

ЗАДАЧА ПРО КРИВУ НАЙШВИДШОГО СПУСКУ

Науковий керівник Габрусев Г. В.

Розглянемо задачу визначення траєкторії найшвидшого спуску тіла у вертикальній площині від точки A до B під дією лише сили тяжіння при умові, що дані точки не знаходяться на одній вертикалі.

Спрощеним аналогом даної задачі, який дозволить уявити шукану криву, є рух променя, що проходить через середовище із зростаючою густиною.

П. Ферма довів твердження про те, що поширення світлового променя буде відбуватись у найкоротший час незалежно від відстані яку пройде промінь. Це положення значно спрощує задачу оскільки дозволяє розв'язати її методами диференціального числення.

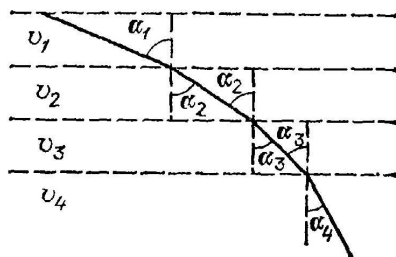


Рис. 1. Схема руху променя в неоднорідному середовищі

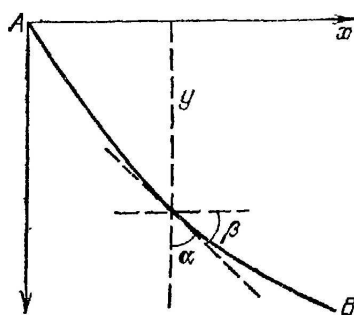


Рис. 2. Траєкторія руху тіла

Розглянемо середовище яке складається із однорідних шарів, густина яких послідовно зростає. (Рис. 1). Якщо припустити, що товщина шарів необмежено спадає, а їх кількість необмежено зростає, то хід променя описуватиме шукану траєкторію. Тоді згідно з законом Снелліуса:

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{const} . \quad (1)$$

Введемо систему координат у якій відбувається рух тіла (Рис. 2). Уявимо, що воно рухається подібно до ходу променя. Згідно із законом збереження енергії:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \text{ або } y = \frac{v^2}{2g} . \quad (2)$$

Швидкість, яку розвиває тіло на певній висоті, залежить лише від втрати його потенційної енергії, і не залежить від обраної траєкторії. Із геометричної точки зору такий рух буде описуватись рівнянням:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} . \quad (3)$$

Отже, отримаємо рівняння брахістохрони:

$$y(1+(y')^2) = C \text{ або } dx = \sqrt{\frac{y}{C-y}} dy . \quad (4)$$

Введемо нову змінну $\sqrt{\frac{y}{C-y}} = \text{tg} \varphi$, звідки матимемо: $y = C \cdot \sin^2 \varphi$; $dy = 2C \sin \varphi \cos \varphi \cdot d\varphi$. Підставивши одержані вирази у (4) одержимо: $dx = C(1 - \cos 2\varphi)d\varphi$; $x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_1$. Врахувавши умову початку руху $x = y = 0$, отримаємо $C_1 = 0$. Остаточно: $x = r(\theta - \sin \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$ де $r = \frac{C}{2}$, $\theta = 2\varphi$.

Отже, кривою найшвидшого спуску є циклоїда.