Тарновецька О. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Лежандра – Ейлера на сегменті [R_0,R_2] полярної осі // Вісник ТДТУ. – 2008. - Том 13. - №4. – ст.. 192-199. – (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.52/524: 517.58/589

О. Тарновецька

Чернівецький факультет Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут”

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА – ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ $[R_0, R_2]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом порівняння розв‘язків, побудованих на двоскладовому сегменті полярної осі для сепаратної системи із модифікованого узагальненого диференціального рівняння Лежандра та модифікованого диференціального рівняння Ейлера методом функцій Коші та методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано поліпараметричну сім‘ю функціональних рядів.

O. Tarnovetska

THE SUMM OF FUNCTIONAL ROWS BY OWN ELEMENTS OF THE HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR OF LEGANDE'S – EJLER ON THE SEGMENT $[R_0, R_2]$ OF THE POLAR AXIS

By the method of the comparison of the solves, built on the two – components segment of the polar axis for separate system from the modified generalized differential equation of Lezhandr and modified differential equation of Ejler by the method of Coshi's functions end by the method of correspondent ended hybrid integral transformation, was summed polyparametric family of functional rows.

Постановка проблеми. Інтенсивне впровадження композиційних матеріалів у сучасних технологічних процесах вимагає вивчення їх фізико-технічних параметрів, в першу чергу, при стаціонарних режимах, на які вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Це приводить до задач термомеханіки кусково-однорідних середовищ [1].

Практика показує, що навіть у найпростіших модельних задачах величини, що характеризують стаціонарний стан, виражаються у вигляді поліпараметричного функціонального ряду, який може бути умовно збіжним і тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї функціональних рядів присвячується дана робота.

Основна частина. Побудуємо задачу про конструкцію обмеженого на множині $I_1 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2); 0 < R_0 < R_1 < R_2 < \infty\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра та Ейлера

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(B^*_{\ \alpha} - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2) \qquad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \, d\!\big/\!dr + \beta_{11}^0\right)u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0,\ \left(\alpha_{22}^2 \, d\!\big/\!dr + \beta_{22}^2\right)u_2(r)\Big|_{r=R_2} = g_R \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{1} {d}/{dr}+\beta_{j1}^{1}\right)u_1(r)-\left(\alpha_{j2}^{1} {d}/{dr}+\beta_{j2}^{1}\right)u_2(r)\right]\Big|_{r=R_1}=\omega_{j1},\ j=1,2. \qquad (3)$$

У рівностях (1) беруть участь узагальнений диференціальний оператор Лежандра [1] $\Lambda_{(\mu)}={d^2}/{dr^2}+cthr\,{d}/{dr}+{1}/{4}+{1}/{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr}+\frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ та диференціальний оператор Ейлера [2]

$$E_{\alpha}^{*}=r^2\,{d^2}/{dr^2}+(2\alpha+1)r\,{d}/{dr}+\alpha^2,\mu_1\geq\mu_2\geq 0,(2\alpha+1)>0,(\mu)=(\mu_1,\mu_2).$$

Ми припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти:

$\alpha_{11}^0\leq 0,\beta_{11}^0\geq 0,\alpha_{22}^2\geq 0,\beta_{22}^2\geq 0,\left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\neq 0,\alpha_{22}^2+\beta_{22}^2\neq 0,c_{11}c_{21}>0,c_{j1}=\alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1,j=1,2.$

Фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}-q_1^2\right)V=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра 1-го роду $P_{-1/2+q_1}^{(\mu)}(chr)$ та 2-го роду $L_{-1/2+q_1}^{(\mu)}(chr)$[1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha}^{*}-q_2^2\right)V=0$ утворюють функції $V_1=r^{-\alpha-q_2}$ та $V_1=r^{-\alpha+q_2}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати загальний розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [2,3].

$$u_1(r)=A_1P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)+B_1L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)+\int_{R_0}^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)sh\rho d\rho,\nu_1=-{1}/{2}+q_1,$$

$$u_2(r)=A_2r^{-\alpha-q_2}+B_2r^{-\alpha+q_2}\int_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho)g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho. \qquad (4)$$

У рівностях (4) $E_j(r,\rho)-$ функція Коші [2,3]:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0}-E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0}=0,$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0}-\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)},\text{де}\varphi_1(r)=shr,\varphi_2(r)=r^{2\alpha+1}. \qquad (5)$$

Визначимо функції:

$$Z_{\nu_1;j1}^{(\mu),m1}(chR_m)=(\alpha_{j1}^m\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^m\frac{d}{dr})P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m},j=1,2,$$

$$Z_{\nu_1;j1}^{(\mu),m2}(chR_m)=(\alpha_{j1}^m\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^m\frac{d}{dr})L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m},m=0,1,$$

$$F_{\nu_1;j1}^{(\mu),m}(chR_m,chr)=Z_{\nu_1;j1}^{(\mu),m1}(chR_m)L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)-Z_{\nu_1;j1}^{(\mu),m2}(chR_m)P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr),$$

$$\Delta_{\nu_1;j1}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)=Z_{\nu_1;11}^{(\mu),01}(chR_0)Z_{\nu_1;j1}^{(\mu),12}(chR_1)-Z_{\nu_1;11}^{(\mu),02}(chR_0)Z_{\nu_1;j1}^{(\mu),11}(chR_1).$$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_1(r,\rho)=\frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}}\begin{cases}F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0,chr)F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1,ch\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0,ch\rho)F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1,chr), & R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \qquad (6)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_2=C_1r^{-\alpha-q_2}+D_1r^{-\alpha+q_2}, & R_1<r<\rho<R_2,\\ \overset{+}{E}_2=C_2r^{-\alpha-q_2}+D_2r^{-\alpha+q_2}, & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші для визначення величин $C_j,D_j\ (j=1,2)$ дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha-q_2} + (D_2 - D_1)\rho^{-\alpha+q_2} = 0,$$

$$(\alpha + q_2)(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha-q_2} + (\alpha - q_2)(D_2 - D_1)\rho^{-\alpha+q_2} = \rho^{-2\alpha}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$(C_1 - C_2) = (2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha+q_2}, (D_1 - D_2) = -(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha-q_2}. \quad (7)$$

Доповнимо рівнянням:

$$\begin{aligned} &(\alpha_{12}^1 \, d/dr + \beta_{12}^1)\bar{E}_2\Big|_{r=R_1} = 0: \\ &(\alpha_{22}^2 \, d/dr + \beta_{22}^2)\overset{+}{E}_2\Big|_{r=R_2} = 0: \end{aligned} \begin{cases} Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)C_1 + Z_{\alpha,12}^{12}(q_2, R_1)D_1 = 0, \\ Z_{\alpha,22}^{21}(q_2, R_2)C_2 + Z_{\alpha,22}^{22}(q_2, R_2)D_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

На підставі співвідношень (7) алгебраїчна система (8) набуває вигляду:

$$Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)C_1 + Z_{\alpha,12}^{12}(q_2, R_1)D_1 = 0,$$

$$Z_{\alpha,22}^{21}(q_2, R_2)C_2 + Z_{\alpha,22}^{22}(q_2, R_2)D_2 = \frac{1}{2q_2}\psi_{\alpha,22}^{2*}(q_2, \rho).$$

Звідси знаходимо, що

$$C_1 = -\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha,12}(q_2, R_1, R_2)} Z_{\alpha,12}^{12}(q_2, R_1)\psi_{\alpha,22}^{2*}(q_2, \rho),$$

$$D_1 = \frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha,12}(q_2, R_1, R_2)} Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)\psi_{\alpha,22}^{2*}(q_2, \rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r, \rho)$ визначена й в силу симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_2(r, \rho) = -\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha,12}} \begin{cases} \psi_{\alpha,12}^{1*}(q_2, r)\psi_{\alpha,22}^{2*}(q_2, \rho), \; R_1 < r < \rho < R_2, \\ \psi_{\alpha,12}^{1*}(q_2, \rho)\psi_{\alpha,22}^{2*}(q_2, r), \; R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \quad (9)$$

В рівностях (8)-(9) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha,j2}^{m1}(q_2, R_m) = [\beta_{j2}^m - \alpha R_m^{-1}\alpha_{j2}^m - \alpha_{j2}^m R_m^{-1} q_2] R_m^{-\alpha-q_2},$$

$$Z_{\alpha,j2}^{m2}(q_2, R_m) = [\beta_{j2}^m - \alpha R_m^{-1}\alpha_{j2}^m + \alpha_{j2}^m R_m^{-1} q_2] R_m^{-\alpha+q_2}, \; j = 1, 2, ,$$

$$\Psi_{\alpha;j2}^{m*}(q_2, r) = Z_{\alpha;j2}^{m2}(q_2, R_m) r^{-(\alpha+q_2)} - Z_{\alpha;j2}^{m1}(q_2, R_m) r^{-\alpha+q_2}, m = 1, 2,$$

$$\Delta_{\alpha;j2}(q_2, R_1, R_2) = Z_{\alpha;j2}^{11}(q_2, R_1) Z_{\alpha;22}^{22}(q_2, R_2) - Z_{\alpha;j2}^{12}(q_2, R_1) Z_{\alpha;22}^{21}(q_2, R_2).$$

Повернемось до формул (4). Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин $A_j, B_j \, (j = 1, 2)$ дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned} &Z_{\nu_1;11}^{(\mu);01}(\text{ch}R_0)A_1 + Z_{\alpha;11}^{(\mu);02}(chR_0)B_2 = g_0, \\ &Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}(\text{ch}R_1)A_1 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),12}(chR_1)B_1 - Z_{\alpha;12}^{11}(q_2, R_1)A_2 - Z_{\alpha;12}^{12}(q_2, R_1)B_2 = \omega_{11}, \\ &Z_{\nu_1;21}^{(\mu);11}(\text{ch}R_1)A_1 + Z_{\nu_1;21}^{(\mu),12}(chR_1)B_1 - Z_{\alpha;22}^{11}(q_2, R_1)A_2 - Z_{\alpha;22}^{12}(q_2, R_1)B_2 = \omega_{21} + G_{12}, \\ &Z_{\alpha;22}^{21}(q_2, R_2)A_2 + Z_{\alpha;22}^{22}(q_2, R_2)B_2 = g_R. \end{aligned} \quad (10)$$

У системі (10) бере участь функція

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{\text{sh}R_1}\int_{R_0}^{R_1} \frac{F_{\nu_{1,11}}^{(\mu),0}(chR_0, \text{ch}\rho)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, \text{ch}R_1)} g_1(\rho)\text{sh}\rho d\rho + \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{\alpha;22}^{2*}(q_2, \rho)}{\Delta_{\alpha;,12}(q_2, R_1, R_2)} g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1} d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)–(3): для будь-якого вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2\} \neq \vec{0}, \vec{q} \neq \vec{0}$ визначник алгебраїчної системи (10)

$$\Delta_{(\mu),\alpha}(q) \equiv \Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)}(chR_1, chR_0)\Delta_{\alpha,12}(q_2, R_1, R_2) - \Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_0)\Delta_{\alpha,22}(q_2, R_1, R_2) \neq 0. \quad (11)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1) – (3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{(\mu),\alpha;11}(r,q) = \frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\left[\Delta_{\alpha,22}F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}(\mathrm{chR}_1, chr) - \Delta_{\alpha,12}F^{(\mu),1}_{\nu_1;21}(\mathrm{chR}_1, chr)\right], \tag{12}$$

$$W_{(\mu),\alpha;12}(r,q) = -\frac{c_{11}}{B_{(\mu)}(q_1)shR_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\Psi^{2*}_{\alpha,22}(q_2,r)\,, q = (q_1, q_2)\,;$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_2$ функції Гріна

$$W_{(\mu),\alpha;21}(r,q) = \frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}F^{(\mu),0}_{\nu_1,11}(chR_0, \mathrm{ch}r),\ \nu_1 = -1/2 + q_1\,,$$

$$W_{(\mu),\alpha;22}(r,q) = \frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}[\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0, chR_1)\Psi^{1*}_{\alpha,22}(q_2,r) - \Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0, chR_1)\Psi^{1*}_{\alpha,12}(q_2,r)]; \tag{13}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\mu),\alpha;11}(r,q) = -\frac{\Delta_{\alpha;22}}{\Delta_{(\mu),\alpha}}F^{(\mu),0}_{\nu_1,11}(chR_0, \mathrm{ch}r)\,,\quad \mathcal{R}^1_{(\mu),\alpha;21}(r,q) = \frac{\Delta_{\alpha;12}}{\Delta_{(\mu),\alpha}}F^{(\mu),0}_{\nu_{1,11}}(chR_0, \mathrm{ch}r)\,,$$

$$\mathcal{R}^2_{(\mu),\alpha;11}(r,q) = -\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}}{\Delta_{(\mu),\alpha}}\Psi^{2*}_{\alpha,22}(q_2,r),, \mathcal{R}^2_{(\mu),\alpha;21}(r,q) = \frac{\Delta^{(\mu);11}_{\nu_1;21}}{\Delta_{(\mu),\alpha}}\Psi^{2*}_{\alpha,22}(q_2,r); \tag{14}$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;11}(r,\rho,q) = -B_{(\mu)}(q_1)\begin{cases}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}r)W_{(\mu),\alpha;11}(\rho,q), & R_0 < r < \rho < R_1\\ F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}\rho)W_{(\mu),\alpha;11}(r,q), & R_0 < \rho < r < R_1\end{cases},$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}F^{(\mu),0}_{\nu_{1;11}}(chR_0, \mathrm{ch}r)\Psi^{2*}_{\alpha,22}(q_2,\rho), \tag{15}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{\mathrm{sh}R_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0, \mathrm{ch}\rho)\Psi^{2*}_{\alpha,22}(q_2,r)\,,$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;22}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_2}\begin{cases}W_{(\mu),\alpha;22}(r,q)\Psi^{2*}_{\alpha;22}(q_2,\rho), R_1 < r < \rho < R_2\\ W_{(\mu),\alpha;22}(r,q)\Psi^{2*}_{\alpha;22}(q_2,r), R_1 < \rho < r < R_2\end{cases}.$$

У результаті однозначної розв’язності алгебраїчної системи (10) в силу умови (11) і підстановки одержаних значень $A_j, B_j\,(j = 1,2)$ у формули (4) маємо єдиний розв’язок крайової задачі (1) – (3):

$$u_j(r) = W_{(\mu),\,\alpha;\,1j}(r,q)g_0 + W_{(\mu),\alpha;2j}(r,q)g_R + \mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;11}(r,q)\omega_{11} + \mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;21}(r,q)\omega_{21} +$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho + \int_{R1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,\ j = 1,2\,. \tag{16}$$

Побудуємо тепер розв’язок крайової задачі (1)–(3) методом гібридного інтегрального перетворення (ГІП), породженого на множині I_1 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{(\mu),\alpha} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B^*_\alpha\,, \tag{17}$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$ як сполучення самоспряжених диференціальних операторів є самоспряженим оператором і не має на множині I_1 особливих точок. Отже, його спектр дійсний та дискретний. Йому відповідає дискретна спектральна функція.

Власні елементи ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$)(власні числа та відповідні їм власні функції) знайдемо як розв‘язок спектральної задачі Штурма - Ліувілля: побудувати обмежений на множині I_1 ненульовий розв‘язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра та Ейлера

$$\left(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2\right)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)=0,\ r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(B^*{}_\mu+b_2^2\right)V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2) \tag{18}$$

за однорідними крайовими умовами (2) та однорідними умовами спряження (3) ($g_0=g_R=0,\ \omega_{11}=\omega_{21}=0$).

Фундаментальну систему розв’язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)$v=0 утворюють функції $A^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)$ та $B^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)$, $\nu_1^*=-\frac{1}{2}+ib_1, i^2=-1, b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}, k_j^2\geq 0, j=1,2$ [1], фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера ($B^*_\alpha+b_2^2$)v = 0 утворюють функції $v_1=r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r)$ [2].

Введемо до розгляду функції:

$$Y^{(\mu);m1}_{\nu_1^*;j1}(\text{ch}R_m)=\left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^m_{j1}\right)A^{(\mu)}_{\nu_1^*}(\text{ch}r)\Big|_{r=R_m},\ j=1,2,$$
$$Y^{(\mu);m2}_{\nu_1^*;j1}(\text{ch}R_m)=\left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^m_{j1}\right)B^{(\mu)}_{\nu_1^*}(\text{ch}r)\Big|_{r=R_m},\ m=0,1;$$
$$Y^{k1}_{\alpha;j2}(b_2,R_k)=[(\beta^k_{j2}-\alpha R_1^{-1}\alpha^k_{j2})\cos(b_2\ln R_k)-\alpha^k_{j2}R_k^{-1}b_2\sin(b_2\ln R_k)]R_k^{-\alpha},$$
$$Y^{k2}_{\alpha;j2}(b_2,R_k)=[(\beta^k_{j2}-\alpha R_1^{-1}\alpha^k_{j2})\sin(b_2\ln R_k)+\alpha^k_{j2}R_k^{-1}b_2\cos(b_2\ln R_k)]R_k^{-\alpha}.$$

Якщо покласти

$$V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)=A_1A^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)+B_1B^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr),$$
$$V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)=A_2r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r), \tag{19}$$

то однорідні крайові умови (2) та однорідні умови спряження (3) для визначення чотирьох невідомих A_j, B_j дають однорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Y^{(\mu),01}_{\nu_1^*;11}(chR_0)A_1+Y^{(\mu),02}_{\nu_1^*;11}(chR_0)B_1=0,$$
$$Y^{(\mu),11}_{\nu_1^*;j1}(chR_1)A_1+Y^{(\mu),12}_{\nu_1^*;j1}(chR_1)B_1-Y^{11}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)A_2-Y^{12}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)B_2=0,\ j=1,2, \tag{20}$$
$$Y^{21}_{\alpha;22}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha;22}(b_2,R_2)B_2=0.$$

Алгебраїчна система (20) має ненульові розв‘язки тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю [4]:

$$\delta_{(\mu),\alpha}(\beta)\equiv\delta_{(\mu),21}(\beta)\delta_{\alpha;12}(\beta)-\delta_{(\mu),11}(\beta)\delta_{\alpha;22}(\beta)=0. \tag{21}$$

У рівностях (21) прийняті позначення:

$$\delta_{(\mu),j1}(\beta)=Y^{(\mu),01}_{\gamma_1^*;11}(chR_0)Y^{(\mu),12}_{\gamma_1^*;j1}(chR_1)-Y^{(\mu),02}_{\gamma_1^*;11}(chR_0)Y^{(\mu),11}_{\gamma_1^*;j1}(chR_1),$$
$$\delta_{\alpha,j2}(\beta)=Y^{11}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha;22}(b_2,R_2)-Y^{12}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha;22}(b_2,R_2),\ j=1,2$$

Корені β_n трансцендентного рівняння (21) утворюють дискретний спектр [5];дійсні, різні, симетричні відносно $\beta=0$ та на півосі $\beta>0$ складають монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Розв’язання алгебраїчної системи (20) стандартним способом [4] й підстановка отриманих значень A_j та B_j (j = 1, 2) у формули (19) дає структуру функцій $V_{(\mu),\,\alpha;\,j}(r,\beta)$:

$$V_{(\mu),\,\alpha;\,1}(r,\beta_n)=\frac{c_{21}b_{2n}}{R_1^{2\alpha+1}}[Y^{(\mu);01}_{\nu_{1n}^*;11}(\text{ch}R_0)B^{(\mu)}_{\nu_{1n}^*}(\text{ch}r)-Y^{(\mu);02}_{\nu_{1n}^*;11}(\text{ch}R_0)A^{(\mu)}_{\nu_{1n}^*}(\text{ch}r)],$$
$$V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta_n)=\omega_{(\mu),\alpha;2}(\beta_n)r^{-\alpha}\cos(b_{2n}\ln r)-\omega_{(\mu),\alpha;1}(\beta_n)r^{-\alpha}\sin(b_{2n}\ln r). \tag{22}$$

У рівностях (22) прийняті позначення:

$$v_{1n}^{*} = -\tfrac{1}{2} + ib_{1n}, b_{jn} = (\beta_n^2 + k_j^2)^{1/2}, k_j^2 \ge 0, j = 1,2,$$

$$\omega_{(\mu),\alpha;j}(\beta_n) = \delta_{(\mu);11}(\beta_n) Y_{\alpha;22}^{1j}(b_{2n}, R_1) - \delta_{(\mu);21}(\beta_n) Y_{\alpha;12}^{1j}(b_{2n}, R_1), j = 1,2.$$

Наявність вагової функції

$$\sigma(r)=\theta(R_1-r)\,\theta(r-R_0)\,\sigma_1 \mathrm{sh} r+\theta(r-R_1)\,\theta(R_2-r)\,\sigma_2 r^{2\alpha-1},\ \sigma_1=\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{R_1^{2\alpha+1}}{\mathrm{sh} R_1},\ \sigma_2=1$$

та спектральної функції

$$V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta_n) + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta_n)$$

з квадратом норми

$$\left\| V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) \right\|^2 = \int_{R_0}^{R_2} \left[V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) \right]^2 \sigma(r) dr$$

дає можливість запровадити скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_1 ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$ [5]:

$$H_{(\mu),\alpha}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_2} g(r) V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{23}$$

$$H_{(\mu),\alpha}^{-1}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \frac{V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)}{\left\| V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) \right\|^2} \equiv g(r). \tag{24}$$

Тут функція $g(r) \in G$, де G-область визначення ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$. В основі застосування СГІП $(H_{(\mu),\alpha}, H_{(\mu),\alpha}^{-1})$ до розв‘язання відповідних задач лежить основна тотожність ГІП ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$.

Твердження. Якщо вектор-функція $f(r) = \left\{ \Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_\alpha^*[g_2(r)] \right\}$ неперервна на множині I_1, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$:

$$H_{(\mu),\alpha},[M_{(\mu),\alpha}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - k_1^2 \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) \mathrm{V}_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta_n)\sigma_1 shr dr - k_2^2 \int_{R_1}^{R_0} g_2(r) \mathrm{V}_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha-1} dr +$$

$$+\sigma_1(-\alpha_{11}^0)^{-1} shR_0 \mathrm{V}_{(\mu),\alpha;1}(R_0,\beta_n) g_0 + \sigma_2 R_2^{2\alpha+1}(\alpha_{22}^2)^{-1} \mathrm{V}_{(\mu),\alpha;2}(R_2,\beta_n) g_R +$$

$$+ \frac{R_1^{2\alpha+1}}{c_{21}} [Z_{(\mu),\alpha;12}^1(\beta_n)\omega_{21} - Z_{(\mu),\alpha;22}^1(\beta_n)\omega_{11}].$$

$$Z_{(\mu),\alpha;j2}^1(\beta_n) = (\alpha_{j2}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{j2}^1) \mathrm{V}_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_1}, j = 1,2. \tag{25}$$

Єдиний розв‘язок крайової задачі (1)-(3), побудований за відомою логічною схемою [6] методом, запропонованим формулами (23), (24)СГІП, має структуру:

$$u_j(r) = \int_{R_0}^{R_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n) V_{(\mu),\alpha;1}(\rho,\beta_n)}{\left\| V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) \right\|^2 (\beta_n^2 + q^2)} \right) g_1(\rho)\sigma_1 \mathrm{sh}\rho d\rho +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\mu),\alpha;2}(\rho,\beta_n) V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)}{\left\| V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) \right\|^2 (\beta_n^2 + q^2)} \right) g_2(\rho)\sigma_2 \rho^{2\alpha-1} d\rho + \tag{26}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\mu),\alpha;1}(R_0,\beta_n) V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)}{\left\| V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) \right\|^2 (\beta_n^2 + q^2)(-\alpha_{11}^0)} \sigma_1 shR_0 g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\mu),\alpha;2}(R_2,\beta_n) V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)}{\left\| V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n) \right\|^2 (\beta_n^2 + q^2)\alpha_{22}^2} \sigma_2 R_2^{2\alpha+1} g_R +$$

$$+\frac{R_1^{2\alpha+1}}{c_{21}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{(\mu),\alpha;12}(\beta_n)V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)}{\left\|V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2(\beta_n^{\,2}+q^2)}\omega_{21}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{(\mu),\alpha;22}(\beta_n)V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)}{\left\|V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2(\beta_n^{\,2}+q^2)}\omega_{11}\right],$$

$$q^2=\max\{q_1^2;\ q_2^2\},\ j=1,2.$$

Порівнюючи розв‘язки (16) та (26) в силу єдиності, одержуємо наступні формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$, визначеного рівністю (17):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)V_{(\mu),\alpha;k}(\rho,\beta_n)}{\left\|V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2(\beta_n^{\,2}+q^2)}=\frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;jk}(r,\rho,q),\ j,k=1,2, \tag{27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)V_{(\mu),\alpha;1}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{1}{\sigma_1 shR_0}W_{(\mu),\alpha;1j}(r,q),\ j=1,2, \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)V_{(\mu),\alpha;2}(R_2,\beta_n)}{\alpha_{22}^2(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}}\mathrm{W}_{(\mu),\alpha;2j}(r,q),\ j=1,2, \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)Z^1_{(\mu),\alpha;12}(\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;21}(r,q),\ j=1,2. \tag{30}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta_n)Z^1_{(\mu),\alpha;22}(\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{(\mu),\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2}=-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;11}(r,q). \tag{31}$$

Функції впливу $H_{(\mu),\alpha;jk}(r,\rho,q)$ визначені формулами (15), функції Гріна $W_{(\mu),\alpha;1j}(r,q)$ визначені формулами (12), функції Гріна $\mathrm{W}_{(\mu),\alpha;2j}(r,q)$ визначені формулами (13), а функції Гріна умов спряження $\mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;i1}(r,q)$ визначені формулами (14).

Якщо $q^2=q_1^2$, то $k_1^2=0, k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0$.

В цьому випадку $b_{1n}=\beta_n$, $b_{2n}=\sqrt{\beta_n^{\,2}+q_1^2-q_2^2}$ і $\beta_n^{\,2}+q^2=\beta_n^{\,2}+q_1^2$.

Якщо $q^2=q_2^2$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\ge 0, k_2^2=0$.

В цьому випадку $b_{1n}=\sqrt{\beta_n^{\,2}+q_2^2-q_1^2}$, $b_{2n}=\beta_n$ і $\beta_n^{\,2}+q^2=\beta_n^{\,2}+q_2^2$.

Зауважимо, що праві частини рівностей (27)-(31) не залежать ні від нерівності $(q_1^2-q_2^2)\ge 0$, ні від нерівності $(q_2^2-q_1^2)\ge 0$. Тому можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_0^2>0$, звужуючи при цьому сім‘ю функціональних рядів.

Підсумком викладеного вище є твердження.

Основна теорема: Якщо вектор-функція $g(r)=\{g_1(r),g_2(r)\}$ задовольняє умови твердження про основну тотожність та виконується умова (11) однозначної розв‘язності крайової задачі (1)-(3), то мають місце формули (27)-(31) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$, визначеного рівністю (17).

Висновок. Одержані формули (27)-(31) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі підсумовування функціональних рядів й можуть бути використані при обчисленні функціональних рядів за власними елементами ГДО, які з'являються при моделюванні технологічних процесів у відповідних неоднорідних середовищах.

Література

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.-М.-:Физматгиз,1959.-468с.
2. ШиловГ.Е. Математический анализ. Второй специальный курс.- М.: Наука, 1965.-328с.
3. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера - Фока.-Чернівці: Прут, 2002.- 248с.
4. Ленюк М. П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра, Конторовича- Лєбєдєва).Том V.- Чернівці: Прут, 2005.- 360с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1971.-432с.
6. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. - Чернівці: Прут, 2001.- 228с.

Одержано 23.08.2008 р.