

ЗАДАЧА ПРО РОЗПОДІЛ СТРУМІВ У ПРЯМОКУТНІЙ ПЛАСТИНІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ

Розглянемо задачу розподілу струмів в плоскій трьохзв'язній області. Нехай потрібно визначити стаціонарний розподіл струмів у прямокутній пластині $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ з двома круговими отворами $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq r_1^2$, $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \leq r_2^2$ (область D). Горизонтальні сторони прямокутника вважатимемо ізольованими. На вертикальних сторонах та колах, що обмежують отвори усередині пластини, потенціал вважаємо фіксованим і заданим.

Математичною моделлю поля струмів у цьому випадку є рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in D \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ при } y = 0, y = b, x \in [0; a]$$

$$u = \text{const} \text{ при } x = 0, x = a, y \in [0; b] \quad (2)$$

$$u = \text{const} \text{ при } (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \text{ або } (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$$

Розв'язок задачі шукаємо чисельно-аналітичним методом безпосередньої алгебризації крайової задачі, застосовним у випадку, коли фундаментальний розв'язок рівняння відомий. Для рівняння Лапласа (1) фундаментальним розв'язком є функція

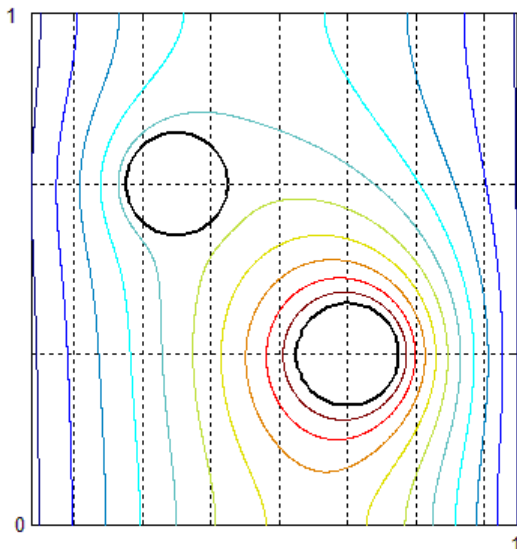
$$G(x, y, x_0, y_0) = \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \quad (3)$$

Згідно з методом безпосередньої алгебризації розв'язок шукають у вигляді

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^N A_i G_i(x, y, x_{0i}, y_{0i}), \quad (x_{0i}, y_{0i}) \notin D \quad (4)$$

де N – кількість точок-джерел;

A_i – коефіцієнти, які підбираються таким чином, щоб виконувались задані крайові умови. Прирівнюючи функцію (4) або її нормальну похідну в N точках границі області D зі значеннями, заданими крайовими умовами (2), отримуємо систему N лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів A_i .



Алгоритм розв'язку реалізований в середовищі MATLAB і передбачає можливість вибору геометричних параметрів задачі та крайових умов.

Результати розв'язку даної задачі можуть бути використані при математичному моделюванні інших процесів, що описуються рівнянням Лапласа (температурного, дифузійного і т.п.).

Еквіпотенціальні лінії для випадку $a = 1$, $b = 1$, $r_1 = 0,1$, $r_2 = 0,1$, $x_1 = 1/3$, $y_1 = 2/3$, $x_2 = 2/3$, $y_2 = 1/3$ приведено на рисунку.