)}^{j+1}\theta_2^j+\left(\theta_2^j\right)^2\right]}{2+\beta\left(\theta_{1(s)}^{j+1}+\theta_1^j\right)}\left[1-\frac{\beta\left(\theta_{1(s+1)}^{j+1}-\theta_{1(s)}^{j+1}\right)}{2+\beta\left(\theta_{1(s)}^{j+1}+\theta_1^j\right)}\right]-\frac{2\beta\left(\theta_{2(s)}^{j+1}+\theta_2^j\right)}{2+\beta\left(\theta_{1(s)}^{j+1}+\theta_1^j\right)}\left(\theta_{2(s+1)}^{j+1}-\theta_{2(s)}^{j+1}\right).$$

$$\mp\theta_{2(s+1)}^{j+1}+\tilde{\mu}_{(s)}^{\mp}\left(\theta_{1(s+1)}^{j+1}-\tilde{\theta}_{c(s)}^{\mp}\right)=0, \quad r=R_{1,2}.$$

Система рівнянь служить для знаходження розв'язку θ_1^{j+1}, θ_2^{j+1} на $j+1$ - му часовому шарі, якщо відомий розв'язок на j - му часовому шарі. Індексом s позначено номер наближення лінеаризованої задачі.