

ЛІТЕРАТУРА



НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

*Кафедра автоматизації
технологічних процесів і
виробництв*

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

*ЛАБОРАТОРНИЙ
ПРАКТИКУМ*

Тернопіль 2011

Теорія автоматичного управління. Лабораторний практикум –. Укладачі: В. В. Скочиляс, О. Л. Ляшук, Тернопіль: ТНТУ, 2011. – 55 с.

Лабораторний практикум дає змогу ознайомитися з динамічними ланками систем автоматичного керування. Практикум містить опис лабораторних робіт по базових розділах теорії лінійних систем автоматичного управління, короткі теоретичні відомості, та опис можливостей пакетів математичних обчислень MathCAD та VisSim, що використовуються при виконанні кожної роботи. Наведено різноманітні приклади технічної реалізації елементів САК.

Для студентів напряму 6.050202 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології".

Укладачі: ас. Скочиляс В. В., доц., к. т. н. Ляшук О. Л.

Рецензент: доц., к.т.н. Мовчан Л.Т.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 12 від 22 квітня 2011 р.)

Схвалено і рекомендовано до друку Вченою Радою факультету комп'ютерних технологій Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (протокол № 9 від 16 травня 2011 р.).

ВСТУП

Лабораторний практикум є навчально-методичною базою для виконання лабораторних робіт з курсу "Теорія автоматичного управління" (ТАУ) студентами спеціальностей 7.05020201 "Автоматизоване управління технологічними процесами" та 7.05020202 "Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва".

Однією з найважливіших задач теорії автоматичного управління є вивчення динамічних процесів в автоматичних системах. Не дивлячись на велику різноманітність складових елементів автоматичних систем, які відрізняються між собою за фізичною природою, конструктивним виконанням, потужністю, видом енергії живлення тощо, можна виділити тільки декілька типових динамічних ланок.

Динамічною ланкою, або просто ланкою, називається елемент (частина) автоматичної системи, який має визначені динамічні властивості. Типовими ланками доцільно вважати такі, котрі можуть слугувати для побудови будь-яких інших ланок, що зустрічаються на практиці.

Типові ланки є ланками направленої дії: сигнали передаються ланкою в одному напрямі – зі входу на вихід. При зміні вхідного сигналу змінюється і вихідний, якщо вхідний сигнал не змінюється, не повинен змінюватися і вихідний сигнал. Для того, щоб елемент САК зображувався направленою ланкою, необхідно враховувати навантаження на її виході. При з'єднанні ланок направленої дії вони зберігають свої попередні властивості.

Елемент автоматичної системи не обов'язково зображувати однією типовою ланкою. В залежності від складності рівняння елемента він може бути представлений декількома типовими ланками, з'єднаних між собою. Більш того, ланки не обов'язково представляти конкретним елементом САК. Вони можуть відповідати деякій математичній залежності.

Мета практикуму: розвиток та закріплення у студентів навиків практичного структурного аналізу та проектування систем автоматичного керування, вивчення динамічних властивостей та побудова динамічних характеристик різних ланок автоматичних систем у часовому та частотному просторі.

Виконання лабораторних робіт передбачає використання потужної системи комп'ютерної алгебри MathCAD та засобу візуальної мови програмування для моделювання динамічних систем VisSim. Кожна робота містить опис команд MathCAD та VisSim, які можуть бути використані при виконанні завдань.

Підготовку до лабораторних робіт рекомендується виконувати в такій послідовності:

- 1) вивчити літературу по даній темі; рекомендовані посібники [1-4];
- 2) виконати попереднє розрахункове завдання, використовуючи методичні вказівки. Для поглибленого знайомства з можливостями MathCAD та VisSim, можуть бути рекомендовані посібники [5,6];
- 3) вивчити робоче завдання і методичні вказівки до його виконання.

Попереднє розрахункове завдання виконується заздалегідь і включається в звіт по лабораторній роботі. Графіки і характеристики роздруковуються на принтері. Кожний студент виконує звіт індивідуально і представляє його викладачу при захисті відповідної лабораторної роботи.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Мета роботи: експериментально дослідити перехідні характеристики лінійних систем, виміряти амплітудні і часові параметри вхідної і вихідної дії, порівняти експериментально одержані часові характеристики з теоретично одержаними часовими характеристиками.

1. Основні теоретичні відомості.

Часовою характеристикою ланки називається графік зміни вихідної величини $y(t)$ по визначеному закону і при умові, що до прикладення зовнішньої дії ланка була в стані спокою. Часові характеристики залежать від властивостей системи і від характеру зовнішньої дії, для якої вони визначаються. Можна розглядати ці характеристики по вхідній дії x і по збуренню f . При визначенні часових характеристик по якій-небудь зовнішній дії інші дії дорівнюють нулю.

В даній лабораторній роботі розглядають часові характеристики тільки по вхідній величині x , яка змінюється по закону одиничної сходянкової дії, або по закону дельта-функції.

Часові характеристики ланки при цих законах зміни зовнішніх дій називаються відповідно перехідними характеристиками і імпульсними перехідними характеристиками системи або ланки.

Перехідною характеристикою називається графік зміни в часі вихідної величини ланки або системи, коли на вхід подається одинична сходянкова дія. Одинична сходянкова дія – це дія, яка миттєво змінюється від нуля до одиниці і надалі залишається незмінною.

На рис.1 показані перехідні характеристики різних систем.

Аналітичним виразом для перехідної характеристики є перехідна функція, яка позначається $h(t)$. Аналітичним виразом одиничної сходянкової дії є одинична сходянкова функція, яка позначається $1(t)$ і може бути описана таким виразом:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Таким чином, $h(t)$ – це вираз для $y(t)$ при $x(t)=1(t)$.

Поряд з перехідною характеристикою використовується імпульсна перехідна характеристика, яка є реакцією системи або ланки на одиничний імпульс. Одиничний імпульс – це математична ідеалізація гранично короткого імпульсного сигналу. Одиничний імпульс – це імпульс, площа якого дорівнює одиниці при тривалості, що дорівнює нулю і висоті, рівній нескінченності.

На рис.2 цей імпульс умовно показаний в вигляді потовщення на осі

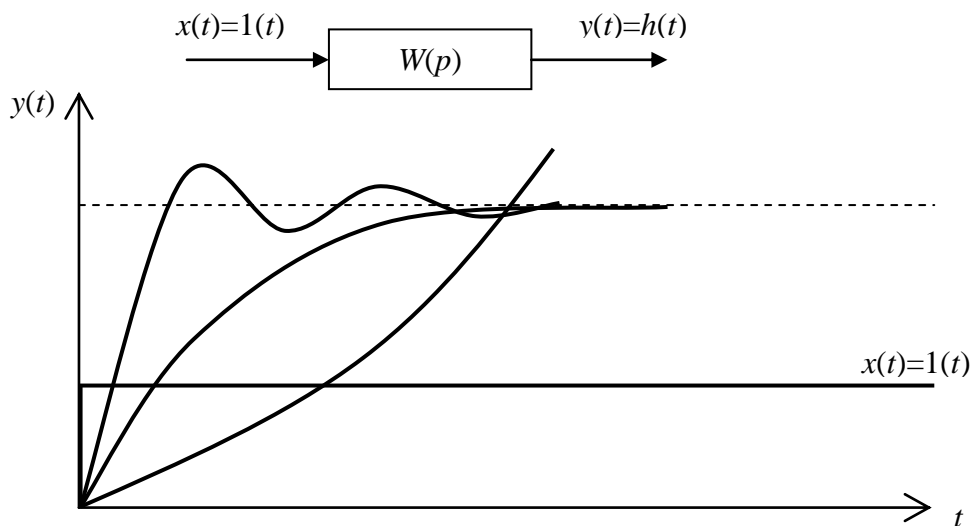


Рисунок 1

ординат. На цьому ж малюнку зображені різні типові форми імпульсних перехідних характеристик.

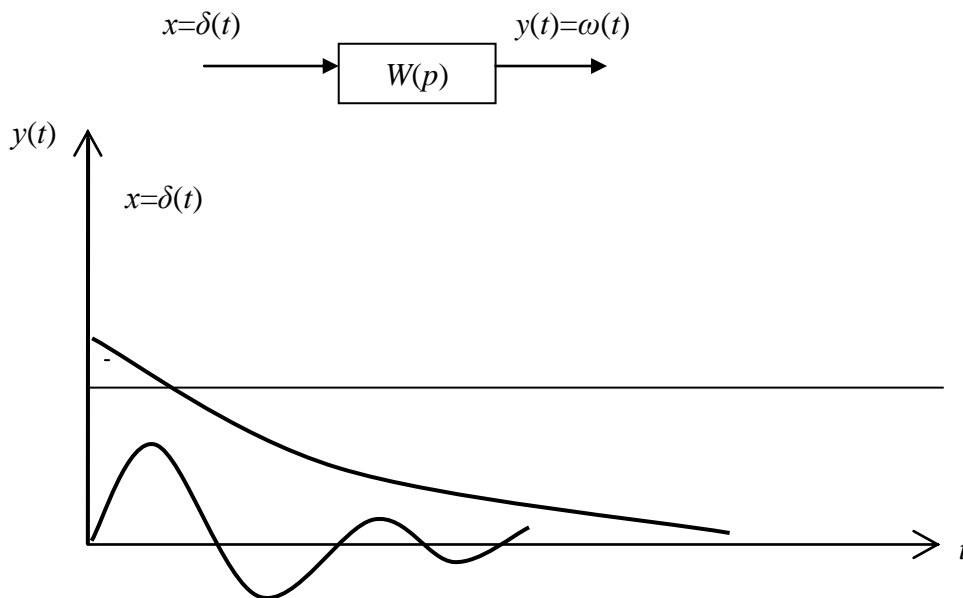


Рисунок 2

Аналітичним виразом для імпульсної перехідної характеристики є імпульсна перехідна функція або вагова функція (функція ваги), яка позначається $\omega(t)$. Вираз для одиничного імпульсу називається одиничною імпульсною функцією або дельта-функцією і позначається $\delta(t)$. Таким чином, $\omega(t)$ – це $y(t)$ при $x(t)=\delta(t)$.

Математично дельта-функцію можна записати так:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

При цьому згідно визначення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Дельта-функція просто зв'язана з одиничною сходячкою дією:

$$\delta(t)=1'(t)$$

Аналітичний зв'язок між перехідною і ваговою функціями лінійних ланок можна записати у вигляді

$$\omega(t)=h'(t),$$

$$h(t)=\int_0^t \omega(t)d(t).$$

Перехідну функцію можна визначити експериментально або обчислити теоретично, використовуючи передавальну функцію $W(s)$.

Якщо система в загальному описана лінійним диференціальним рівнянням

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_n)y=(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\dots+b_m)x \quad (1)$$

або

$$Q(p)y=R(p)x,$$

де $p \equiv \frac{d}{dt}$ – символ диференціювання по часу, то передавальною функцією в

операторній формі називається відношення оператора дії $R(p)$ до власного оператора $Q(p)$ і позначається

$$W(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}.$$

В зображеннях Лапласа рівняння (1) має вигляд

$$Q(s)Y(s)=R(s)X(s).$$

Передавальною функцією в формі зображення Лапласа називається відношення зображення вихідної величини до зображення вихідної величини при нульових початкових умовах.

$$W(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{R(s)}{Q(s)}$$

Якщо досліджувана система (ланка) описується передавальною функцією $W(s)$, то враховуючи, що зображення одиничної сходячкової функції

$L\{1(t)\}=\frac{1}{s}$, зображення перехідної функції має вигляд

$$H(s)=\frac{W(s)}{s}.$$

Звідки

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

Тобто, перехідна функція є зворотнім зображенням передавальної функції поділеної на s .

Оригінал перехідної функції можна визначити, як суму лишок в особливих точках.

Для випадку, коли всі корені характеристичного рівняння $Q(s)=0$ різні

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{R(s_i)}{Q'(s_i)} e^{s_i t},$$

коли знаменник функції $H(s)$ має один нульовий корінь

$$h(t) = \frac{R(0)}{Q(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{R(s_i)}{s_i Q'(s_i)} e^{s_i t}$$

в загальному випадку

$$h(t) = \sum_{i=1}^l \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}} [H(s)(s - s_i)^{n_i} e^{st}],$$

де: $R(s)$ поліном чисельника $H(s)$; $Q'(s)$ – похідна від полінома знаменника $H(s)$; s_i – полюси функції $H(s)$, тобто корені характеристичного рівняння $Q(s)=0$; l – кількість різних коренів; n_i – кількість однакових коренів.

Результати обчислень перехідної функції представляють у вигляді графіка, побудованого в координатах (h, t) . Конкретні графіки функції $h(t)$ (монотонні, коливні, аперіодичні) залежать від властивостей системи (ланки) і можуть бути самими різними.

Початкові (при $t \rightarrow 0_+$) і кінцеві (при $t \rightarrow \infty$) значення перехідної функції можна визначити без обчислення самої функції $h(t)$.

За теоремою про початкове значення

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = W(s)$$

За теоремою про кінцеве значення

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)$$

Для лінійних систем (ланок) при неодиначному стрибку вхідної величини $x(t)=A \cdot 1(t)$ вихідна величина буде змінюватися на закон $y(t)=A \cdot h(t)$, де $A=\text{const}$.

Функцію ваги можна визначити теоретично або експериментально. Для експериментального визначення $\omega(t)$ оцилографується процес зміни вихідної величини при вхідній дії в вигляді реального імпульса довільної форми, площа якого дорівнює одиниці.

Методична похибка буде тим менша, чим менша тривалість вхідного імпульса в порівнянні з часом перехідного процесу в досліджуваній ланці.

Для ланки з передавальною функцією $W(p)$ з врахуванням того, що $L\{\delta(t)\} = 1$, зображення функції ваги має вигляд $L\{\omega(t)\} = W(s)$.

Звідки видно, що функція ваги є зворотнім перетворенням Лапласа від передавальної функції ланки $\omega(t) = L^{-1}\{W(s)\}$.

Функцію ваги обчислюють так само, як і оригінал перехідної функції.

Початкове і кінцеве значення функції ваги можуть бути визначені по формулах:

$$\omega(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sW(s),$$

$$\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)$$

Якщо на вхід лінійної ланки подається неединична дельта-функція $x(t)=A \cdot \delta(t)$, де $A=\text{const}$, реакція ланки на цей сигнал дорівнює $y(t)=A \cdot \omega(t)$.

Графік функції ваги будується в координатах (ω, t) . Характер графіка $\omega(t)$ залежить від властивостей ланки.

Зв'язок між перехідною функцією і функцією ваги можна визначити на основі теореми про зображення похідної

$$L\{h'(t)\} = sH(s) - h(0_+) = W(s) - h(0_+)$$

звідки

$$W(s) = L\{h'(t)\} + h(0_+).$$

Перехід від зображення до оригіналів дає таку залежність:

$$\omega(s) = \frac{dh(t)}{dt} + h(0_+) \cdot S(t)$$

2. Попередні завдання для обчислень.

1. Записати передавальну функцію системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{dx}{dt} + b_1 x$$

де $a_0 = T^2$, $a_1 = 2\xi T$, $a_2 = 1$, $b_0 = k\xi T$.

Числові значення параметрів задані в таблиці 1.

2. Записати вираз для перехідної функції системи згідно заданого варіанту (Таблиця 1)

3. Записати вираз для імпульсної перехідної функції вказаної системи.

Таблиця 1

Варіант	$T \cdot 10^{-4} 1/c$	ξ	k	b_1
1	9,4	0,263	2,8	0
2	9,3	0,271	2,9	0,001
3	9,2	0,280	2,95	0,002
4	9,1	0,290	3,0	0,003
5	9,0	0,295	3,1	0,004
6	8,9	0,3	3,2	0,005
7	8,8	0,31	3,3	0,006
8	8,7	0,32	3,4	0,007
9	8,6	0,33	3,5	0,008
10	9,5	0,26	2,83	0
11	9,6	0,25	2,89	0,001
12	9,7	0,24	2,93	0,002
13	9,8	0,23	3,00	0,003
14	9,9	0,22	3,1	0,002
15	10	0,23	2,8	0,003
16	10,1	0,25	2,7	0,002
17	10,2	0,26	2,9	0,001

18	9,3	0,27	3,0	0,002
19	9,2	0,3	3,2	0,001
20	9,1	0,33	3,3	0,002
21	9,0	0,34	3,0	0
22	9,6	0,28	3,1	0,001
23	9,7	0,31	3,4	0,002
24	9,8	0,30	2,9	0,003
25	10	0,25	3,0	0,006

2.1 Приклад виконання попередніх завдань для обчислень

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{dx}{dt} + b_1 x;$$

$$p \equiv \frac{d}{dt};$$

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y = (b_0 p + b_1) x;$$

$$W(p) = \frac{y}{x} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2};$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}; \quad h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{b_0 s + b_1}{s(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)} \right\}.$$

$$\underline{T} := 9.8 \cdot 10^{-4} \quad \zeta := 0.23 \quad k := 3 \quad b_1 := 0.003 \quad a_0 := T^2 \quad a_1 := 2 \cdot \zeta \cdot T$$

$$b_0 := k \cdot \zeta \cdot T \quad x := 1 \quad a_2 := 1$$

Given

$$a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2 = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow (-234.694 - 993.052i \quad -234.694 + 993.052i)$$

$$\underline{R}(s) := b_0 \cdot s + b_1 \quad \underline{Q}(s) := a_0 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_2 \quad i := \sqrt{-1}$$

$$\frac{R(0)}{Q(0)} = 3 \times 10^{-3}$$

$$Q'(s) := \frac{d}{ds} Q(s) \quad Q'(s) \rightarrow 0.0000019208 \cdot s + 0.0004508$$

$$R(-2.347 \times 10^2 - 9.931i \times 10^2) \rightarrow -0.15570414 - 0.67153422i$$

$$Q'(-2.347 \times 10^2 - 9.931i \times 10^2) \rightarrow -1.176e-8 - 0.00190754648i$$

$$H_2 := \frac{R(-2.347 \times 10^2 - 9.931i \times 10^2)}{(-2.347 \times 10^2 - 9.931i \times 10^2) \cdot Q'(-2.347 \times 10^2 - 9.931i \times 10^2)} \cdot e^{(-2.347 \times 10^2 - 9.931i \times 10^2) \cdot t}$$

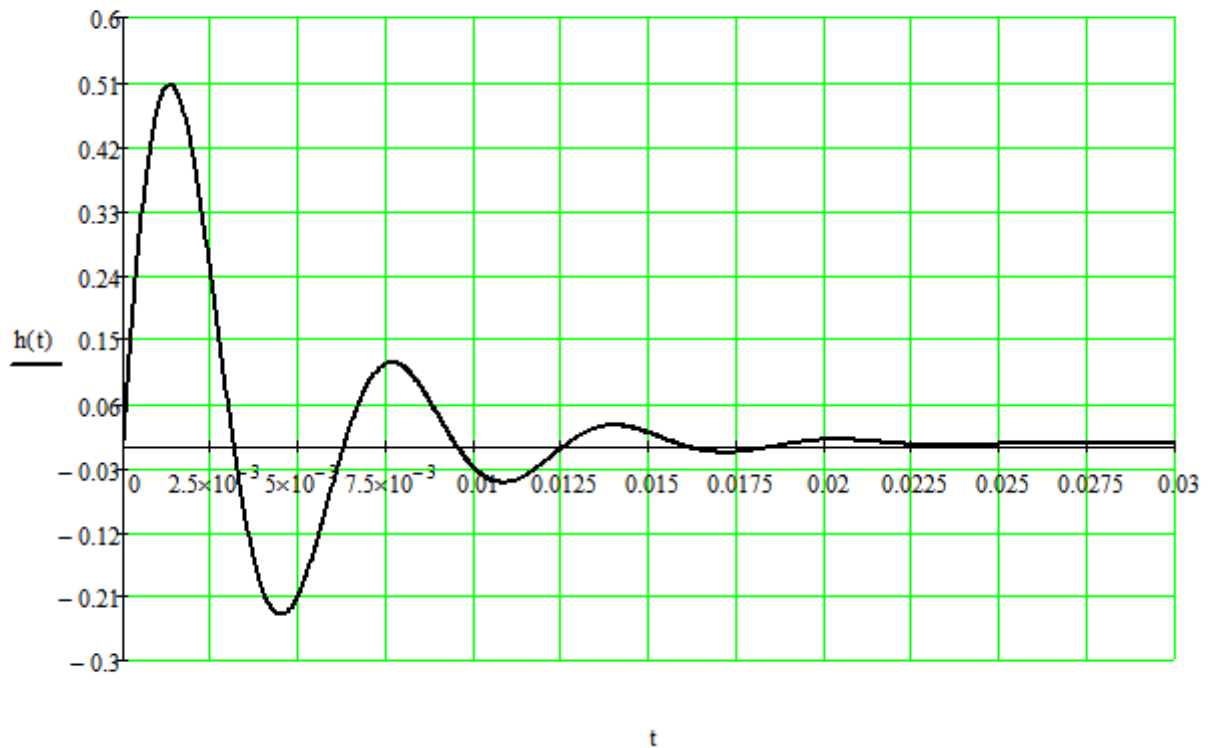
$$H_2 \rightarrow -(0.0015020407876922536279 - 0.35413230345333151813i) \cdot e^{-(234.7+993.1i) \cdot t}$$

$$p_1 := \text{Re}(1.502 \times 10^{-3} - 3.541i \times 10^{-1}) \quad p_2 := \text{Im}(1.502 \times 10^{-3} - 3.541i \times 10^{-1})$$

$$p_1 = 1.502 \times 10^{-3} \quad p_2 = -3.541 \times 10^{-1} \quad 2 \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 7.082 \times 10^{-1} \quad \frac{p_2}{p_1} = -2.358 \times 10^2$$

$$\phi_1 := \text{atan}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \phi_1 \rightarrow -1.5665546126126745528$$

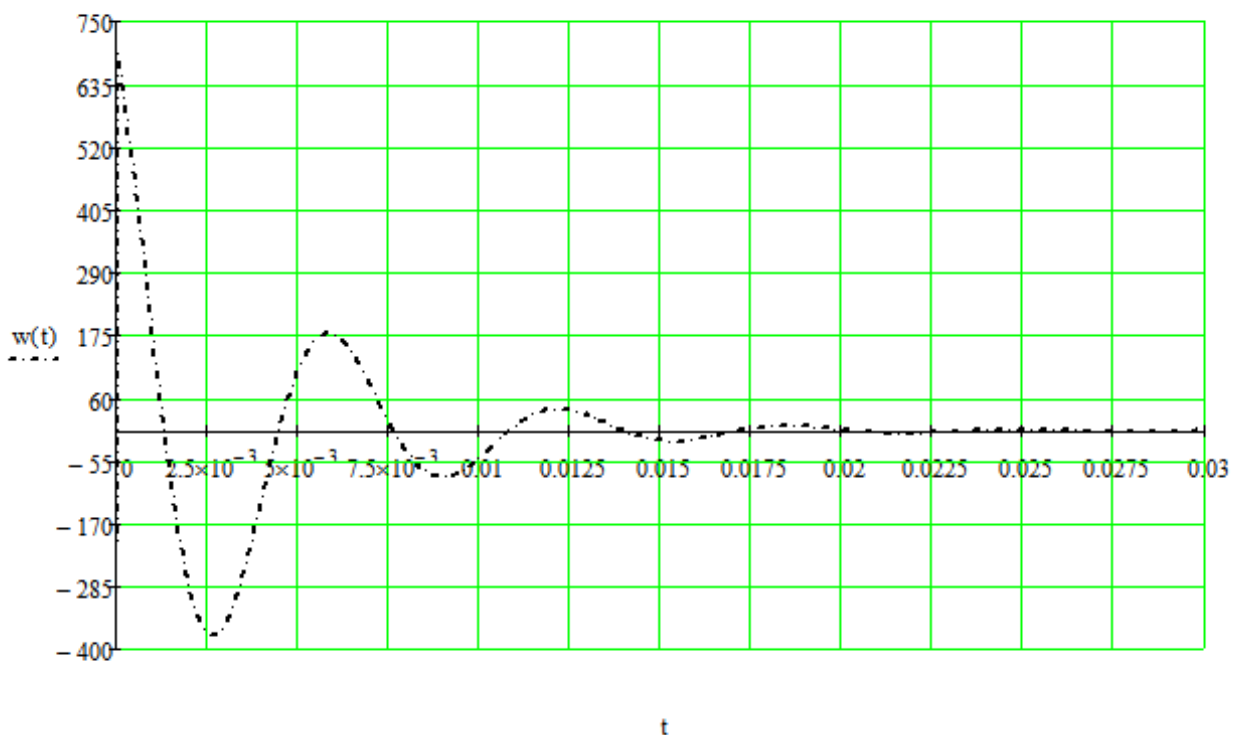
$$h(t) := 3 \times 10^{-3} + 7.082 \times 10^{-1} \cdot e^{-234.7t} \cdot \cos(993.1t - 1.567)$$



$$w(t) := \frac{d}{dt} h(t)$$

+

$$w(t) \rightarrow -166.21454 \cdot e^{-234.7 \cdot t} \cdot \cos(993.1 \cdot t - 1.567) + -703.31342 \cdot e^{-234.7 \cdot t} \cdot \sin(993.1 \cdot t - 1.567)$$



3. Робоче завдання

1. Отримати осцилограму перехідної функції досліджуваної системи.
2. Отримати осцилограму імпульсної перехідної функції досліджуваної системи.

4. Виконання робочого завдання

1. Для побудови перехідної характеристики системи заданої передавальною функцією, засобами **VisSim** створюється наступна схема:

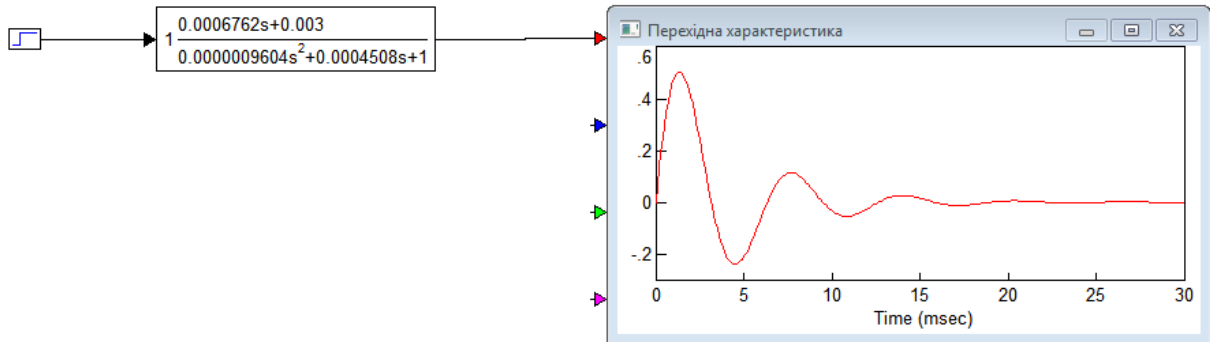


Рисунок 3 – Побудова перехідної характеристики

Для цього спочатку з меню "Blocks -> Signal Producer" вибирається блок "step".

Потім з меню "Blocks -> Linear System" блок "transferFunction". Після того, як блок розташований на листі діаграми, клацанням правої кнопки миші викликається вікно налаштувань цього блоку (див. рис. 4) і встановлюються відповідні значення.

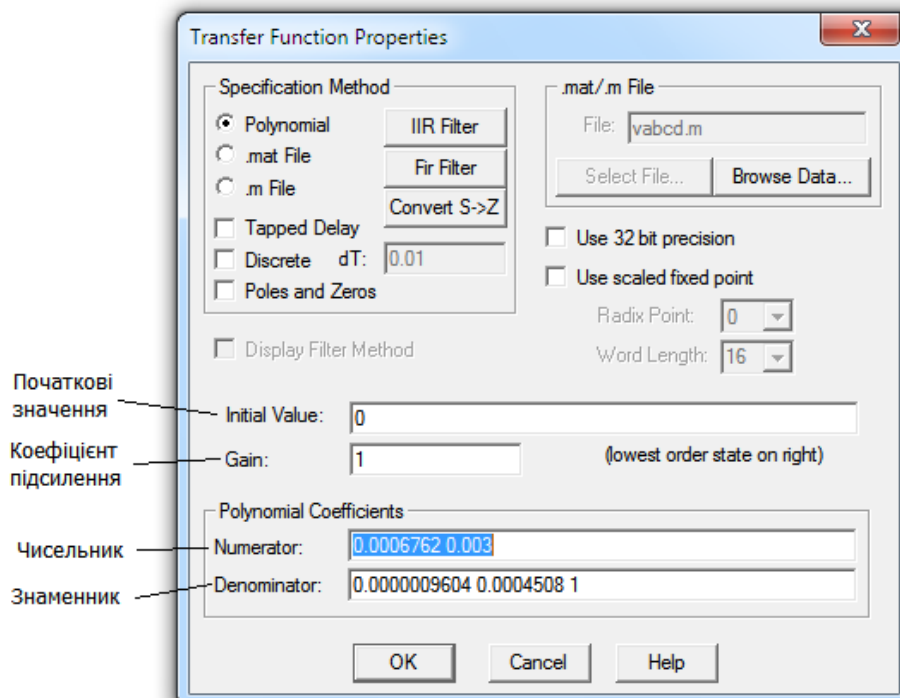


Рисунок 4 – Властивості передавальної функції

Останній блок – блок графіків "plot" з меню "Blocks -> Signal Consumer".

Розташовані блоки з'єднуються лініями функціональних зв'язків.

У налаштуваннях моделювання "Simulate -> Simulation Properties". встановлюється час початку, кінця моделювання і крок (рис. 5).

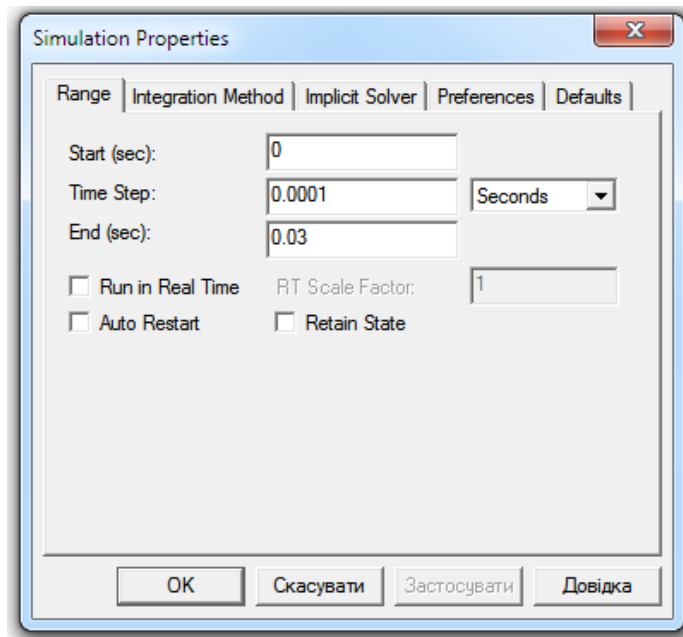


Рисунок 5 – Налаштування моделювання

Модель запускається на виконання (командою "Simulation -> Go" або натисненням клавіші F5 клавіатури або натисненням кнопки Go панелі інструментів). Результат представлений на рис. 1.

Для роздруку перехідних кривих на принтері слід збільшити вікно графіків "plot" в увесь екран і дати команду "File -> Print". чи натиснути на кнопку "Print" панелі інструментів.

В звіт необхідно подати збільшене в увесь екран та коректно змасштабоване вікно графіків "plot".

2. Для побудови імпульсної перехідної характеристики системи, необхідно на вхід системи подати дельта-функцію. Для цього копіюємо схему з файлу "Delta.vsm" і з'єднуємо її вихід з входом досліджуваної системи (див. рис. 6).

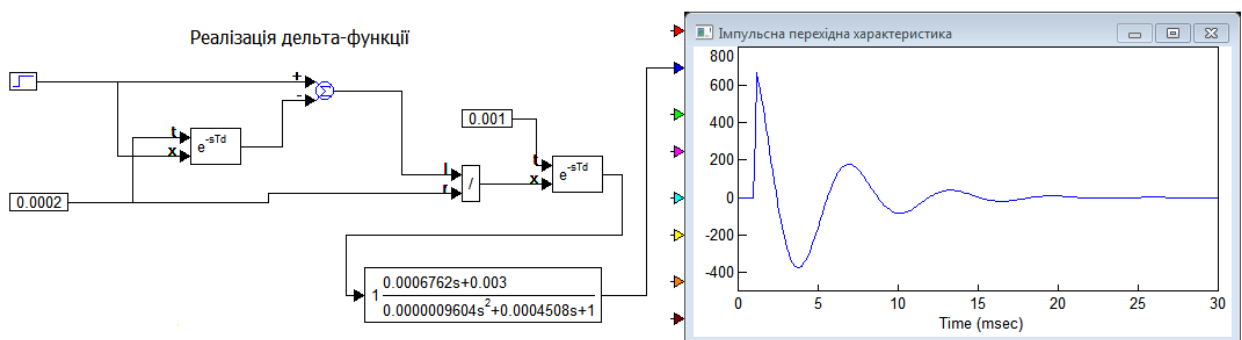


Рисунок 6 – Побудова імпульсної перехідної характеристики

3. Порівняти результати, отримані в результаті моделювання з теоретично одержаними часовими характеристиками.

4. Пояснити одержані результати (висновки).

5. Порядок оформлення звіту

Звіт оформляється відповідно до вимог ЄСКД на білому папері формату А4. На титульному аркуші вказуються назви міністерства, вузу, кафедри, роботи, прізвище студента, прізвище викладача.

Звіт **повинен** містити наступні матеріали:

- 1) тему і мету роботи;
- 2) початкові дані;
- 3) виконане попереднє завдання для обчислень;
- 4) схему змодельованої САК;
- 5) отримані в результаті моделювання перехідні криві;
- 6) висновки.

6. Контрольні питання і завдання

1. Дайте визначення перехідної характеристики і перехідної функції.
2. Дайте визначення імпульсної перехідної характеристики і функції (функції ваги).
3. Назвіть типові форми перехідної характеристики.
4. Дайте визначення передавальної функції в операторній формі і формі перетворення Лапласа.
5. Дайте визначення одиничної дії і одиничного імпульсу і їх аналітичних виразів.
6. Запишіть в загальному вигляді формулу теорем розкладу в випадку коли всі корені різні і коли один з коренів дорівнює нулю.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Мета роботи: дослідити частотні характеристики лінійних систем і порівняти результати експериментальних досліджень з результатами теоретичних досліджень.

1. Основні теоретичні відомості

Частотні характеристики описують усталені вимушені коливання на виході ланки чи системи, які викликані гармонічною дією на вході.

Нехай на вхід системи подається гармонічна дія

$$x = X_m \sin \omega t,$$

де X_m – амплітуда, а ω – кутова частота цієї дії.

Після закінчення перехідного процесу на виході ланки є гармонічні коливання з частотою вхідних коливань, але відрізняються в загальному випадку амплітудою і фазою, тобто в усталеному режимі вихідна величина ланки

$$y = Y_m \sin(\omega t + \varphi),$$

де Y_m – амплітуда вихідних усталених коливань, а φ – фазовий зсув між вхідними і вихідними коливаннями.

При фіксованій амплітуді вхідних коливань амплітуда і фаза усталених коливань на виході ланки залежать від частоти коливань. Якщо постійно збільшувати від нуля частоту коливань і визначати усталені значення амплітуди і фази вихідних коливань для різних частот, то можна одержати залежність від частоти відношення амплітуд $A = Y_m/X_m$ і зсуву фаз φ вихідних і вхідних усталених коливань. Ці залежності називаються відповідно $A(\omega)$ – амплітудною частотною характеристикою (АЧХ, рис.1,а) і $\varphi(\omega)$ – фазовою частотною характеристикою (ФЧХ, рис.1,б)

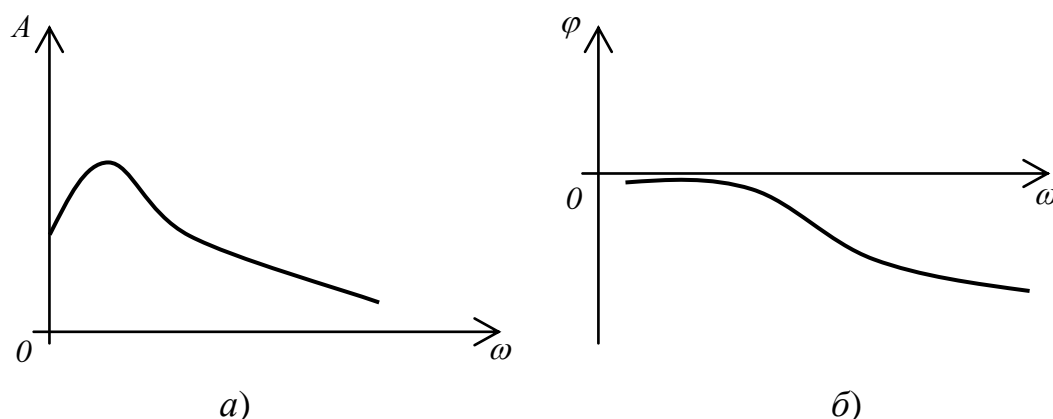


Рисунок 1.

Аналітичні вирази $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ називаються відповідно амплітудною і фазовою частотними функціями.

Амплітудну і фазову частотні характеристики можна об'єднати в одну характеристику амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ), використовуючи $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ в якості полярних координат (рис.2).

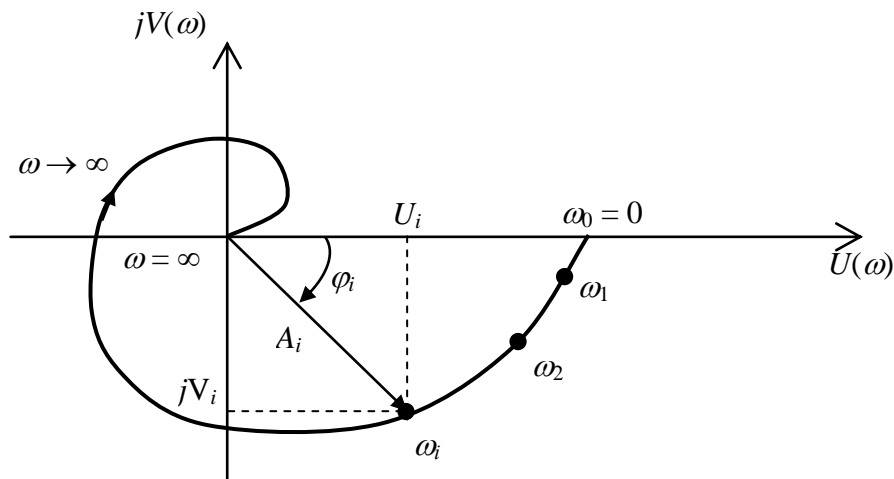


Рисунок 2.

Кожна точка амплітудно-фазової частотної характеристики відповідає певному значенню частоти ω . По АФЧХ можна побудувати амплітудну і фазові частотні характеристики.

Амплітудно-фазову частотну характеристику можна побудувати і в прямокутній системі координат – в комплексній площині. При цьому координатами будуть показані на рис.2, проекції U і V вектора A на відповідні осі. Залежності $U(\omega)$ і $V(\omega)$ називаються відповідно дійсною і уявною частотними характеристиками.

Аналітичні вирази для розглянутих частотних характеристик можна одержати з передавальних функцій. Якщо в вираз передавальної функції $W(p)$ підставити $p=j\omega$, то одержують комплексну функцію $W(j\omega)$, яка є функцією ω і називається амплітудно-фазовою частотною функцією.

Ця функція є аналітичним виразом для амплітудно-фазової частотної характеристики. Відповідно її модуль є аналітичним виразом для амплітудної частотної характеристики, тобто амплітудною частотною функцією $A(\omega)$, а аргумент – виразом для фазової частотної характеристики, тобто фазовою частотною функцією $\varphi(\omega)$. Зв'язок між частотною передавальною функцією і частотними функціями можна записати у вигляді

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

або в алгебраїчній формі

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

де дійсна і уявна частини $V(\omega)$ і $U(\omega)$ є координатами амплітудно-фазової характеристики в комплексній площині.

Зв'язок між частотними функціями записується такими співвідношеннями

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega),$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Частотні функції $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega)$ і $V(\omega)$ просто визначаються з передавальної функції $W(p)$, після підстановки $p=j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

де

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{U_R^2(\omega) + V_R^2(\omega)}}{\sqrt{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}}, \quad \phi = \arctg \frac{V_R(\omega)}{U_R(\omega)} - \arctg \frac{V_Q(\omega)}{U_Q(\omega)}$$

і

$$U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_Q(\omega) + V_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)},$$

$$V(\omega) = \frac{V_R(\omega)U_Q(\omega) - U_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}.$$

При дослідженні систем автоматичного керування амплітудну і фазову частотні характеристики зручно будувати в логарифмічних координатах.

Функцію

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$$

називають логарифмічною амплітудною частотною функцією. Графік залежності логарифмічної амплітудної частотної функції $L(\omega)$ від частоти ω або логарифму частоти $\lg(\omega)$ називають логарифмічною амплітудною частотною характеристикою (ЛАЧХ). При побудові ЛАЧХ по осі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі, а по осі ординат - $L(\omega)$.

Логарифмічною фазовою частотною характеристикою (ЛФЧХ) називають графік залежності фазової частотної функції $\varphi(\omega)$ від логарифму частоти $\lg \omega$.

Одиницею $L(\omega)$ є децибел, а одиницею логарифму частоти в ЛЧХ – декада. Декадою називають інтервал, на якому частота змінюється в 10 раз.

Вісь ординат при побудові ЛЧХ проводять через довільну точку, а не через точку $\omega=0$. Частоти $\omega=0$ відповідає нескінченно віддалена точка: $\lg \omega \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow 0$.

2. Попереднє завдання

1. Записати передавальні функції системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{dx}{dt} + b_1 x$$

$$\text{де } a_0 = T^2, \quad a_1 = 2\xi T, \quad a_2 = 1, \quad b_0 = k\xi T.$$

Числові значення параметрів задані в таблиці 1.

2. Записати формули для розрахунку частотної характеристики досліджуваної системи $\{A(\omega), \varphi(\omega), U(\omega), V(\omega)\}$.
3. Побудувати годографи а.ф.х. досліджуваної системи згідно вказаного варіанту (Таблиця 1)
4. Побудувати асимптотичні л.а.х. досліджуваної системи.
5. Визначити спряжену частоту ω_c і частоту зрізу $\omega_{зр}$ по л.а.х. досліджуваної системи.

Таблиця 1

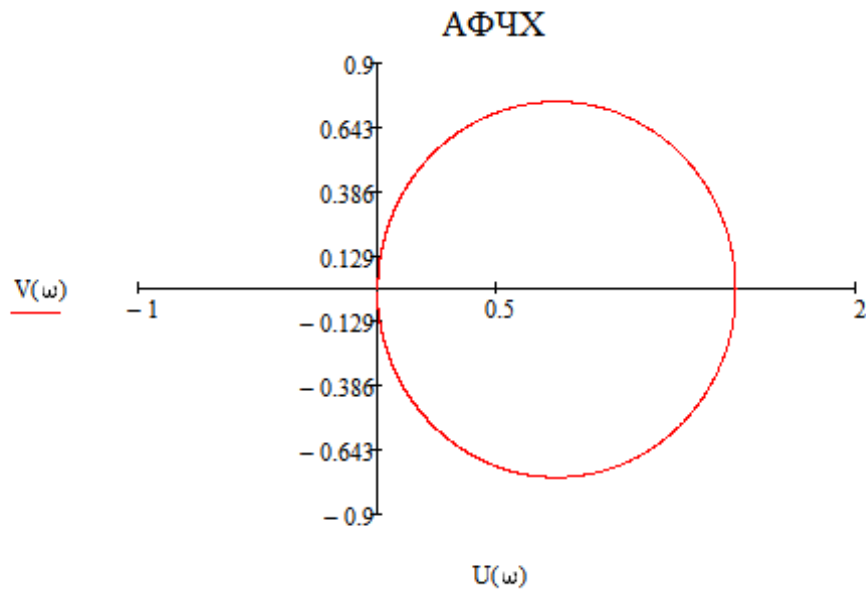
	$T \cdot 10^{-4} \text{ } 1/\omega_c$	ξ	k	b_1
1	9,4	0,263	2,8	0
2	9,3	0,271	2,9	0,001
3	9,2	0,280	2,95	0,002
4	9,1	0,290	3,0	0,003
5	9,0	0,295	3,1	0,004
6	8,9	0,3	3,2	0,005
7	8,8	0,31	3,3	0,006
8	8,7	0,32	3,4	0,007
9	8,6	0,33	3,5	0,008
10	9,5	0,26	2,83	0
11	9,6	0,25	2,89	0,001
12	9,7	0,24	2,93	0,002
13	9,8	0,23	3,00	0,003
14	9,9	0,22	3,1	0,002
15	10	0,23	2,8	0,003
16	10,1	0,25	2,7	0,002
17	10,2	0,26	2,9	0,001
18	9,3	0,27	3,0	0,002
19	9,2	0,3	3,2	0,001
20	9,1	0,33	3,3	0,002
21	9,0	0,34	3,0	0
22	9,6	0,28	3,1	0,001
23	9,7	0,31	3,4	0,002
24	9,8	0,30	2,9	0,003
25	10	0,25	3,0	0,006

2.1 Приклад побудованих характеристик

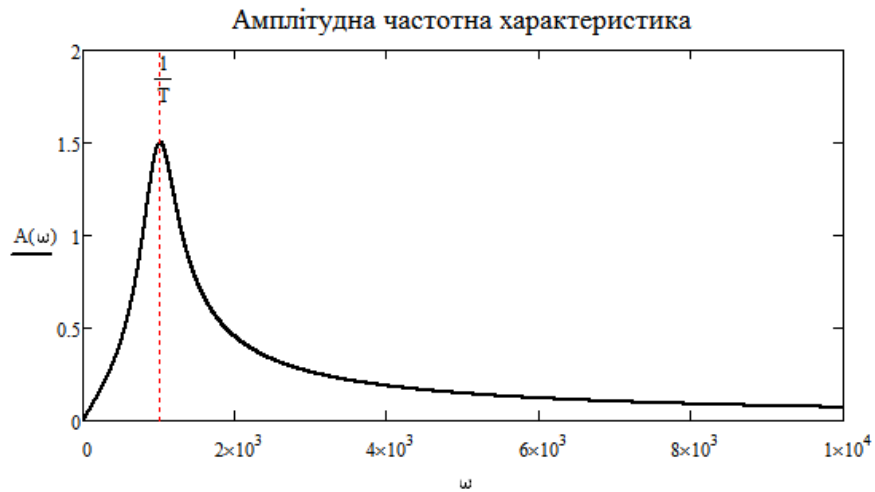
$$\omega := 0..100000$$

$$U(\omega) := \frac{b1 \cdot (a2 - a0 \cdot \omega^2) + a1 \cdot b0 \cdot \omega^2}{(a2 - a0 \cdot \omega^2)^2 + a1^2 \cdot \omega^2}$$

$$V(\omega) := \frac{b0 \cdot \omega \cdot (a2 - a0 \cdot \omega^2) - a1 \cdot b1 \cdot \omega}{(a2 - a0 \cdot \omega^2)^2 + a1^2 \cdot \omega^2}$$

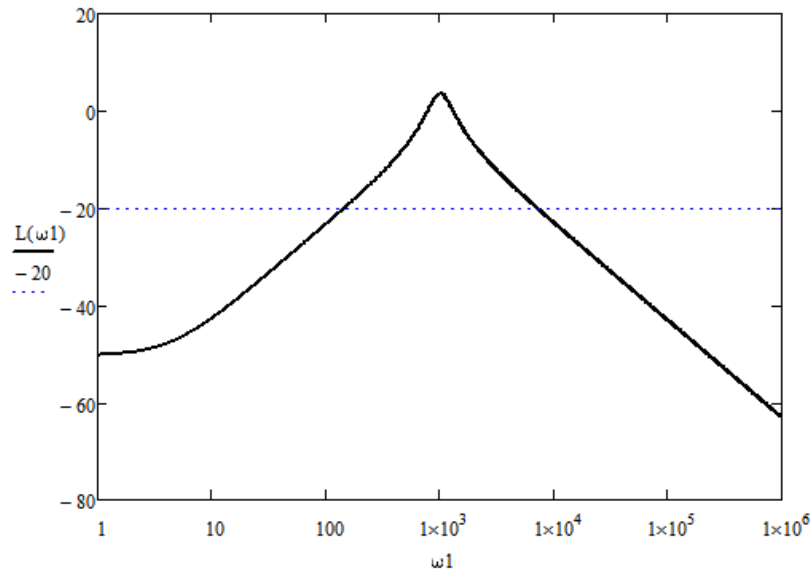


$$A(\omega) := \frac{\sqrt{b1^2 + (b0 \cdot \omega)^2}}{\sqrt{(a2 - a0 \cdot \omega^2)^2 + a1^2 \cdot \omega^2}}$$



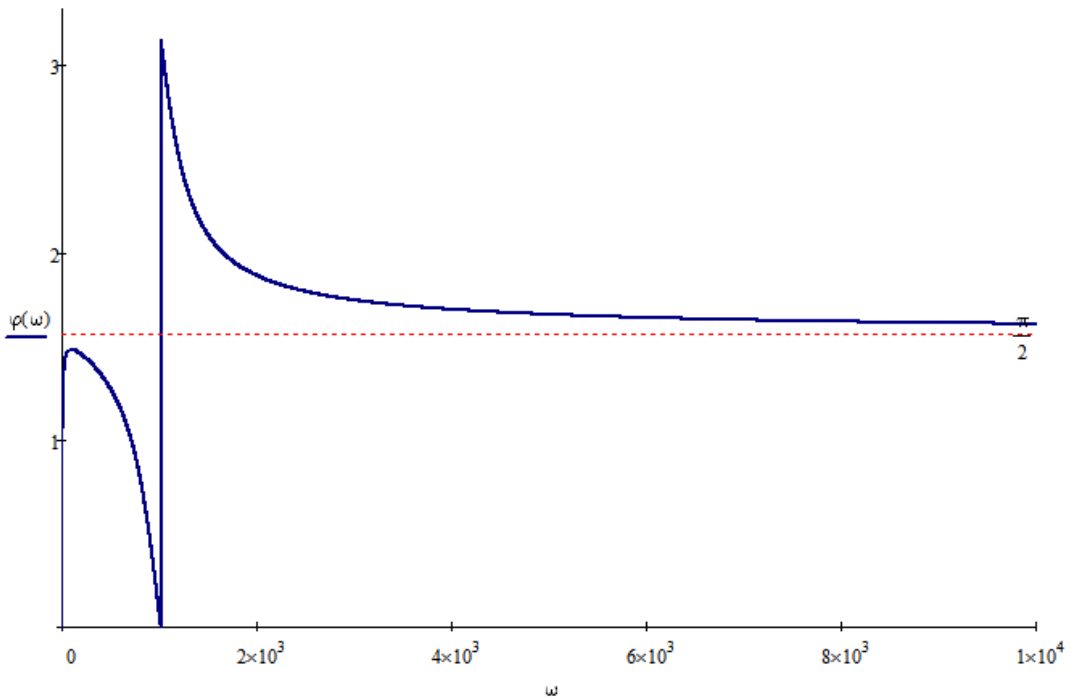
$$L(\omega) := 20 \cdot \log(A(\omega))$$

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика



$$\varphi(\omega) := \operatorname{atan}\left(\frac{b_0 \cdot \omega}{b_1}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{a_1 \cdot \omega}{a_2 - a_0 \cdot \omega^2}\right)$$

Фазова частотна характеристика



3. Робоче завдання

1. Зняти залежності $A=f(\omega)$ і $\varphi=f(\omega)$ досліджуваної системи.
2. Побудувати годографи АФЧХ досліджуваної системи.
3. Побудувати ЛАХ досліджуваної системи.
4. Визначити спряжену частоту ω_c і частоту ω_{zp} досліджуваної системи.
5. Побудувати ЛФХ досліджуваної системи.
6. Порівняти результати теоретичних і експериментальних досліджень.

4. Виконання робочого завдання

1. Досліджувана схема аналогічна до тієї, що використовувалась в л. р. №1 і містить джерело сигналу, передавальну функцію та блок графіків "plot".

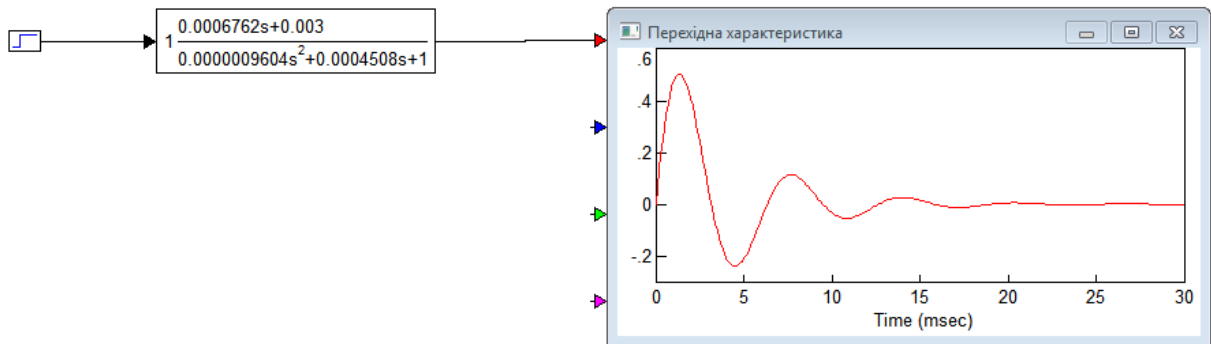


Рисунок 3

2. Для побудови годографа а.ф.х. (годографа Найквіста) необхідно спочатку виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Nyquist Response".

3. Перед побудовою частотних характеристик, потрібно задати початкове, кінцеве значення частоти та крок приросту за допомогою команди "Analyze -> Frequency Range" (рис. 4).

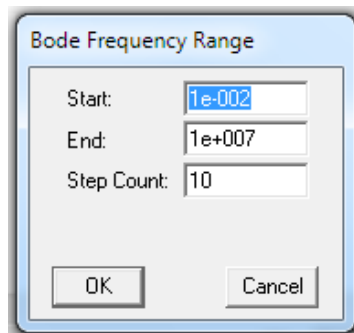


Рисунок 4 – Налаштування частотного аналізу

4. Для побудови логарифмічних амплітудної та фазової частотних характеристик необхідно спочатку виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Frequency Response".

Отримані частотні характеристики зображені на рис. 3:

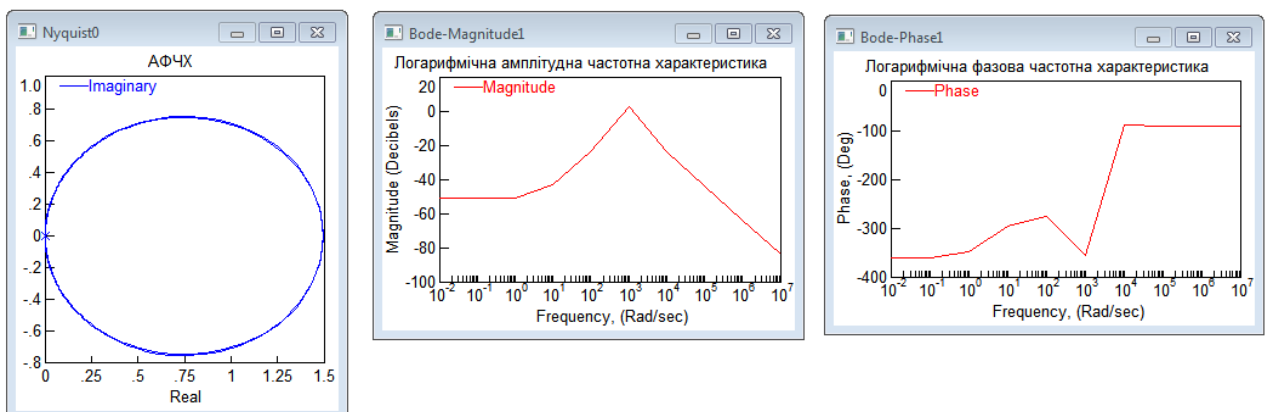


Рисунок 5 – Частотні характеристики

5. Порівняти результати, отримані в результаті моделювання з теоретично одержаними часовими характеристиками.

6. Пояснити одержані результати (висновки).

5. Порядок оформлення звіту

Звіт оформляється відповідно до вимог ЄСКД на білому папері формату А4. На титульному аркуші вказуються назви міністерства, вузу, кафедри, роботи, прізвище студента, прізвище викладача.

Звіт *повинен* містити наступні матеріали:

- 1) тему і мету роботи;
- 2) початкові дані;
- 3) виконане попереднє завдання для обчислень;
- 4) схему змодельованої САК;
- 5) отримані в результаті моделювання частотні характеристики;
- 6) висновки.

6. Контрольні питання і завдання

1. Перелічіть основні частотні характеристики.
2. Дайте визначення амплітудної і фазової частотної характеристик.
3. Викладуть методику побудови амплітудно-фазової частотної характеристики.
4. Запишіть вираз амплітудно-фазової частотної функції.
5. Як одержати логарифмічні частотні характеристики і які їх переваги ?

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСОВИХ І ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АПЕРІОДИЧНОЇ ЛАНКИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Мета роботи: експериментально дослідити часові і частотні характеристики аперіодичної ланки першого порядку.

1. Основні теоретичні відомості

Аперіодичні ланки першого порядку описуються диференціальними рівняннями

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx.$$

Передавальна функція ланки в операційній формі має вигляд

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp},$$

в формі перетворення Лапласа

$$W(s) = \frac{k}{1 + Ts}.$$

Приклади аперіодичних ланок першого порядку:

- 1) двигуни будь-якого типу (електричні, гідравлічні, пневматичні та ін.) механічні характеристики яких представлені паралельними прямими. Вхідною величиною x є керуюча дія в двигуні, витрата рідини в гідравлічному двигуні і т.п. Вихідною величиною y є швидкість обертів двигуна;
- 2) електричний генератор постійного струму, вхідною величиною якого є напруга обмотки збудження $U_{зб}$, а вихідною напруга якоря;
- 3) резервуар з газом, у якого вхідною величиною є тиск P_1 перед впускним отвором, а вихідною – тиск P_2 в резервуарі;
- 4) нагрівна піч, у якій вхідною величиною є кількість тепла, що поступає в одиницю часу в піч, а вихідною – температура в печі;
- 5) електричні RC- і LR- кола.

Часові функції і часові характеристики аперіодичної ланки першого порядку.

Перехідна функція ланки має вигляд

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \tag{1}$$

Перехідна характеристика зображена на рис.1

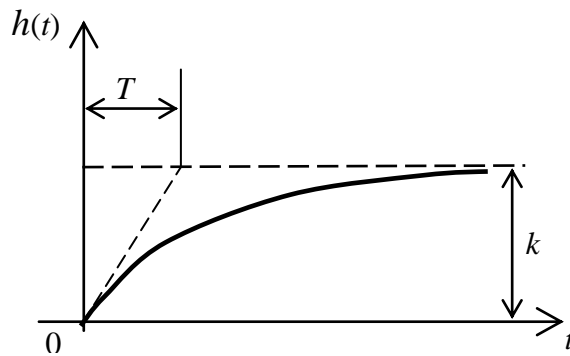


Рисунок 1.

Чим більше значення постійної часу T , тим довше триває перехідний процес. Практично тривалість перехідного процесу $t_{II}=3T$. Постійна часу характеризує інерційність аперіодичної ланки і є мірою інерційності цієї ланки.

Імпульсна перехідна функція $\omega(t)$ (функція ваги) представляється у вигляді

$$\omega(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (2)$$

Імпульсна перехідна характеристика ланки показана на рис.2

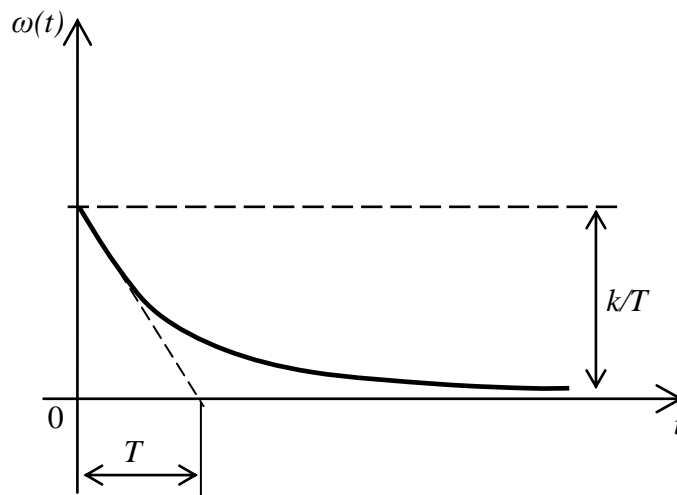


Рисунок 2.

Частотні характеристики аперіодичної ланки першого порядку.

Амплітудно-фазова частотна функція (частотна передавальна функція) представлена в алгебраїчній формі має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (3)$$

де $\frac{k}{1 + \omega^2 T^2} = U(\omega)$ – дійсна частотна функція, $-\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$ – уявна частотна функція.

Відповідно цій функції амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ) зображена на рис.3

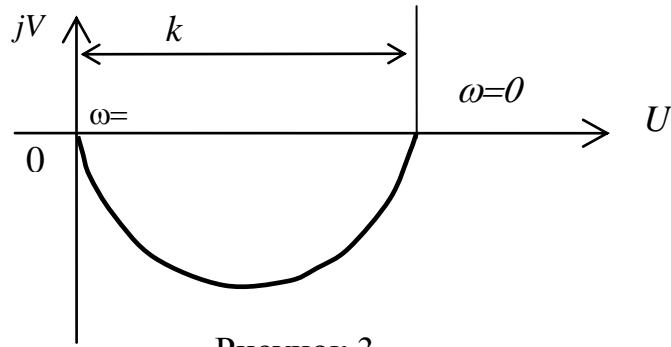


Рисунок 3.

Амплітудно-фазова частотна функція записана в показниковій формі має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega T} \quad (4)$$

З (4) видно, що амплітудна частотна функція

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

а фазова частотна функція

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T.$$

Відповідні їм амплітудна частотна характеристика і фазова частотна характеристика представлені на рис.4.

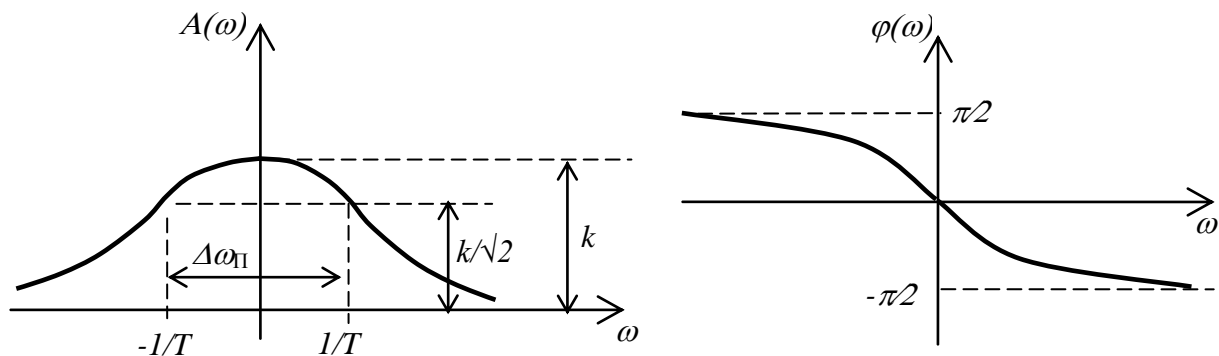


Рисунок 4.

З амплітудної частотної характеристики видно, що при малих частотах ($\omega < \frac{1}{T}$) відношення амплітуд близьке до коефіцієнта передачі k . Коливання для частот $\omega > \frac{1}{T}$ ослаблюються. Чим менше T тим менша інерційність ланки і тим ширша полоса пропускання $\Delta\omega_{\Pi}$ ланки:

$$\Delta\omega_{\Pi} = \frac{1}{T} - \left(-\frac{1}{T}\right) = \frac{2}{T}.$$

Логарифмічна частотна функція для даної ланки має вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

На рис.4 показана асимптотична логарифмічна частотна характеристика (ЛАХ) (суцільна лінія) і точна ЛАХ (пунктирна лінія), де $\omega_{cn} = \frac{1}{T}$ – спряжена частота, а $\omega_{зр}$ - частота зрізу, при якій $A(\omega)=1$.

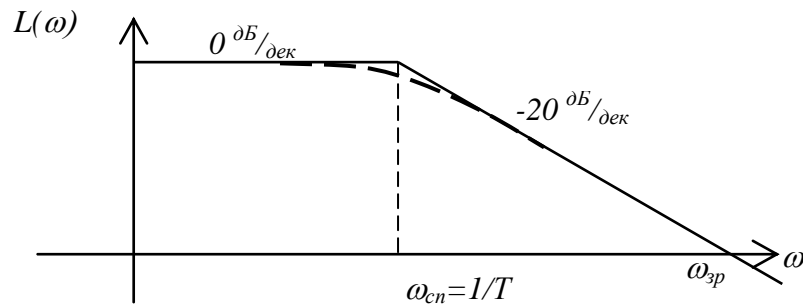


Рисунок 5.

2. Попередні завдання для обчислення

1. Записати передавальну функцію ланки, яка описується диференціальним рівнянням

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_0 x,$$

де $a_0 = T$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$.

Числові значення параметрів задані в таблиці 1.

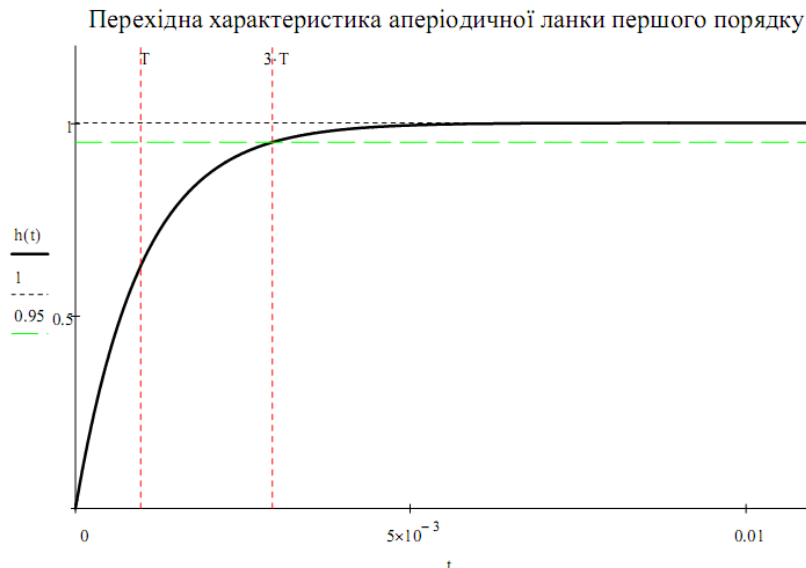
2. Записати вираз для перехідної функції ланки $h(t)$.
3. Записати вираз для імпульсної перехідної функції $\omega(t)$ ланки.
4. Записати формули для розрахунку амплітудно-фазової частотної функції $W(j\omega)$, амплітудної частотної функції $A(\omega)$, фазової частотної функції $\varphi(\omega)$, дійсної $U(\omega)$ і уявної $V(\omega)$ частотних функцій.
5. Побудувати годографи АФЧХ і АЧХ досліджуваної ланки згідно варіанту.
6. Побудувати асимптотичні ЛАХ коливної ланки.
7. Визначити спряжену частоту ω_{cn} і частоту зрізу $\omega_{зр}$ по ЛАХ ланки.

Таблиця 1

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T \cdot 10^{-4} \text{ 1/c}$	9,4	9,3	9,2	9,1	9,0	8,9	8,8	8,7	8,6	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$T \cdot 10^{-4} \text{ 1/c}$	10,1	10,2	9,3	9,2	9,1	9,0	9,6	9,7	9,8	10

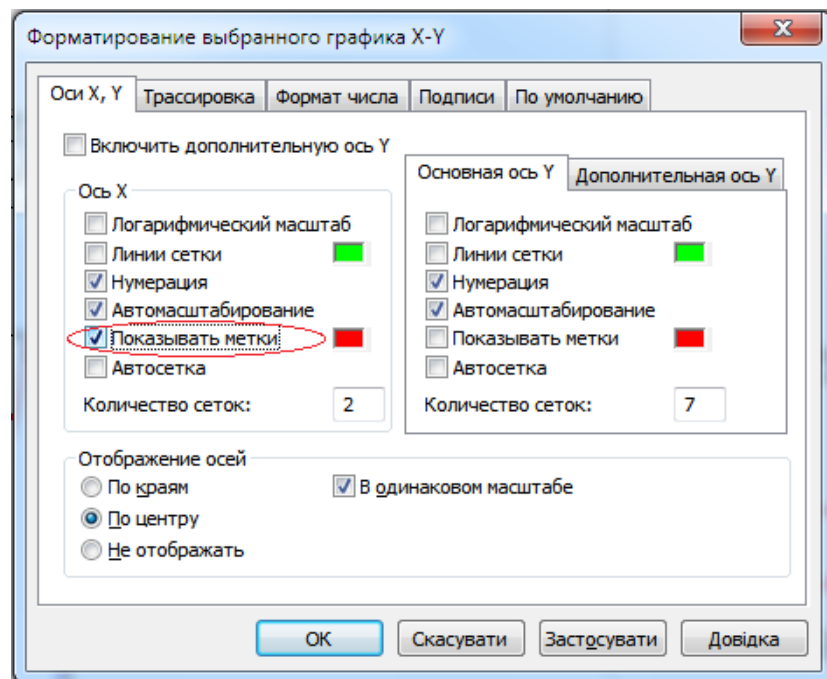
2.1 Приклад виконання попередніх завдань для обчислень



Наведено лише вигляд досліджуваних характеристик. Усі необхідні формули функцій для їх побудови приведені в теоретичних відомостях.

Примітка. Маркери на відповідних осях (пунктирні горизонталі чи вертикалі на графіку) створюються наступним чином:

- викликається вікно форматування графіка (подвійний клік ЛКМ в полі графіка) та ставиться галочка **Show Markers** (Показувати метки) по осі X та (чи)Y;



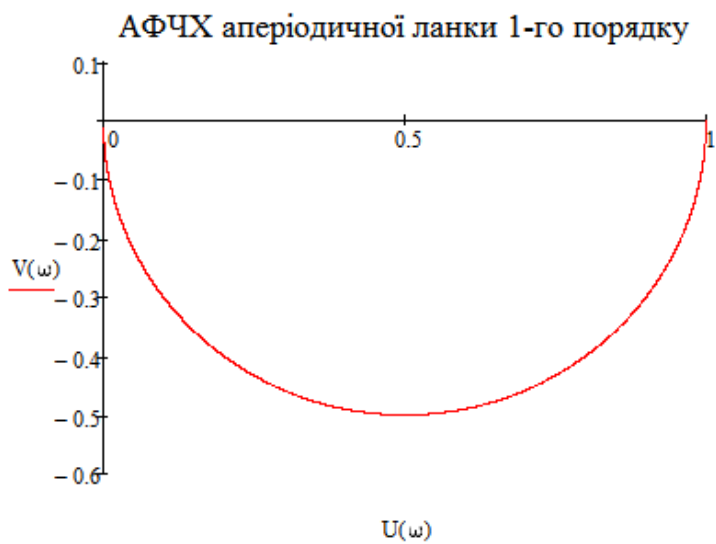
- біля обраної осі (осей) з'являться 2 чорних прямокутники, в які можна ввести або числа, або ім'я константи. Ім'я писати зручніше, тому що при зміні значення константи, автоматично пересувається і маркер.



$$U(\omega) := \frac{b_0}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$$

$$V(\omega) := \frac{-b_0 \cdot \omega \cdot T}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$$

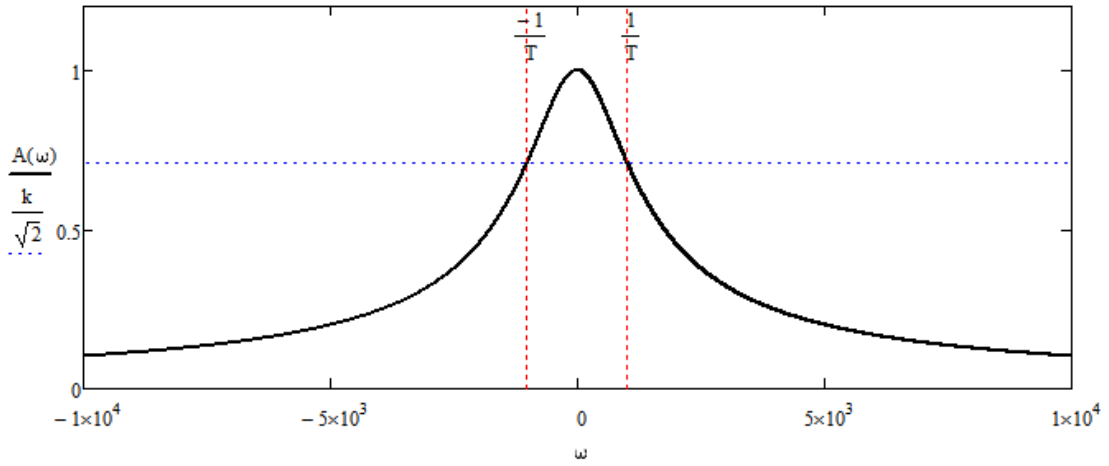
$$\omega := 0..100000$$



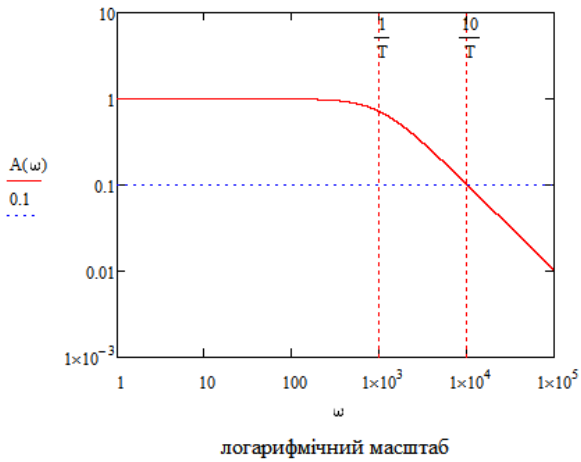
Примітка. Для коректного розрахунку АФЧХ, необхідно задати частоту у форматі дискретної змінної – $\omega := 0..100000$.

Для отримання симетричної АЧХ – $\omega := -100000..100000$.

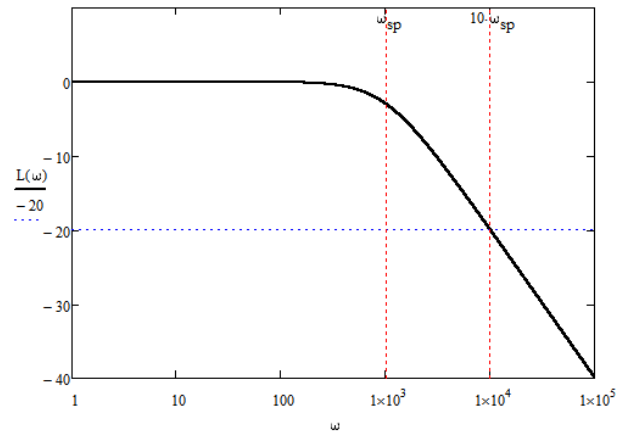
Амплітудна частотна характеристика аперіодичної ланки першого порядку



АЧХ аперіодичної ланки 1-го порядку

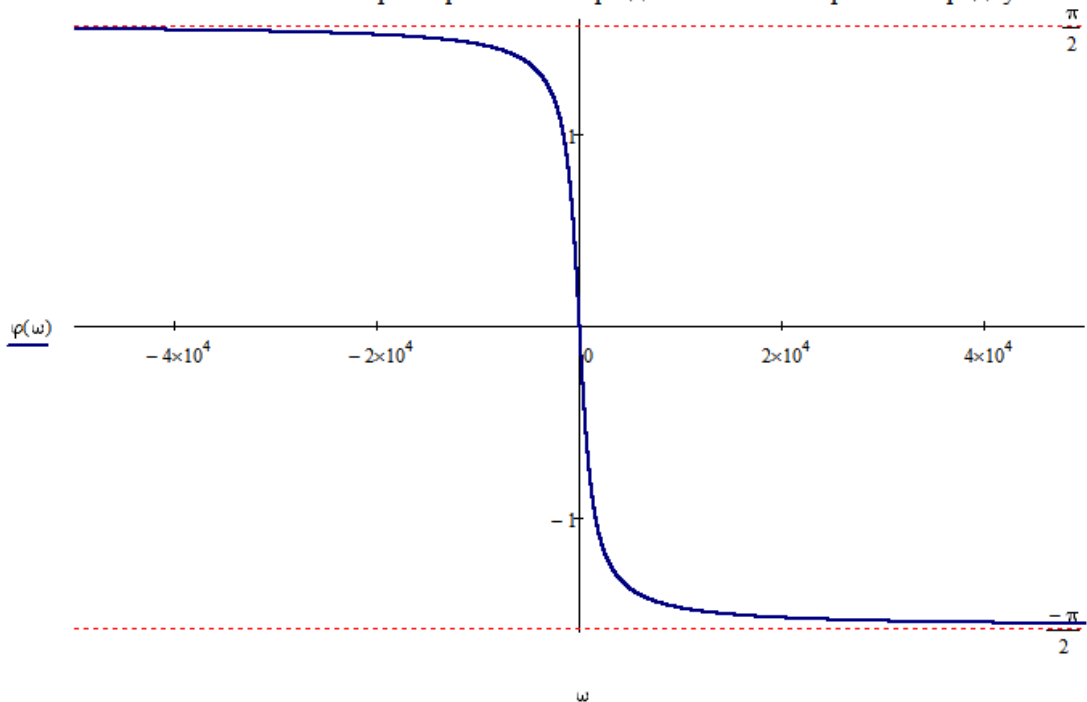


ЛАХ аперіодичної ланки 1-го порядку



Примітка. Логарифмічну амплітудну характеристику можна побудувати (на вибір) або змінивши масштаб АЧХ на логарифмічний (рисунок зліва), або за відповідною формулою (рисунок справа).

Фазова частотна характеристика аперіодичної ланки першого порядку



3. Робоче завдання

- I. Дослідження часових характеристик ланки.
 1. Зняти осцилограму перехідної функції ланки.
 2. Зняти осцилограми імпульсної перехідної функції ланки.
 3. Порівняти результати експериментальних і теоретичних досліджень.

- II. Дослідження частотних характеристик
 1. Зняти залежності $A=f(\omega)$ і $\varphi=f(\omega)$ досліджуваної ланки.
 2. Побудувати годографи АФЧХ досліджуваної ланки.
 3. Побудувати ЛАХ досліджуваної ланки.
 4. Визначити спряжену частоту ω_c і частоту $\omega_{зр}$ досліджуваної ланки.
 5. Порівняти результати теоретичних і експериментальних досліджень.

4. Виконання робочого завдання

1. Скласти схему для дослідження перехідної характеристики. Отримати перехідні характеристики для значень сталої часу: 1) значення сталої часу розрахованого в попередньому завданні для обчислень T_0 ; 2) $T > T_0$; 3) $T < T_0$. Зробити висновок про вплив сталої часу на тривалість перехідного процесу.

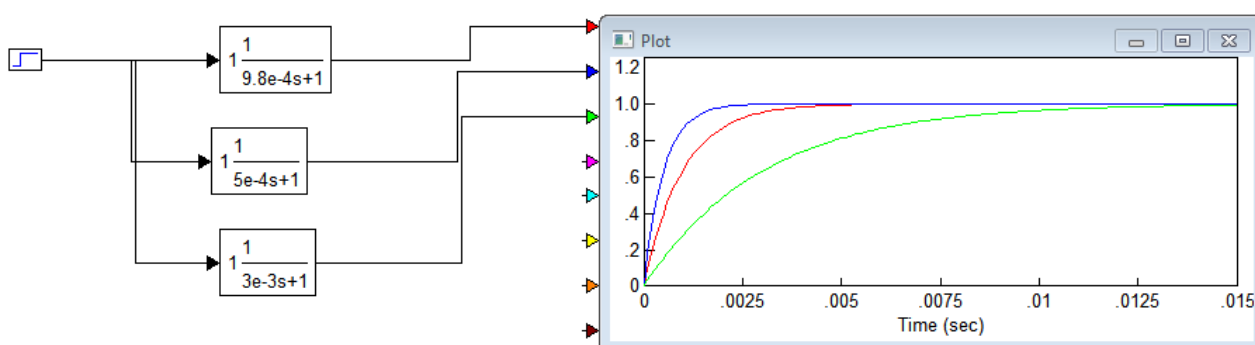


Рисунок 6 – Побудова перехідних характеристик

2. Аналогічно скласти схему для дослідження імпульсної перехідної характеристики. Отримати характеристики для 1) $T = T_0$; 2) $T > T_0$; 3) $T < T_0$.

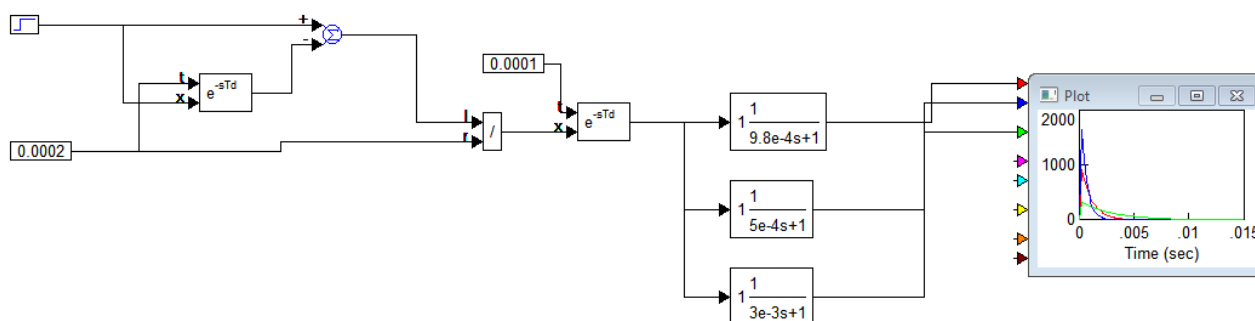


Рисунок 7 – Побудова імпульсної перехідної характеристики

Для більшої наочності розгорнути блок графіків на весь екран та відобразити координатну сітку (Plot Properties, встановити прапорець Grid Lines).

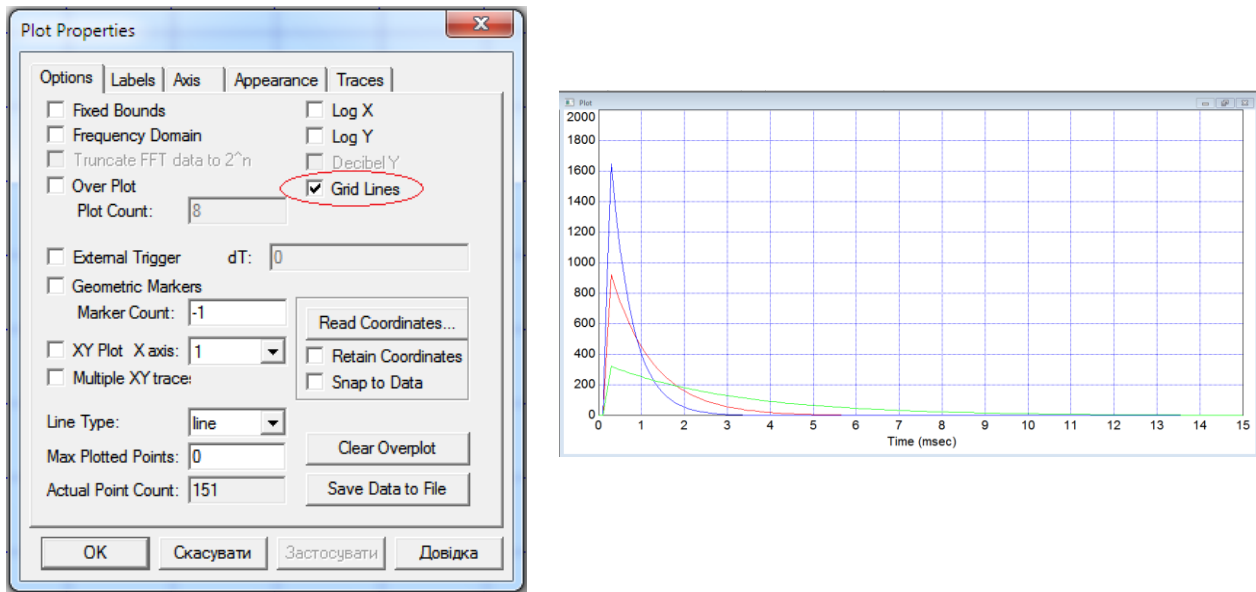


Рисунок 8 – Властивості блоку графіків

3. Побудувати годограф АФЧХ (годограф Найквіста). Для цього необхідно спочатку виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Nyquist Response".

4. Побудувати логарифмічні амплітудні та фазові частотні характеристики для різних значень сталої часу (виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Frequency Response"). Відобразити на графіках координатну сітку, вказати значення сталої часу. Подати отримані графіки в звіт. Зробити висновок про вплив сталої часу на величину смуги пропускання та частоти зрізу.

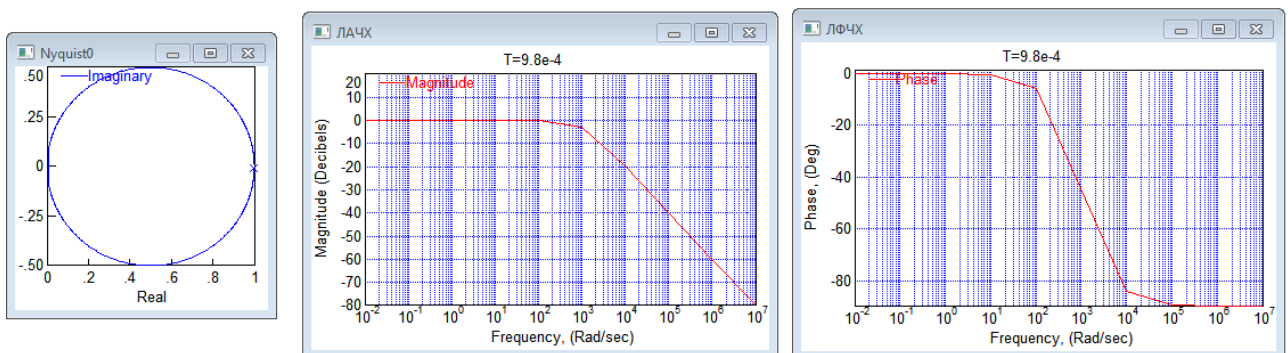


Рисунок 9 – Частотні характеристики

5. Порівняти результати, отримані в результаті моделювання з теоретично одержаними часовими та частотними характеристиками.

6. Пояснити одержані результати (висновки).

5. Порядок оформлення звіту

Звіт оформляється відповідно до вимог ЄСКД на білому папері формату А4. На титульному аркуші вказуються назви міністерства, вузу, кафедри, роботи, прізвище студента, прізвище викладача.

Звіт *повинен* містити наступні матеріали:

- 1) тему і мету роботи;
- 2) початкові дані;
- 3) виконане попереднє завдання для обчислень;
- 4) схему змодельованої САК;
- 5) отримані в результаті моделювання часові та частотні характеристики;
- 6) висновки.

6. Контрольні питання і завдання

1. Запишіть рівняння і передавальні функції аперіодичної ланки першого порядку.
2. Перелічіть динамічні характеристики аперіодичної ланки першого порядку і запишіть їх рівняння.
3. Перелічіть частотні характеристики аперіодичної ланки першого порядку і запишіть частотні функції.
4. Наведіть приклади аперіодичних ланок першого порядку.

Лабораторна робота №4

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСОВИХ І ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АПЕРІОДИЧНОЇ ЛАНКИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Мета роботи: експериментально дослідити часові і частотні характеристики аперіодичної ланки другого порядку, порівняти експериментально одержані характеристики з теоретичними.

1. Основні теоретичні відомості

Аперіодична ланка другого порядку описується диференціальними рівняннями виду

$$T_0^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx, \quad (1)$$

В операторній формі рівняння має вигляд

$$(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1)y = kx, \quad (2)$$

При цьому корені характеристичного рівняння $T_0^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$ повинні бути дійсними, що виконується при умові $T_1 \geq 2T_0$.

Ліву частину рівняння можна представити в вигляді

$$(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)y = kx,$$

де
$$T_{2,3} = -\frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_0^2}.$$

Передавальна функція ланки в операторній формі має вигляд

$$W(p) = \frac{k}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}$$

в формі перетворення Лапласа

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}.$$

Аперіодична ланка еквівалентна двом аперіодичним ланкам першого порядку, які з'єднані послідовно одна з одною, з спільним коефіцієнтом передачі k і постійними часу T_3 і T_4 . Аперіодичною ланкою другого порядку є також керовані двигуни постійного струму, в випадку коли $4T_{Я} \leq T_M$, де $T_{Я}$ – електромагнітна постійна часу кола якоря, T_M – електромеханічна постійна часу двигуна.

Часові функції і часові характеристики аперіодичної ланки другого порядку.

Перехідна функція ланки має вигляд

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_2}{T_2 - T_3} e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{T_3}{T_2 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3}} \right).$$

Перехідна характеристика зображена на рис.1

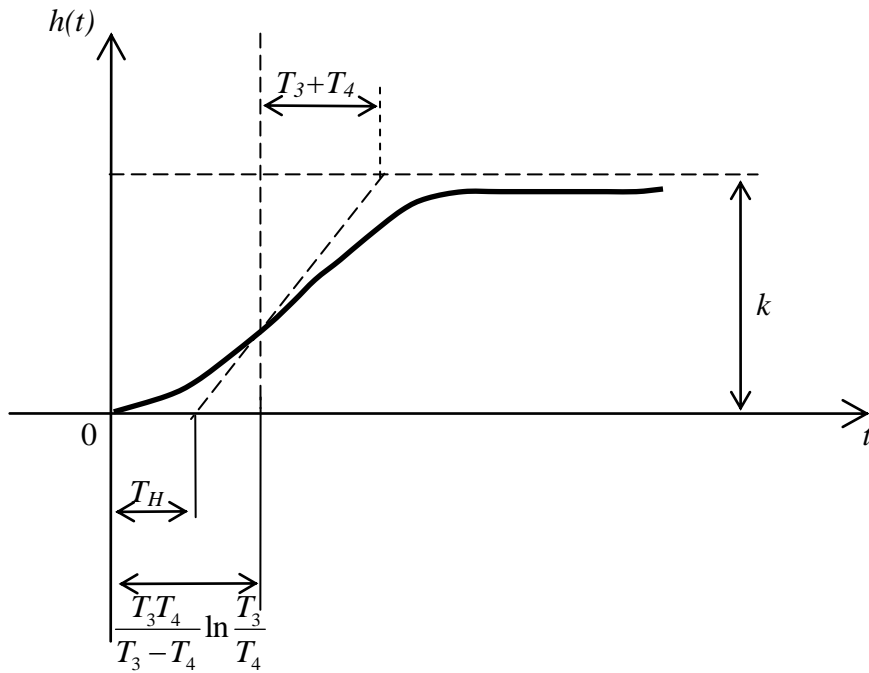


Рисунок 1.

Імпульсна перехідна функція $w(t)$ (функція ваги) записується у вигляді

$$w(t) = \frac{k}{T_2 - T_3} \left(e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_3}} \right)$$

Імпульсна перехідна характеристика показана на рис.2

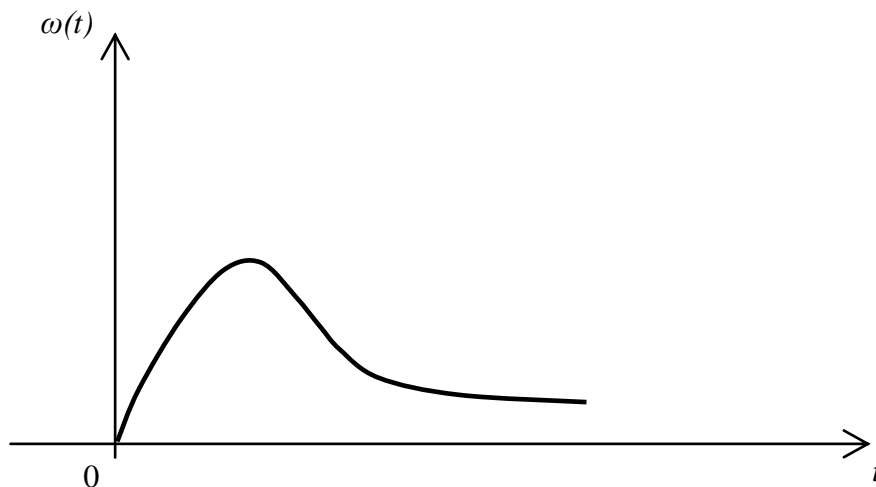


Рисунок 2.

Частотні характеристики аперіодичної ланки другого порядку

Амплітудно-фазова частотна функція (частотна передавальна функція) має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2}} e^{-j(\arctg \omega T_2 + \arctg \omega T_3)} \quad (3)$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика аперіодичної ланки другого порядку зображена на рис.3

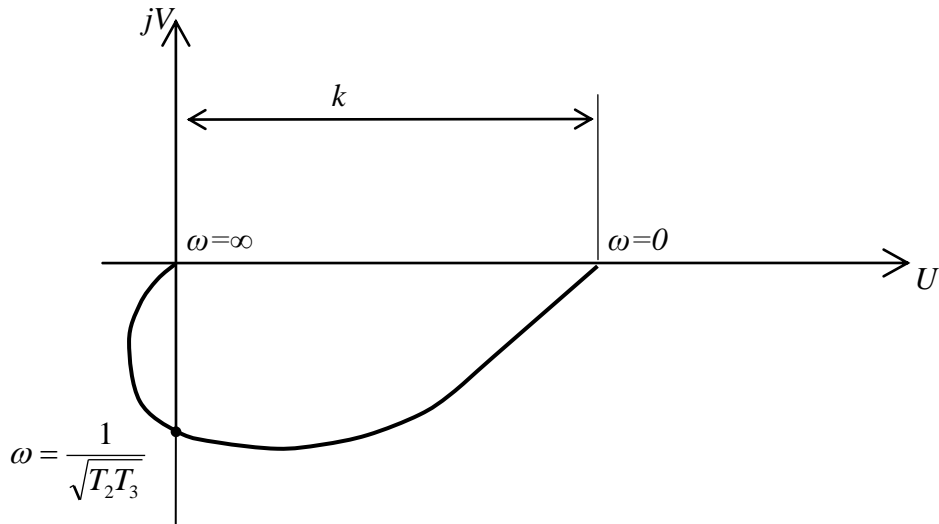


Рисунок 3.

З (3) видно, що амплітудна частотна функція

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2}},$$

а фазова частотна функція $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3$

Відповідні їм амплітудна частотна характеристика і фазова частотна характеристика представлені на рис.4

Логарифмічна частотна функція для даної ланки має вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2}} \quad (4)$$

Побудову асимптотичної логарифмічної частотної характеристики (ЛАХ) проводять, використовуючи вираз (4). Спочатку проводять допоміжні вертикальні лінії через спряжені частоти $\omega_{СП1} = \frac{1}{T_2}$ і $\omega_{СП2} = \frac{1}{T_3}$. Для визначеності побудови приймаємо, що $T_2 > T_3$.

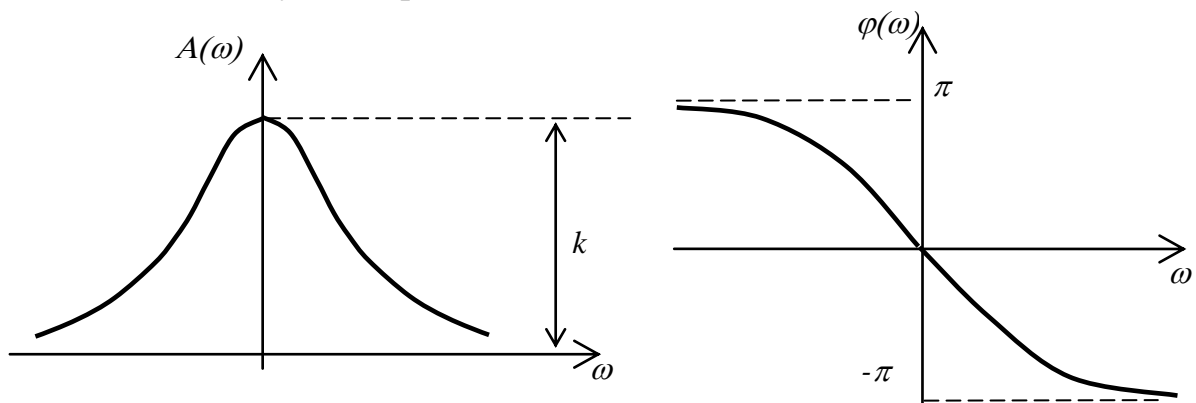


Рисунок 4

Лівише першої спряженої частоти ($\omega_{СП1} < \frac{1}{T_2}$) вираз (4) замінюють приближенням $L(\omega) \approx 20 \lg k$, якому відповідає пряма з нульовим нахилом

(перша асимптота ЛАХ). Для частот $\frac{1}{T_2} < \omega < \frac{1}{T_3}$ вираз (4) замінюють

приближенням $L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega T_2}$,

якому відповідає пряма з від'ємним нахилом 20 дб/дек (друга асимптота). Для

частот $\omega > \frac{1}{T_3}$ вираз (4) замінюють приближенням

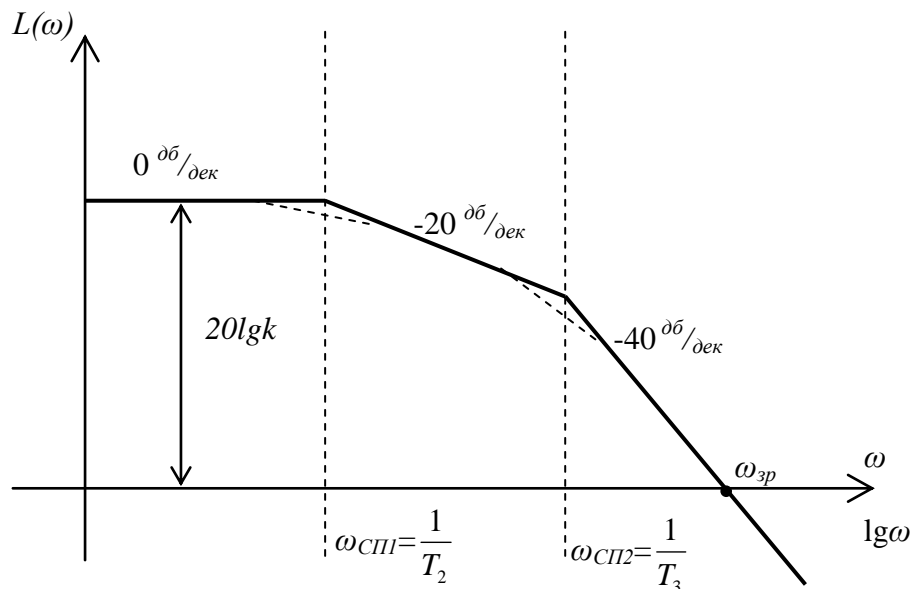


Рисунок 5

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega^2 T_2 T_3},$$

якому відповідає пряма з від'ємним нахилом 40 дб/дек (третья асимптота) рис.5.

Дійсна ЛАХ показана на рис.5 пунктиром. Вона відрізняється від асимптотичної в точках злому на 3 дб.

2. Попередні завдання для обчислення

1. Записати передавальну функцію аперіодичної ланки другого порядку, яка описується диференціальним рівнянням

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 x$$

де $a_0 = T^2$, $a_1 = 2 \cdot \zeta \cdot T$, $\zeta = 1.5$, $a_2 = 1$, $b_0 = k$.

Числові значення параметрів задані в таблиці 1.

2. Записати вираз для перехідної функції ланки $h(t)$.

3. Записати вираз для імпульсної перехідної функції $\omega(t)$ аперіодичної ланки другого порядку.

4. Записати формули для розрахунку амплітудно-фазової частотної функції $W(j\omega)$, амплітудної частотної функції $A(\omega)$, фазової частотної функції $\varphi(\omega)$, дійсної $U(\omega)$ і уявної $V(\omega)$ частотних функцій.

5. Побудувати годографи АФЧХ і АЧХ досліджуваної ланки.

6. Побудувати асимптотичні ЛАХ аперіодичної ланки другого порядку.

7. Визначити спряжену частоту ω_{cn} і частоту зрізу ω_{zp} по ЛАХ ланки.

Таблиця 1

Варіант	$T \cdot 10^{-4} \text{ 1/c}$	k
1	9,4	2,8
2	9,3	2,9
3	9,2	2,95
4	9,1	3,0
5	9,0	3,1
6	8,9	3,2
7	8,8	3,3
8	8,7	3,4
9	8,6	3,5
10	9,5	2,83
11	9,6	2,89
12	9,7	2,93
13	9,8	3,00
14	9,9	3,1
15	10	2,8
16	10,1	2,7
17	10,2	2,9
18	9,3	3,0
19	9,2	3,2
20	9,1	3,3
21	9,0	3,0
22	9,6	3,1
23	9,7	3,4
24	9,8	2,9
25	10	3,0

2.1 Приклад виконання попередніх завдань для обчислень

$$T := 9.8 \cdot 10^{-4} \quad \zeta := 1.5 \quad k := 3$$

$$a_0 := T^2 = 9.604 \times 10^{-7} \quad a_1 := 2 \cdot \zeta \cdot T = 2.94 \times 10^{-3} \quad a_2 := 1 \quad b_0 := k \quad A_1 := 2 \cdot T = 1.96 \times 10^{-3}$$

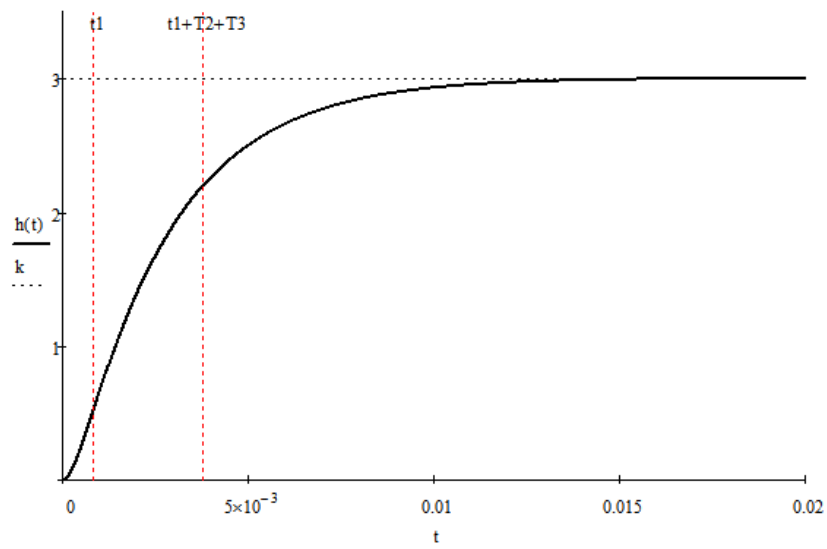
$$\text{Given} \quad a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2 = 0 \quad \text{Find}(x) \rightarrow (-2.671 \times 10^3 \quad -389.761)$$

$$T_2 := \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \quad T_3 := \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

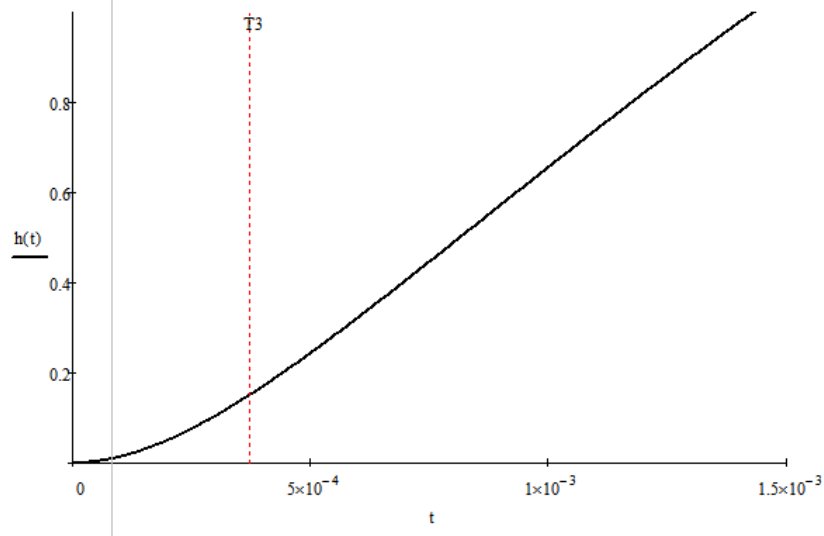
$$T_2 = 2.566 \times 10^{-3} \quad T_3 = 3.743 \times 10^{-4} \quad \frac{-1}{T_2} = -2.671 \times 10^3 \quad \frac{-1}{T_3} = -389.761$$

$$h(t) := k \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_2 - T_3} \cdot e^{\frac{-t}{T_2}} + \frac{T_3}{T_2 - T_3} \cdot e^{\frac{-t}{T_3}} \right) \quad t_1 := \frac{(T_2 \cdot T_3)}{T_2 - T_3} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_3}\right) = 8.436 \times 10^{-4}$$

Перехідна характеристика аперіодичної ланки другого порядку



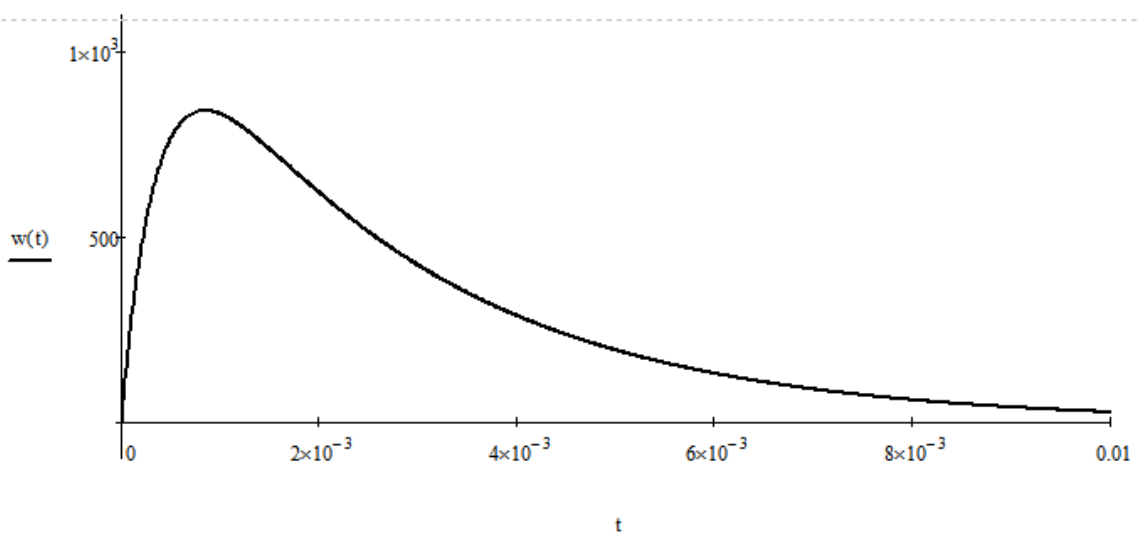
Перехідна характеристика аперіодичної ланки другого порядку



$$w(t) := \frac{d}{dt} h(t) \rightarrow -1.369 \times 10^3 \cdot e^{-2.671 \times 10^3 \cdot t} + 1.369 \times 10^3 \cdot e^{-389.761 \cdot t}$$

$$w(t) := \frac{k}{T_2 - T_3} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_3}} \right)$$

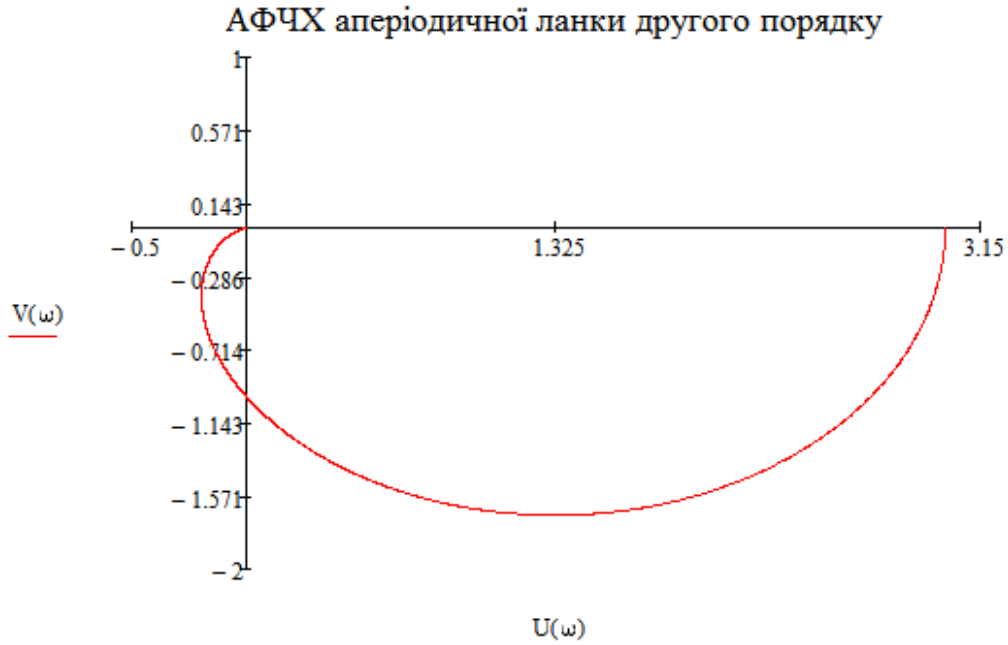
Імпульсна перехідна характеристика аперіодичної ланки другого порядку



$\omega := 0..100000$

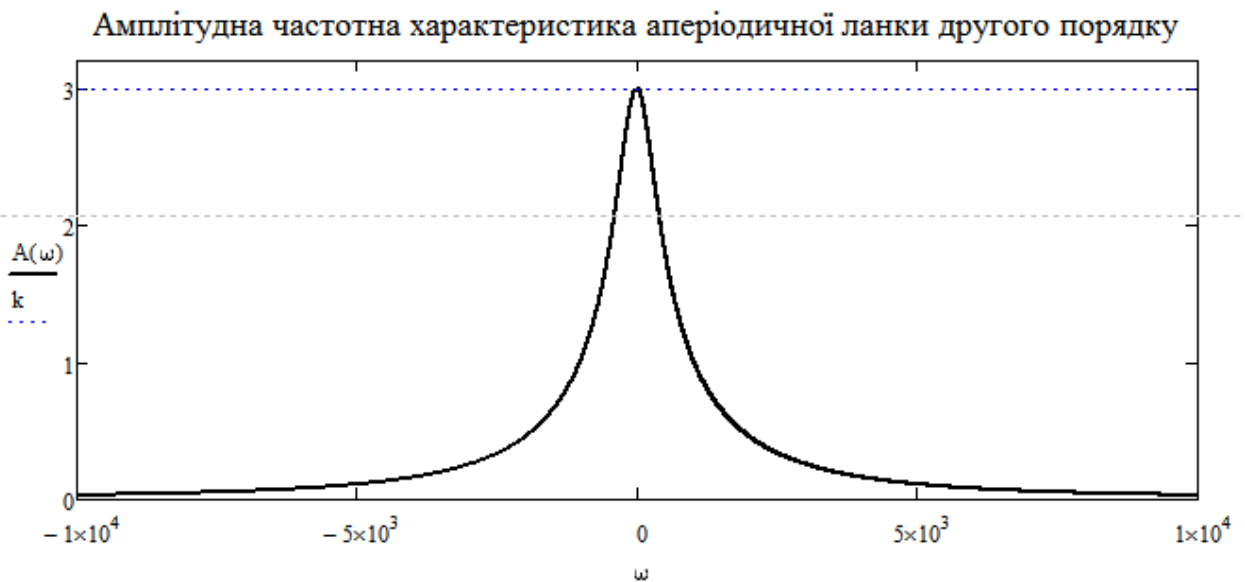
$$U(\omega) := \frac{k \cdot (1 - \omega^2 T_2 T_3)}{1 + \omega^2 \cdot (T_2^2 + T_3^2) + \omega^4 \cdot T_2^2 \cdot T_3^2}$$

$$V(\omega) := \frac{-k \cdot \omega \cdot (T_2 + T_3)}{1 + \omega^2 \cdot (T_2^2 + T_3^2) + \omega^4 \cdot T_2^2 \cdot T_3^2}$$



$\omega := -100000..100000$

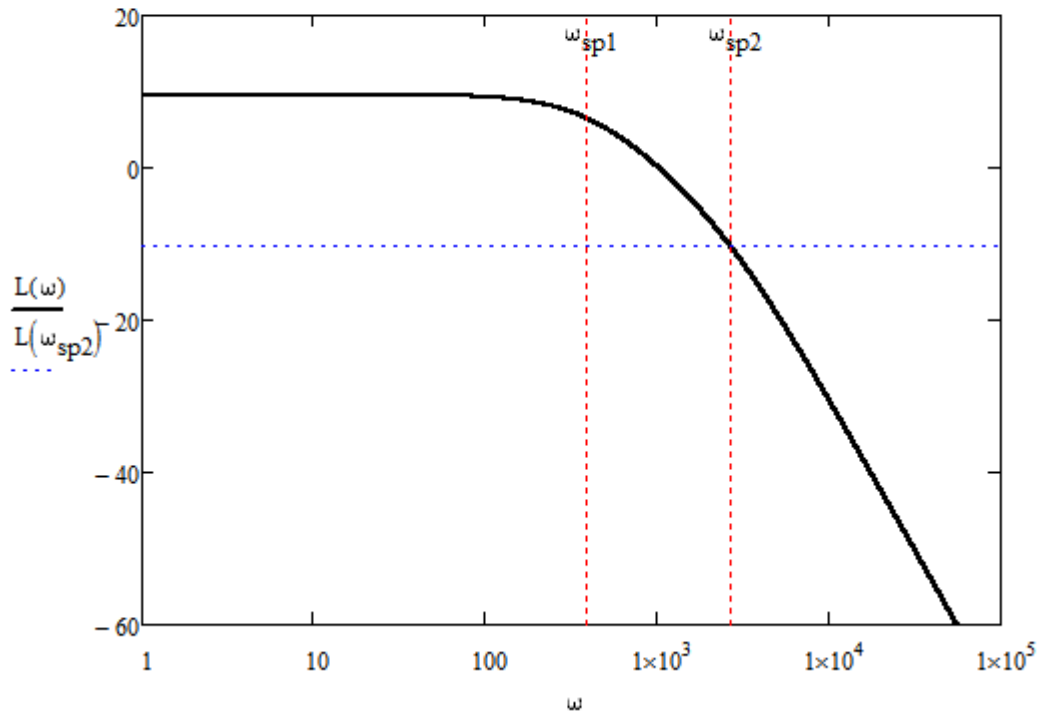
$$A(\omega) := \frac{b_0}{\sqrt{1 + T_2^2 \cdot \omega^2} \cdot \sqrt{1 + T_3^2 \cdot \omega^2}}$$



$$L(\omega) := 20 \cdot \log(A(\omega)) \quad \omega_{sp1} := \frac{1}{T2} = 389.761 \quad \omega_{sp2} := \frac{1}{T3} = 2.671 \times 10^3$$

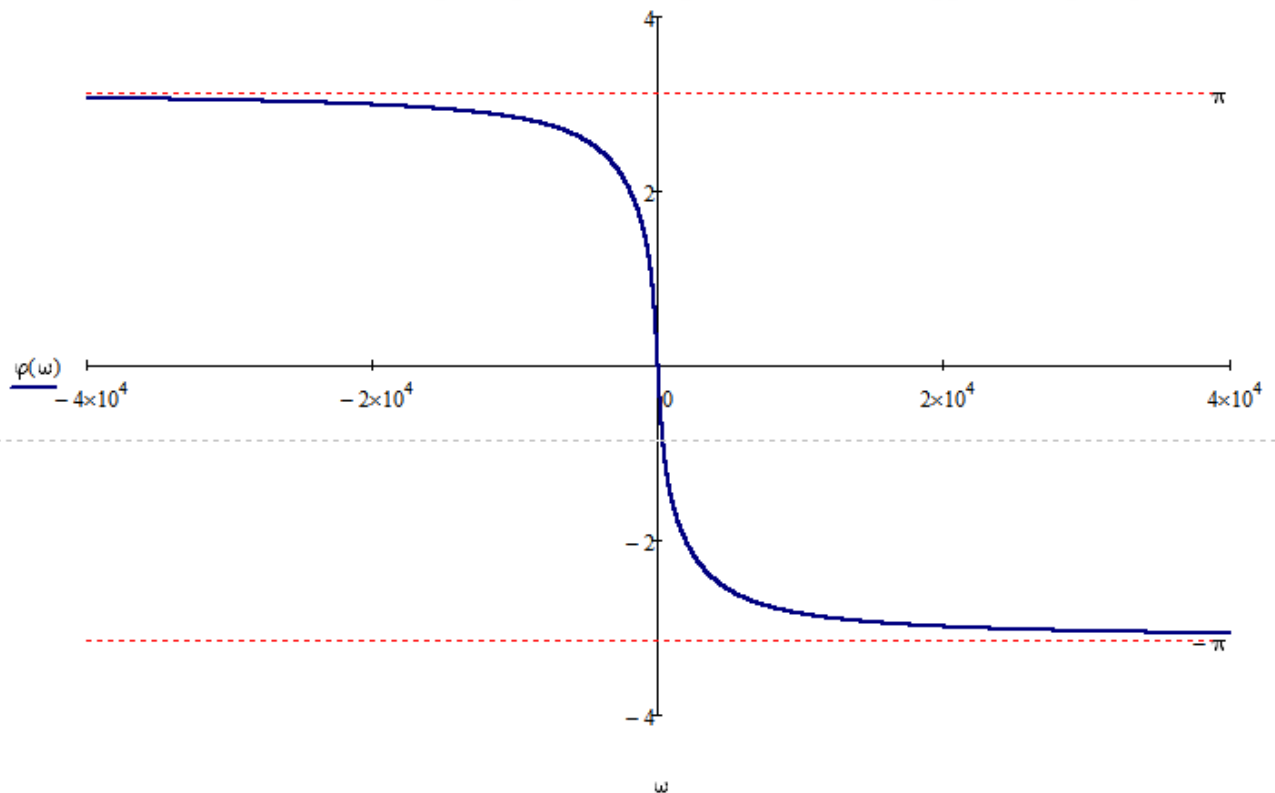
$$L(\omega_{sp1}) = 6.441 \quad L(\omega_{sp2}) = -10.278$$

ЛАХ аперіодичної ланки другого порядку



$$\varphi(\omega) := -\text{atan}(\omega \cdot T2) - \text{atan}(\omega \cdot T3)$$

Фазова частотна характеристика аперіодичної ланки другого порядку



3. Робоче завдання.

- I. Дослідження часових характеристик ланки.
 1. Зняти осцилограму перехідної функції ланки.
 2. Зняти осцилограми імпульсної перехідної функції ланки.
 3. Порівняти результати експериментальних і теоретичних досліджень.
- II. Дослідження частотних характеристик
 1. Зняти залежності $A=f(\omega)$ і $\varphi=f(\omega)$ досліджуваної ланки.
 2. Побудувати годографи АФЧХ досліджуваної ланки.
 3. Побудувати ЛАХ досліджуваної ланки.
 4. Визначити спряжену частоту ω_s і частоту $\omega_{зр}$ досліджуваної ланки.
 5. Порівняти результати теоретичних і експериментальних досліджень.

4. Виконання робочого завдання

1. Отримати перехідну характеристику аперіодичної ланки другого порядку засобами VisSim.

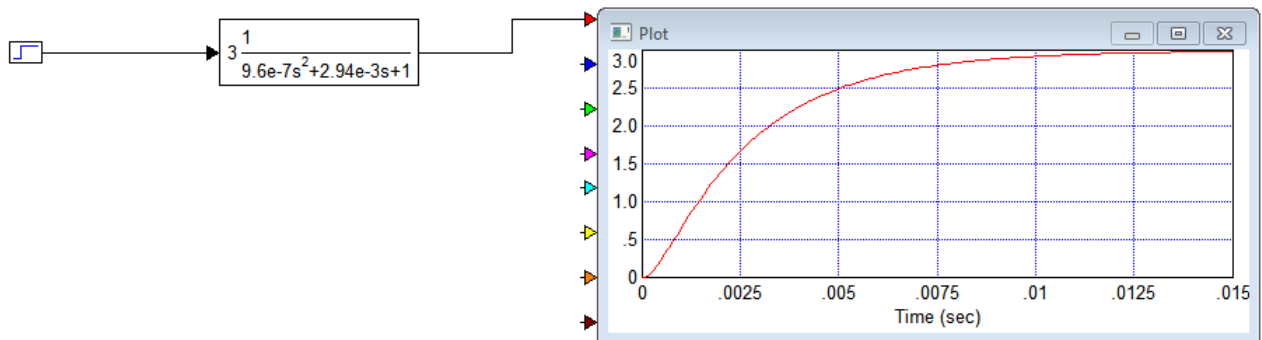


Рисунок 6 – Побудова перехідної характеристики

2. Отримати імпульсну перехідну характеристику аперіодичної ланки другого порядку засобами VisSim.

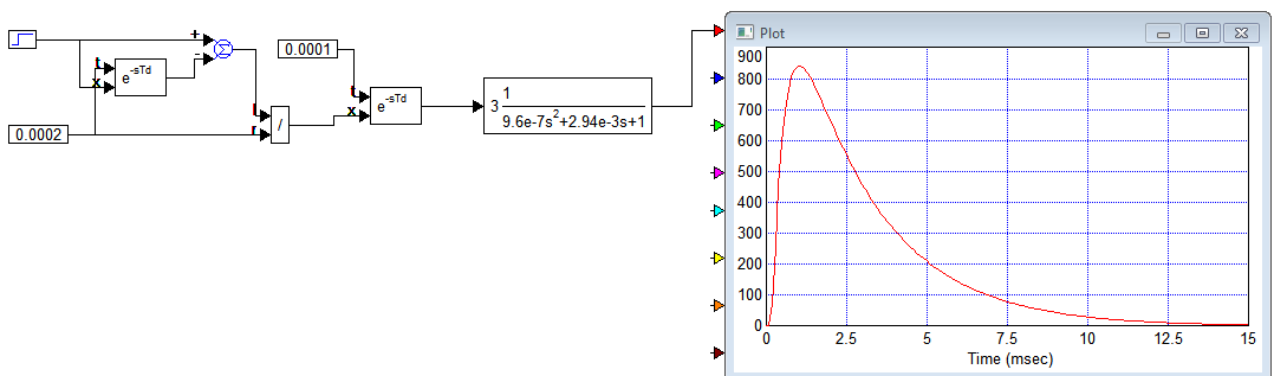


Рисунок 7 – Побудова імпульсної перехідної характеристики

3. Побудувати годограф АФЧХ (годограф Найквіста). Для цього необхідно спочатку виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Nyquist Response".

4. Побудувати логарифмічні амплітудні та фазові частотні характеристики (виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Frequency Response"). Відобразити на графіках координатну сітку. Подати отримані графіки в звіт.

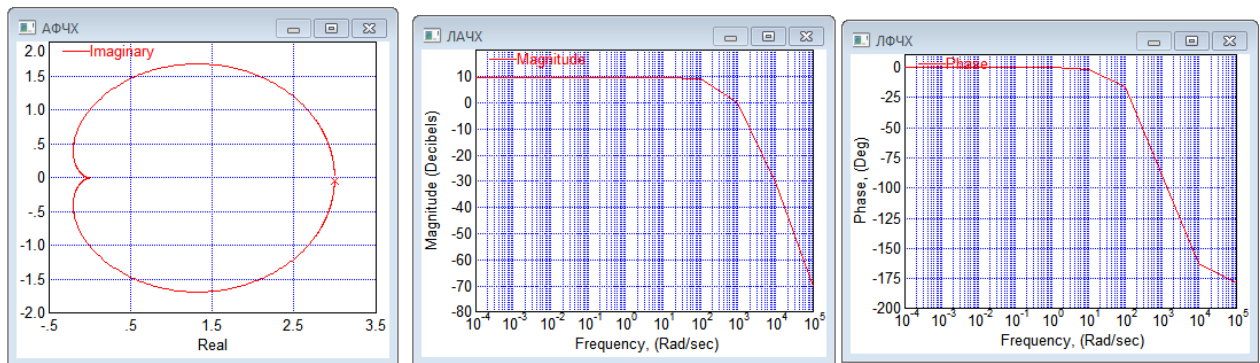


Рисунок 8 – Частотні характеристики

5. Порівняти результати, отримані в результаті моделювання з теоретично одержаними часовими та частотними характеристиками.

6. Пояснити одержані результати (висновки).

5. Порядок оформлення звіту

Звіт оформляється відповідно до вимог ЄСКД на білому папері формату А4. На титульному аркуші вказуються назви міністерства, вузу, кафедри, роботи, прізвище студента, прізвище викладача.

Звіт *повинен* містити наступні матеріали:

- 1) тему і мету роботи;
- 2) початкові дані;
- 3) виконане попереднє завдання для обчислень;
- 4) схему змодельованої САК;
- 5) отримані в результаті моделювання часові та частотні характеристики;
- 6) висновки.

6. Контрольні питання і завдання

1. Запишіть рівняння і передавальні функції аперіодичної ланки другого порядку.
2. Перелічіть динамічні характеристики аперіодичної ланки другого порядку і запишіть їх рівняння.
3. Перелічіть частотні характеристики аперіодичної ланки другого порядку і запишіть частотні функції.
4. Наведіть приклади аперіодичних ланок другого порядку.

Лабораторна робота №5

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСОВИХ І ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛИВНОЇ ЛАНКИ

Мета роботи: експериментально дослідити часові і частотні характеристики коливної ланки, порівняти експериментально одержані характеристики з теоретично одержаними характеристиками коливної ланки.

1. Основні теоретичні відомості.

Коливна ланка описується такими ж диференціальними рівняннями, що і аперіодична ланка другого порядку

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx, \quad (1)$$

але корені характеристичного рівняння $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$ повинні бути комплексними, що буде виконуватися при $T_1 < 2T_2$.

Диференціальне рівняння в операторній формі звичайно представляють в вигляді

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)y = kx,$$

або

$$\left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{2\xi}{q} p + 1 \right) y = kx,$$

де $q = \frac{1}{T}$ – кутова частота вільних коливань (при відсутності затухання) а ξ – параметр затухання (коефіцієнт демпфування), який лежить в межах $0 < \xi < 1$.

Тоді корені характеристичного рівняння $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0$ записуються в вигляді:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = -\frac{\xi}{T} \pm j \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2}$$

Дійсна частина кореня $\alpha = \frac{\xi}{T}$ є коефіцієнтом затухання перехідного процесу, а уявна $\beta = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2}$ частотою затухаючих коливань.

Передавальна функція коливної ланки в операторній формі має вигляд

$$W(p) = \frac{k}{1 + 2\xi T p + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{q} p + \frac{p^2}{q^2}},$$

а в формі перетворення Лапласа

$$W(s) = \frac{k}{1 + 2\xi T s + T^2 s^2} = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{q} s + \frac{s^2}{q^2}}$$

Коливними ланками є коливні RLC-ланки; керовані двигуни постійного струму, в випадку коли $4T_я > T_м$, де $T_я$ – електромагнітна постійна часу кола якоря, $T_м$ – електромеханічна постійна часу двигуна; пружні механічні передачі, наприклад для передачі обертового руху; гіроскопічні елементи та ін.

Часові функції і часові характеристики ланки.

Перехідна функція коливної ланки представляється виразом

$$h(t) = k \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right] \cdot 1(t),$$

де $\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$.

Перехідна характеристика ланки зображена на рис 1.

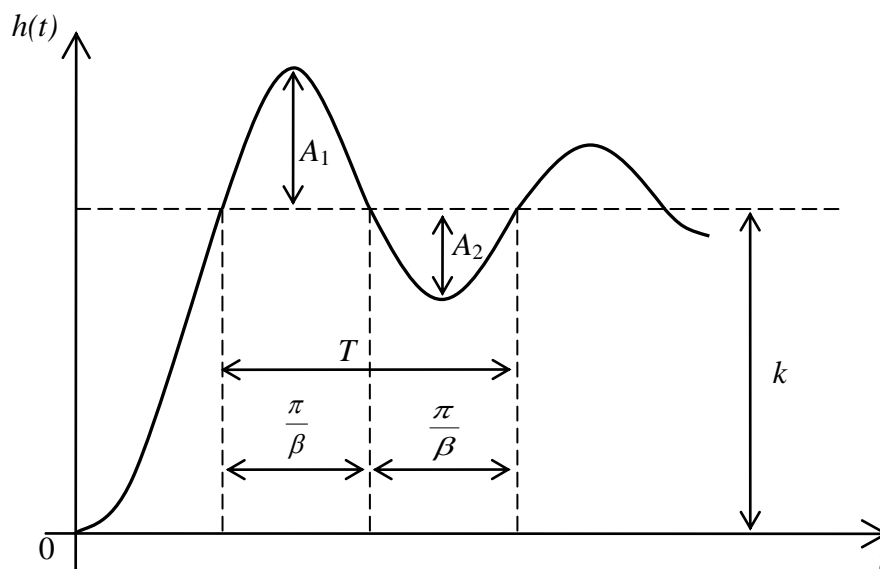


Рисунок 1

Для перехідної характеристики справедливі такі співвідношення:

$$\beta = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{A_1}{A_2} = e^{\alpha T} \quad \text{і} \quad \alpha = \frac{1}{T} \ln \frac{A_1}{A_2}$$

Імпульсна перехідна функція $\omega(t)$ (функція ваги) записується у вигляді

$$\omega(t) = k \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

Імпульсна перехідна характеристика показана на рис. 2

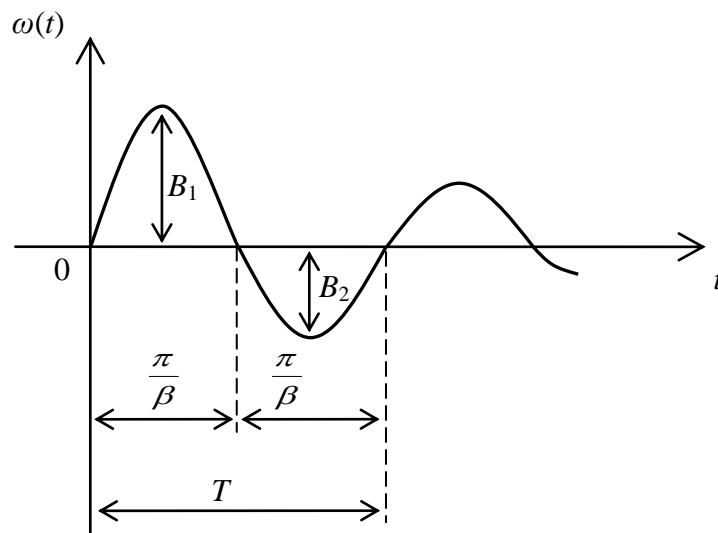


Рисунок 2

Частотні характеристики коливної ланки

Амплітудно-фазова частотна функція (частотна передавальна функція) представлена в алгебраїчній формі має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - \omega^2 T^2) + j2\xi T\omega} = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} + j \frac{-2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \quad (2)$$

де $U(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$ – дійсна частотна функція, а

$V(\omega) = \frac{-2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$ – уявна частотна функція.

Амплітудно-фазова частотна функція записана в показниковій формі виражається формулою

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}} \cdot e^{-j\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}} \quad (3)$$

Відповідна цій характеристиці амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ) показана на рис.3.

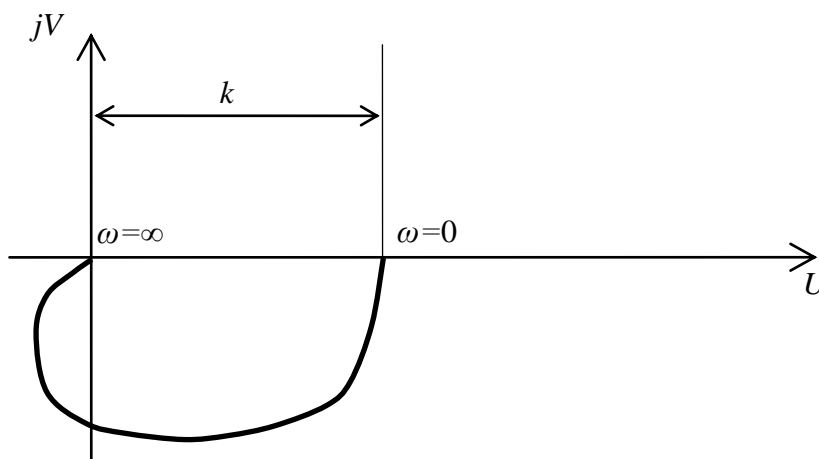


Рисунок 3

З (3) видно, що амплітудна частотна функція

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}},$$

фазова частотна функція

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}, & \text{при } \omega \leq 1/T, \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}, & \text{при } \omega > 1/T, \end{cases}$$

Відповідні їм амплітудна частотна характеристика (АЧХ) і фазова частотна характеристика (ФЧХ) представлені на рис. 4.

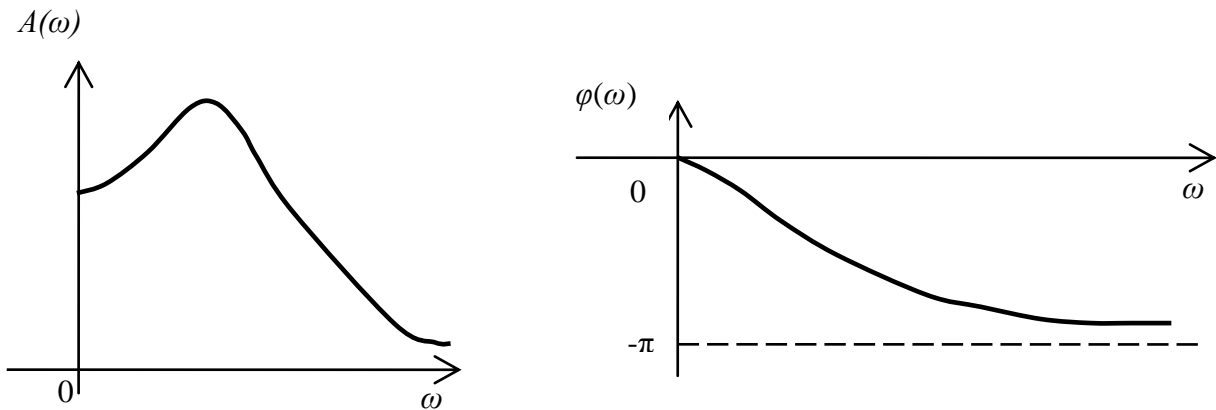


Рисунок 4

Логарифмічна амплітудна частотна функція

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega < \omega_{cn} \\ 20 \lg k - 40 \lg T \omega & \text{при } \omega \geq \omega_{cn} \end{cases}$$

де $\omega_{cn} = 1/T$ – спряжена частота.

На рис.5 показана асимптотична ЛАЧХ (пунктирна лінія) і точна ЛАЧХ (суцільна лінія).

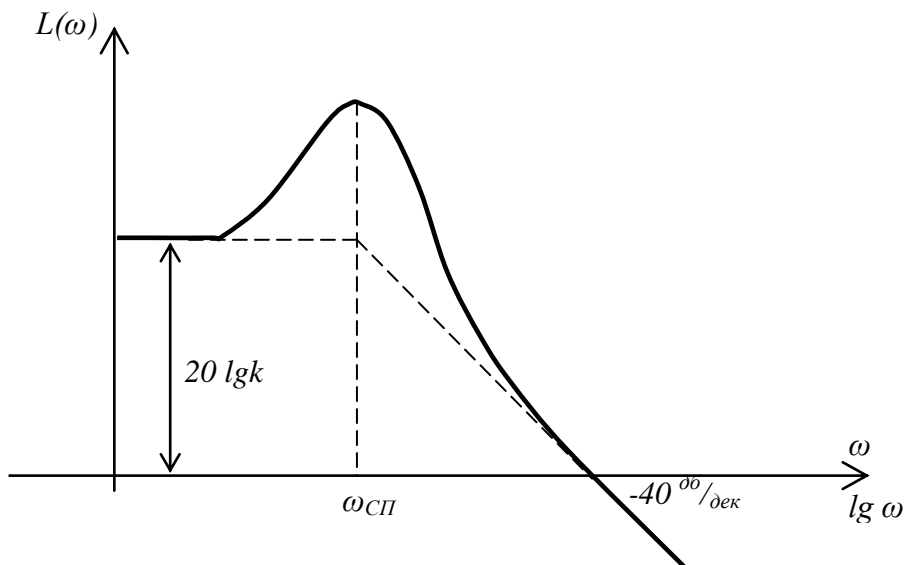


Рисунок 5.

2. Попередні завдання для обчислення

1. Записати передавальну функцію коливної ланки, яка описується диференціальним рівнянням

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 x_1$$

де $a_0 = T^2$, $a_1 = 2\xi T$, $a_2 = 1$, $b_0 = k$.

Числові значення параметрів задані в таблиці 1.

2. Записати вираз для перехідної функції ланки $h(t)$.
3. Записати вираз для імпульсної перехідної функції $\omega(t)$ коливної ланки.
4. Записати формули для розрахунку амплітудно-фазової частотної функції $W(j\omega)$, амплітудної частотної функції $A(\omega)$, фазової частотної функції $\varphi(\omega)$, дійсної $U(\omega)$ і уявної $V(\omega)$ частотних функцій.
5. Побудувати годографи АФЧХ і АЧХ досліджуваної ланки згідно варіанту.
6. Побудувати асимптотичні ЛАХ коливної ланки.
7. Визначити спряжену частоту ω_{cn} і частоту зрізу $\omega_{зр}$ по ЛАХ ланки.

Таблиця 1

Варіант	$T \cdot 10^{-4} \text{ 1/c}$	ξ	k
1	9,4	0,263	2,8
2	9,3	0,271	2,9
3	9,2	0,280	2,95
4	9,1	0,290	3,0
5	9,0	0,295	3,1
6	8,9	0,3	3,2
7	8,8	0,31	3,3
8	8,7	0,32	3,4
9	8,6	0,33	3,5
10	9,5	0,26	2,83
11	9,6	0,25	2,89
12	9,7	0,24	2,93
13	9,8	0,23	3,00
14	9,9	0,22	3,1
15	10	0,23	2,8
16	10,1	0,25	2,7
17	10,2	0,26	2,9
18	9,3	0,27	3,0
19	9,2	0,3	3,2
20	9,1	0,33	3,3
21	9,0	0,34	3,0
22	9,6	0,28	3,1
23	9,7	0,31	3,4
24	9,8	0,30	2,9
25	10	0,25	3,0

2.1 Приклад виконання попередніх завдань для обчислень

$$\frac{1}{k} T := 9.8 \cdot 10^{-4} \quad \xi := 0.23 \quad k := 3 \quad b_0 := k$$

$$a_0 := T^2 = 9.604 \times 10^{-7} \quad a_1 := 2 \cdot \xi \cdot T = 4.508 \times 10^{-4} \quad a_2 := 1 \quad A_1 := 2 \cdot T = 1.96 \times 10^{-3}$$

$$q := \frac{1}{T} \quad \alpha := \frac{\xi}{T} = 234.694 \quad \beta := \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = 993.052 \quad \varphi := \operatorname{atan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1.339$$

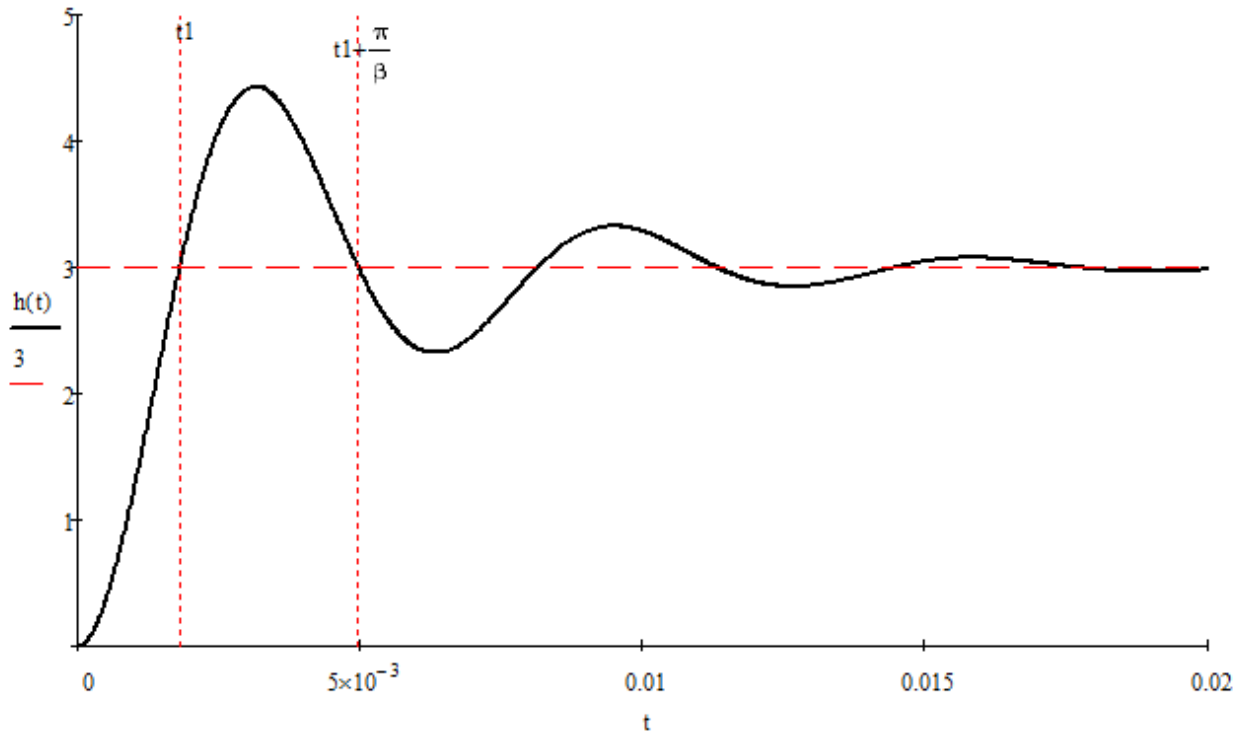
Given

$$a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2 = 0$$

$$\operatorname{Find}(x) \rightarrow (-234.694 - 993.052i \quad -234.694 + 993.052i)$$

$$h(t) := k \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \sin(\beta \cdot t + \varphi) \right) \quad t_1 := 1.825 \times 10^{-3}$$

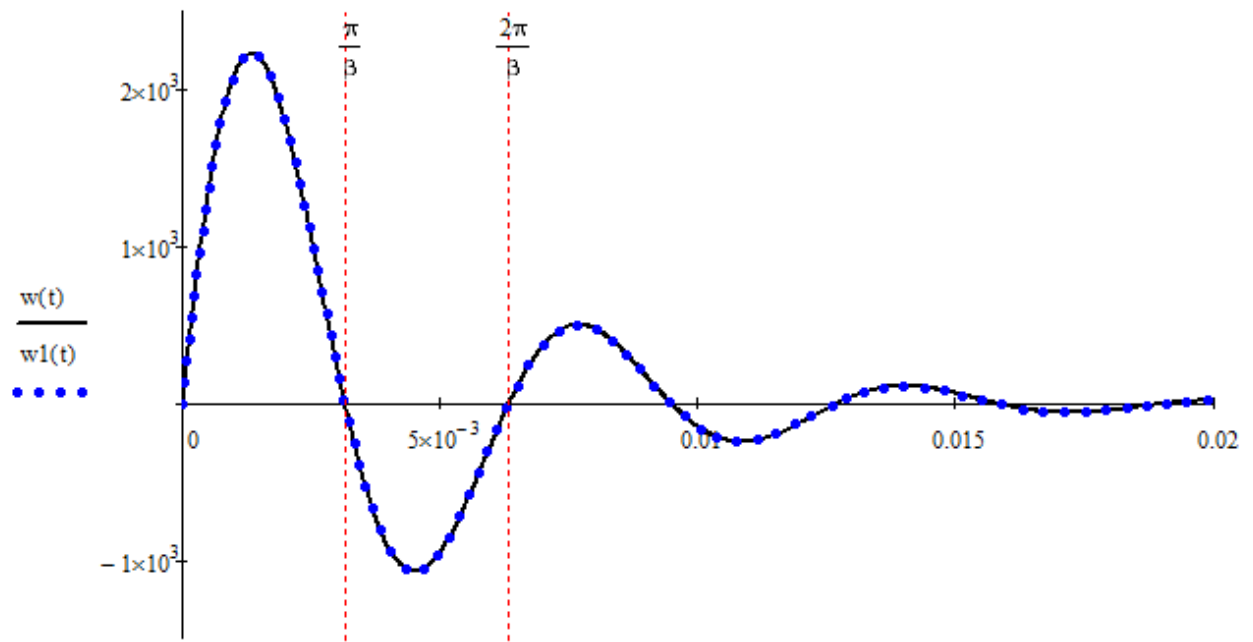
Перехідна характеристика коливної ланки



$$w(t) := \frac{d}{dt} h(t) \rightarrow 723.478 \cdot \sin(993.052 \cdot t + 1.339) \cdot e^{-234.694 \cdot t} + -3.061 \times 10^3 \cdot \cos(993.052 \cdot t + 1.339) \cdot e^{-234.694 \cdot t}$$

$$w_1(t) := k \cdot \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \sin(\beta \cdot t) \right)$$

Імпульсна перехідна характеристика коливної ланки

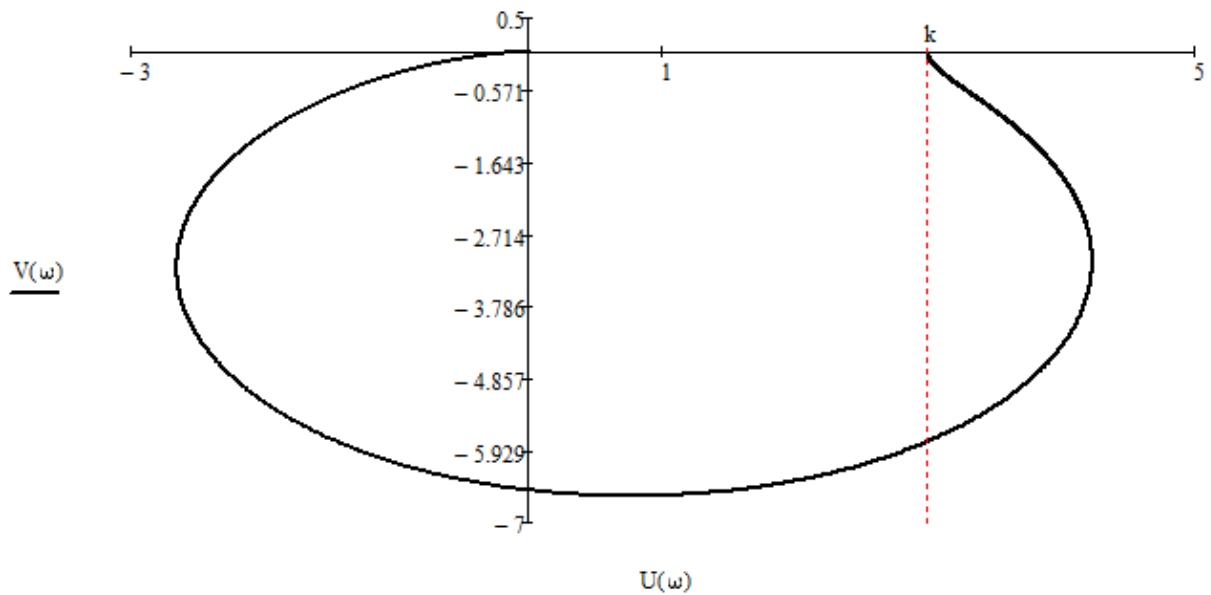


$\omega := 0..100000$

$$U(\omega) := \frac{k \cdot (1 - \omega^2 T^2)}{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4\omega^2 \cdot \xi^2 \cdot T^2}$$

$$V(\omega) := \frac{-2k \cdot \xi \cdot \omega \cdot T}{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4\omega^2 \cdot \xi^2 \cdot T^2}$$

АФЧХ коливної ланки



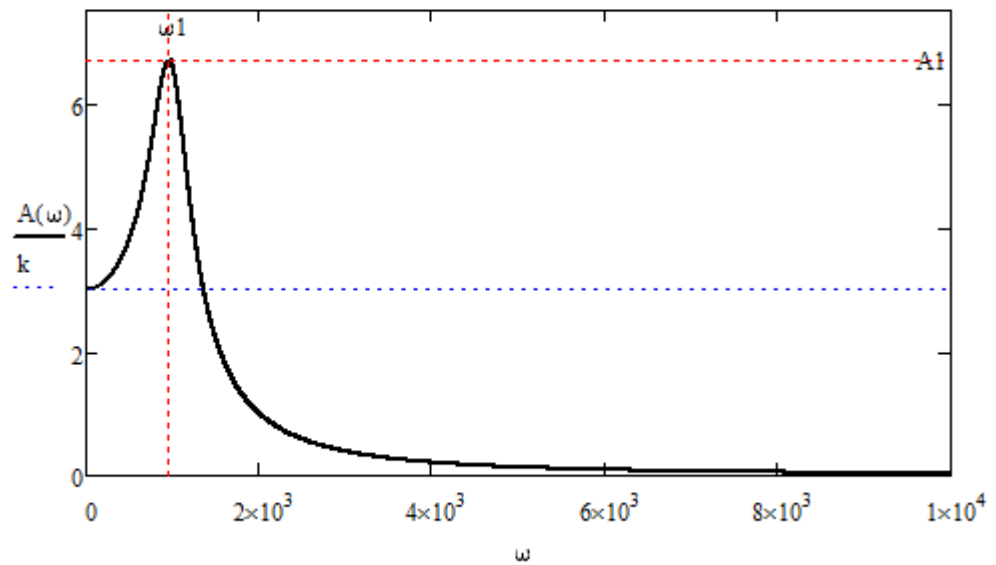
$$\omega := -100000..100000$$

$$\omega_1 := q \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} = 964.92$$

$$A(\omega) := \frac{b_0}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \omega^2 \cdot \xi^2 \cdot T^2}}$$

$$A_1 := \frac{k}{2 \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

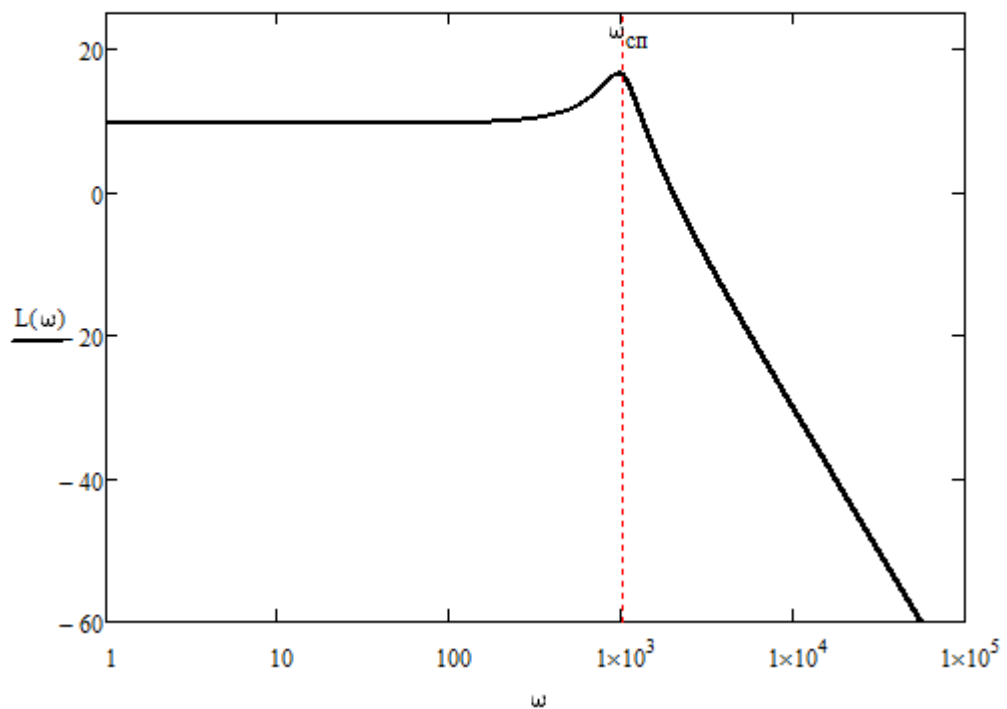
Амплітудна частотна характеристика коливної ланки



$$L(\omega) := 20 \cdot \log(A(\omega))$$

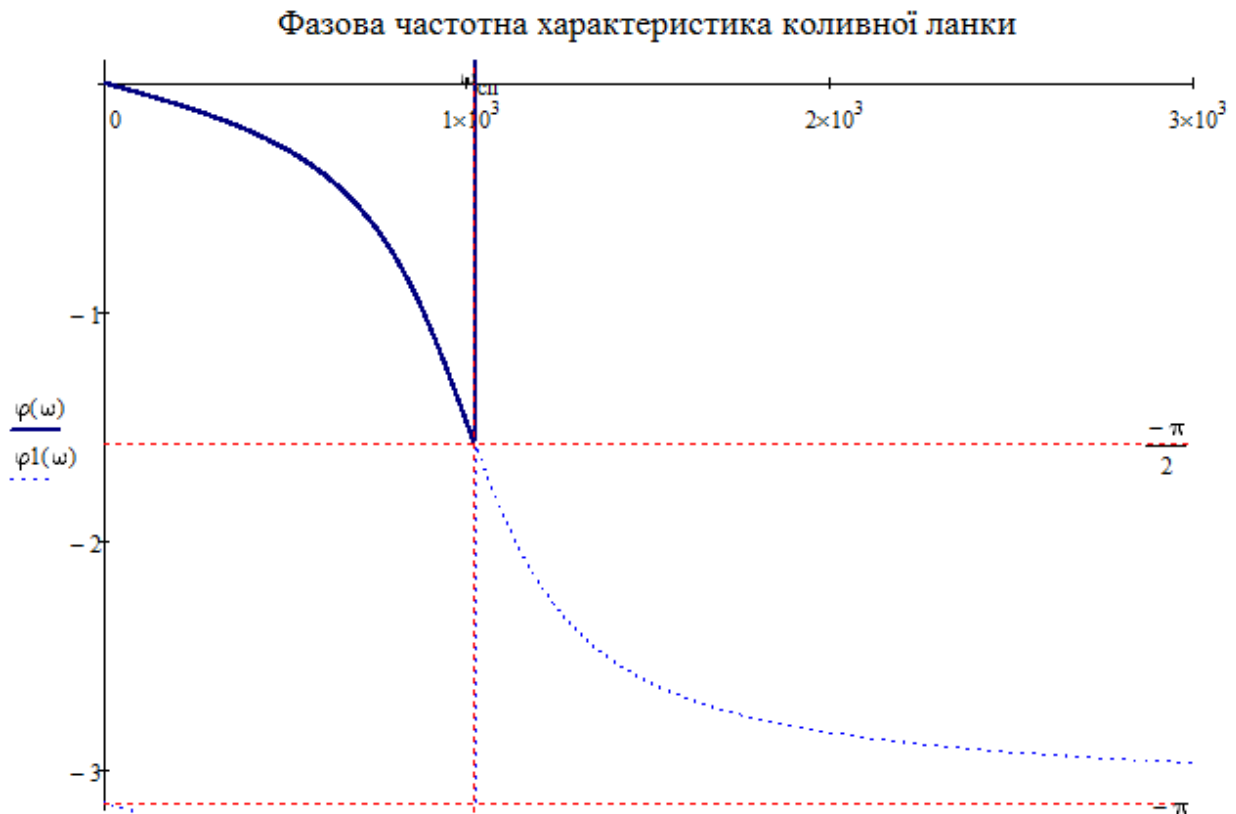
$$\omega_{\text{сп}} := q$$

ЛАХ коливної ланки



$$\varphi(\omega) := -\operatorname{atan}\left(\frac{2\xi \cdot \omega \cdot T}{1 - T^2 \cdot \omega^2}\right)$$

$$\varphi_1(\omega) := -\pi - \operatorname{atan}\left(\frac{2\xi \cdot \omega \cdot T}{1 - T^2 \cdot \omega^2}\right)$$



3. Робоче завдання.

- I. Дослідження часових характеристик ланки.
 1. Зняти осцилограму перехідної функції ланки.
 2. Зняти осцилограми імпульсної перехідної функції ланки.
 3. Порівняти результати експериментальних і теоретичних досліджень.

- II. Дослідження частотних характеристик
 1. Зняти залежності $A=f(\omega)$ і $\varphi=f(\omega)$ досліджуваної ланки.
 2. Побудувати годографи АФЧХ досліджуваної ланки.
 3. Побудувати ЛАХ досліджуваної ланки.
 4. Визначити спряжену частоту ω_c і частоту ω_{zp} досліджуваних ланок.
 5. Порівняти результати теоретичних і експериментальних досліджень.

4. Виконання робочого завдання

1. Отримати перехідну характеристику аперіодичної ланки другого порядку засобами VisSim.

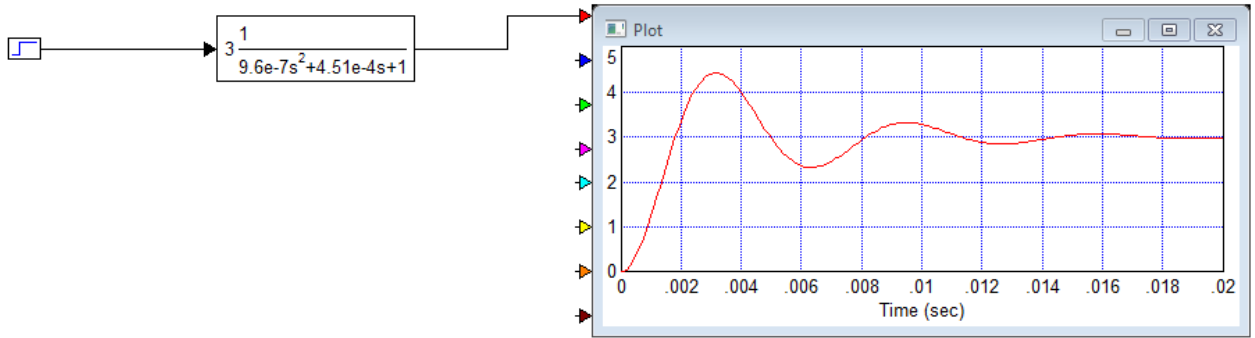


Рисунок 6 – Побудова перехідної характеристики

2. Отримати імпульсну перехідну характеристику аперіодичної ланки другого порядку засобами VisSim.

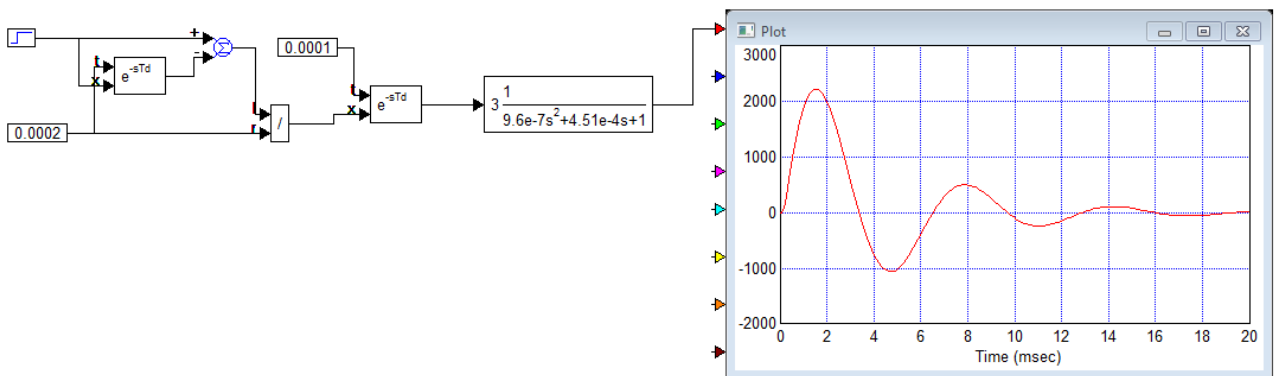


Рисунок 7 – Побудова імпульсної перехідної характеристики

3. Побудувати годограф АФЧХ (годограф Найквіста). Для цього необхідно спочатку виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Nyquist Response".

4. Побудувати логарифмічні амплітудні та фазові частотні характеристики (виділити блок передавальної функції досліджуваної системи і виконати команду: "Analyze -> Frequency Response"). Відобразити на графіках координатну сітку. Подати отримані графіки в звіт.

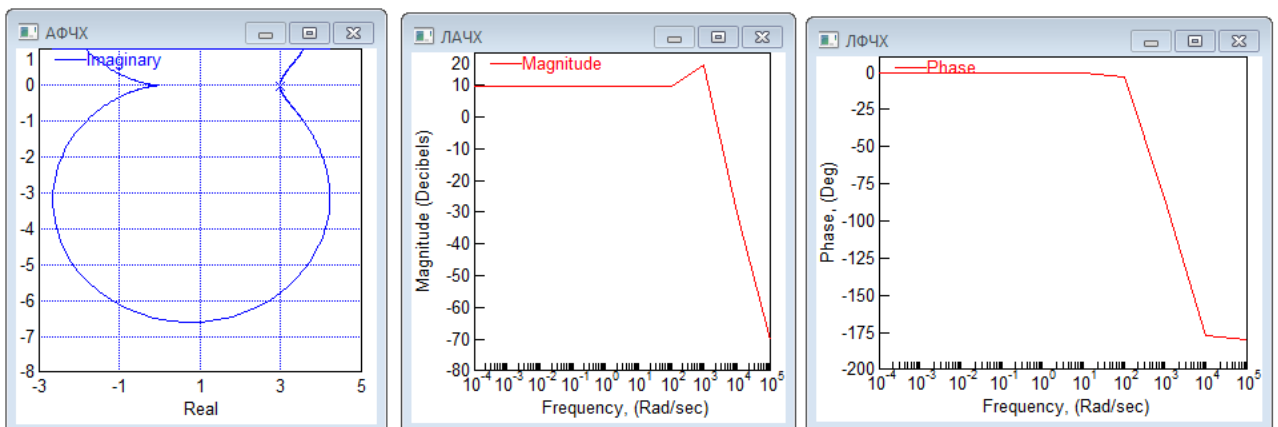


Рисунок 8 – Частотні характеристики

5. Порівняти результати, отримані в результаті моделювання з теоретично одержаними часовими та частотними характеристиками.

6. Пояснити одержані результати (висновки).

5. Порядок оформлення звіту

Звіт оформляється відповідно до вимог ЄСКД на білому папері формату А4. На титульному аркуші вказуються назви міністерства, вузу, кафедри, роботи, прізвище студента, прізвище викладача.

Звіт **повинен** містити наступні матеріали:

- 1) тему і мету роботи;
- 2) початкові дані;
- 3) виконане попереднє завдання для обчислень;
- 4) схему змодельованої САК;
- 5) отримані в результаті моделювання часові та частотні характеристики;
- 6) висновки.

6. Контрольні питання і завдання

1. Запишіть рівняння і передавальні функції коливальної ланки другого порядку.
2. Перелічіть динамічні характеристики коливальної ланки і запишіть їх рівняння.
3. Перелічіть частотні характеристики коливальної ланки і запишіть частотні функції.
4. Наведіть приклади коливальних ланок.

Довідковий матеріал

Зображення найпростіших функцій часу по Лапласу

<i>Назва функції</i>	$x(t)$	$X(p) = L\{x(t)\}$
Дельта-функція	$\delta(t)$	1
Ступінчата функція	$a_0 \cdot 1(t)$	a_0/p
Степенева функція	$t^n \cdot 1(t)$	$n!/p^{n+1}$
Експонента	$e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$1/(p + \alpha)$
Синусоїда	$\sin \omega t \cdot 1(t)$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
Косинусоїда	$\cos \omega t \cdot 1(t)$	$p/(p^2 + \omega^2)$
Періодична функція	$x(t) = x(t + T)$	$X(p)/(1 - e^{-pT})$

Зображення дробово-раціональних функцій по Лапласу

$x(t)$	$X(p) = L\{x(t)\}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p + a)}$
$\frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$	$\frac{1}{p^2(p + a)}$
$\frac{1}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(p + a)(p + b)}$
$\frac{1}{a - b}(ae^{-at} - be^{-bt})$	$\frac{p}{(p + a)(p + b)}$
$\frac{1}{ab(a - b)}((a - b) + be^{-at} - ae^{-bt})$	$\frac{1}{p(p + a)(p + b)}$

Основні властивості перетворення Лапласа

<i>Назва</i>	<i>Оригінал</i>	<i>Зображення</i>
Лінійність	$ax(t)$ $x_1(t) \pm x_2(t)$	$aX(p)$ $X_1(p) \pm X_2(p)$
Правило диференціювання (при нульових початкових умовах)	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$X(p)p^k$
Правило інтегрування (при нульових початкових умовах)	$\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{k} x(\vartheta) d\vartheta^k$	$\frac{X(p)}{p^k}$
Зміна масштабу часу (теорема подібності)	$x\left(\frac{t}{T}\right)$	$X(pT)T$
Зміщення аргументу оригіналу (теорема запізнення)	$x(t - \tau)$	$X(p)e^{-p\tau}$
Теорема про початкове значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$
Теорема про кінцеве значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$

Список рекомендованої літератури

1. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування. К.: "Либідь", 1997. – 544 с.
2. Гоголюк П.Ф., Гречин Т.М. Теорія автоматичного керування: Навч. посібник. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2009. – 280 с.
3. Теория автоматического управления. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / под ред. А. А. Воронова. 2-е изд М.:Высш. шк., 1986. – 367 с.
4. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. 3-е изд., испр. М.: Физматгиз, 1975. – 768 с.
5. Дьяконов В. П. VisSim+MathCAD+MATLAB. Визуальное математическое моделирование. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 384 с.
6. Макаров Е. Г. MathCAD: Учебный курс (+CD) – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.

Зміст

Вступ.....	3
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА N1 Дослідження часових характеристик лінійних систем	4
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА N2 Дослідження частотних характеристик лінійних систем	14
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА N3 Дослідження часових і частотних характеристик аперіодичної ланки першого порядку	22
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА N4 Дослідження часових і частотних характеристик аперіодичної ланки другого порядку.....	32
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА N5 Дослідження часових і частотних характеристик коливної ланки	42
Довідковий матеріал	53
Список рекомендованої літератури	54