

УДК 539.4+620.1

**А. Грабовський, канд. техн. наук, доц., І. Бабієнко, ас.**

*НТУ України «Київський політехнічний інститут», м. Київ*

## **ОСНОВИ КІНЕТИКИ ПОШКОДЖУВАНOSTI МАТЕРІАЛІВ ПРИ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*Розглядається оцінка кінетики накопичення розсіяних пошкоджень в конструкційних матеріалів для загального вигляду складного навантаження. Отримано тензор ефективних напружень з врахуванням пошкоджуваності для об'ємного напруженого стану на довільно нахилений площадці. Знайдено перший, другий та третій інваріанти тензора ефективних напружень з врахуванням пошкоджуваності. Розкладено тензор ефективних напружень на девіаторну і сферову частини та знайдено інваріанти для них відповідно.*

**Ключові слова:** тензор ефективних напружень, пошкоджуваність, площа мікрodefektів, поверхнева щільність defektів, крихке руйнування.

**A. Grabovskii, I. Babiyenko**

## **FUNDAMENTALS OF KINETICS DAMAGE MATERIALS UNDER ELASTOPLASTIC LOADING**

*The paper considers the evaluation of the kinetics of accumulation of scattered damage in structural materials for the general form of complex loading. Obtained by the tensor of effective stresses, taking into account damage to the general form of complex loading, introducing the function of damage through the considered mathematical models under axial loading and torsion, which requires only the value of the residual elastic axial and angular deformities. Decomposed this tensor on the deviatoric and spherical parts, defined first, second, third invariants of the tensors.*

**Key words:** effective stress tensor, damage, microdefects area, surface density of defects, brittle fracture.

**Вступ.** В умовах експлуатації елементи конструкцій сприймають складний комплекс зовнішніх впливів, що призводить до цілого ряду незворотних фізико-хімічних процесів, які протікають у матеріалі конструкції на мікро- і макрорівнях. Внаслідок цього відбувається зміна первинної структури матеріалу, зародження, розвиток і злиття пор, утворення мікротріщин, зменшення ефективного поперечного перерізу елемента конструкції і його подальше руйнування. Надалі під пошкоджуваністю матеріалу приймаємо величину, що характеризує порушення суцільності матеріалу, яка виникла під впливом деформацій і стає причиною погіршення його фізико-механічних властивостей.

Введено гіпотезу, що мікропустоти та мікротріщини достатньо рівномірно розподіляються в об'ємі матеріалу, тобто пошкодження матеріалу в першому наближенні носить ізотропний характер.

Згідно з [1, 2, 3] ефективна площа поперечного перерізу  $\tilde{F}$  дорівнює

$$\tilde{F} = F - F_{\Pi} \quad (1)$$

де  $F_{\Pi}$  – площа мікрodefektів у матеріалі;  $F$  – повна площа поперечного перерізу елементарного об'єму тіла.

Параметр пошкоджуваності  $D_n$ , що відповідає нормалі  $\vec{n}$  до перерізу, дорівнює

$$D_n = \frac{F - \tilde{F}}{F}. \quad (2)$$

З фізичної точки зору змінна  $D_n$  – це скорегована площа мікрodefektів: тріщин та пор, що припадають на одиницю поверхні перерізу елемента площиною, перпендикулярною до нормалі  $\vec{n}$ .

З математичної точки зору при наближенні  $F$  до нуля  $D$  являє собою скореговану поверхневу щільність defektів у тілі відносно нормалі  $\vec{n}$ .

Якщо  $\vec{P}$  – навантаження, що діє на переріз  $F$  елемента, то

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{P}}{F} \quad (3)$$

є вектор напруження, що призводить до тензора напруження Коші  $\sigma$  за співвідношенням  $\vec{\sigma} = \sigma \cdot \vec{n}$ . Величина  $\tilde{F} = F(1 - D)$  є ефективною площею, що фактично несе навантаження  $\vec{P}$ . Тоді формулу (3) можна переписати у вигляді вектора ефективного напруження

$$\tilde{\sigma} = \frac{\vec{\sigma}}{1 - D} \quad (4)$$

За параметр, що відображає процес накопичення пошкоджуваності в конструкційному матеріалі, в першому наближенні можна прийняти скалярну функцію  $D$

$$D = f(\varepsilon_i^{(p)}, \sigma_i, T, t, N, \dots), \quad (5)$$

де  $\varepsilon_i^{(p)}$  та  $\sigma_i$  – інтенсивність пластичної деформації та напружень відповідно;  $T$  – температура;  $t$  – час;  $N$  – кількість циклів втомного навантаження.

Згідно з гіпотезою Я.Б. Фрідмана [4] процес руйнування матеріалу можна розглядати, як сукупність дії двох механізмів руйнування – відриву та зсуву, що охоплює в'язке, крихке та в'язко-крихке руйнування

$$\vec{D} = \vec{D}_\sigma + \vec{D}_\tau, \quad (6)$$

де  $\vec{D}_\sigma$  – вектор пошкоджуваності в матеріальній точці в напрямку відриву, а  $\vec{D}_\tau$  – вектор пошкоджуваності в напрямку зсуву (кручення).

**Об'ємний напружений стан із врахуванням пошкоджуваності.** В загальному випадку напруженого стану при довільній орієнтації елементарного паралелепіпеда, виділеного в межах точки навантаженого тіла, на його гранях діють шість незалежних компонент тензора напружень:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$  (рис. 1).

Тензор ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності в загальному випадку на довільно нахиленій площадці має вигляд

$$T(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_x & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\sigma}_y & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\sigma}_z \end{pmatrix} \quad (7)$$

Розглянемо детальніше залежності загальної та ефективної площі [5]. Нехай  $\delta F$  – загальна площа, а  $\delta F_D$  – пошкоджувана площа (площа, що враховує концентрації мікро-напружень та взаємодію між близькими defekтами), тоді вираз для ефективної площі  $\tilde{\delta F}$

$$\delta \tilde{F} = \delta F - \delta F_D = \delta F (1 - D). \quad (8)$$

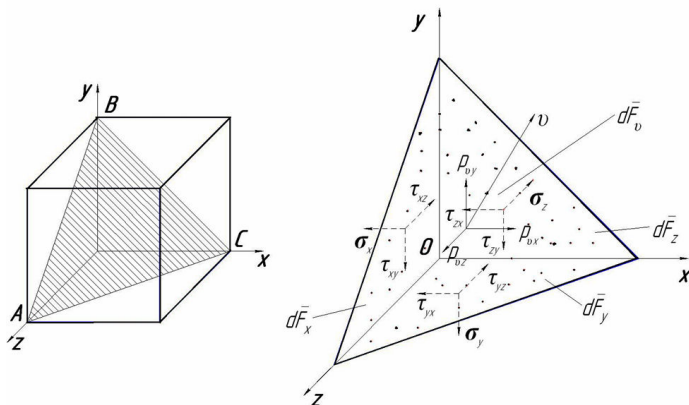


Рисунок 1. Об'ємний напружений стан на довільно нахилений площадці з врахуванням пошкоджуваності

Пошкодження часто є анізотропним унаслідок того, що мікроруйнування більшою або меншою мірою перпендикулярне до напрямку найбільшого позитивного головного напруження. Тоді поверхнева щільність мікродефектів у площині з нормаллю  $\vec{n}$  представляється оператором, який трансформує площу  $\delta F$  і нормаль  $\vec{n}$  в меншу, але безперервну площу  $\delta \tilde{F} = \delta F - \delta F_D$  й іншу нормаль  $\tilde{\vec{n}}$  (рис. 2).

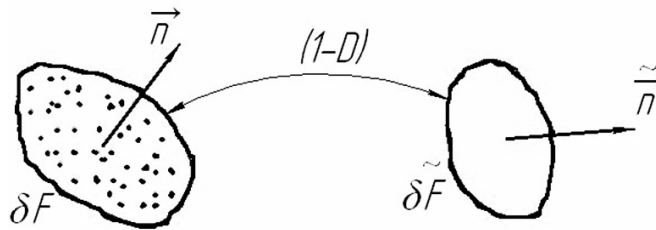


Рисунок 2. Трансформація однієї площі в іншу

Ця трансформація виглядає таким чином:

$$(I - D)\vec{n} \delta F = \tilde{\vec{n}} \delta \tilde{F} \quad \text{або} \quad (I_{ij} - D_{ij})n_j \delta F = \tilde{n}_j \delta \tilde{F}. \quad (9)$$

Для отримання ефективних напружень запишемо тензор напружень у двох конфігураціях

$$T_i \delta F = \tilde{T}_i \delta \tilde{F}. \quad (10)$$

Вираз для знаходження компонентів тензора ефективних напружень має вигляд

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} (I_{ij} - D_{ij})^{-1}. \quad (11)$$

Після проведеного вище розрахунку тензор ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності (через параметр пошкоджуваності  $D_{ij}$ )

$$T(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x}{1 - D_x} & \frac{\tau_{xy}}{1 - D_{xy}} & \frac{\tau_{xz}}{1 - D_{xz}} \\ \frac{\tau_{yx}}{1 - D_{yx}} & \frac{\sigma_y}{1 - D_y} & \frac{\tau_{yz}}{1 - D_{yz}} \\ \frac{\tau_{zx}}{1 - D_{zx}} & \frac{\tau_{zy}}{1 - D_{zy}} & \frac{\sigma_z}{1 - D_z} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Розглянемо інваріанти тензора ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності [6]. Перший інваріант пошкоджуваності дорівнює

$$I_1(\tilde{\sigma}) = \frac{\sigma_x}{1-D_x} + \frac{\sigma_y}{1-D_y} + \frac{\sigma_z}{1-D_z}. \quad (13)$$

Другий інваріант виражається співвідношенням

$$I_2(\tilde{\sigma}) = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_x}{1-D_x} & \frac{\tau_{xy}}{1-D_{xy}} \\ \frac{\tau_{yx}}{1-D_{yx}} & \frac{\sigma_y}{1-D_y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\sigma_x}{1-D_x} & \frac{\tau_{xz}}{1-D_{xz}} \\ \frac{\tau_{zx}}{1-D_{zx}} & \frac{\sigma_z}{1-D_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\sigma_y}{1-D_y} & \frac{\tau_{yz}}{1-D_{yz}} \\ \frac{\tau_{zy}}{1-D_{zy}} & \frac{\sigma_z}{1-D_z} \end{vmatrix} = \frac{\sigma_x \sigma_y}{(1-D_x)(1-D_y)} + \quad (14)$$

$$+ \frac{\sigma_x \sigma_z}{(1-D_x)(1-D_z)} + \frac{\sigma_y \sigma_z}{(1-D_y)(1-D_z)} - \frac{\tau_{xy}^2}{(1-D_{xy})^2} - \frac{\tau_{xz}^2}{(1-D_{xz})^2} - \frac{\tau_{yz}^2}{(1-D_{yz})^2}$$

Третій інваріант має вигляд

$$I_3(\tilde{\sigma}) = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_x}{1-D_x} & \frac{\tau_{xy}}{1-D_{xy}} & \frac{\tau_{xz}}{1-D_{xz}} \\ \frac{\tau_{yx}}{1-D_{yx}} & \frac{\sigma_y}{1-D_y} & \frac{\tau_{yz}}{1-D_{yz}} \\ \frac{\tau_{zx}}{1-D_{zx}} & \frac{\tau_{zy}}{1-D_{zy}} & \frac{\sigma_z}{1-D_z} \end{vmatrix} = \frac{\sigma_x \sigma_y \sigma_z}{(1-D_x)(1-D_y)(1-D_z)} + \quad (15)$$

$$+ \frac{2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}}{(1-D_{xy})(1-D_{yz})(1-D_{zx})} - \frac{\sigma_x \tau_{yz}^2}{(1-D_x)(1-D_{yz})^2} - \frac{\sigma_y \tau_{xz}^2}{(1-D_y)(1-D_{xz})^2} - \frac{\sigma_z \tau_{xy}^2}{(1-D_z)(1-D_{xy})^2}$$

**Розкладання тензора ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності на девіаторну і шарову частини.** Описуючи закономірності кінетики накопичення пошкоджуваності в конструкційних матеріалах при складному напруженому стані введемо поняття «середнього напруження» із врахуванням пошкоджуваності, яке дорівнює середньому арифметичному від нормальних напружень

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_x}{1-D_x} + \frac{\sigma_y}{1-D_y} + \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right). \quad (16)$$

Середнє напруження характеризує собою рівновісне розтягування-стискання і відповідає тільки за зміну об'єму. Якщо від компонентів тензора ефективних напружень відокремимо ті, які пов'язані тільки з об'ємною деформацією, то отримаємо компоненти напружень ( $\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_0, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ ), які мають відношення тільки до зміни форми. Таким чином, загальний випадок напруженого

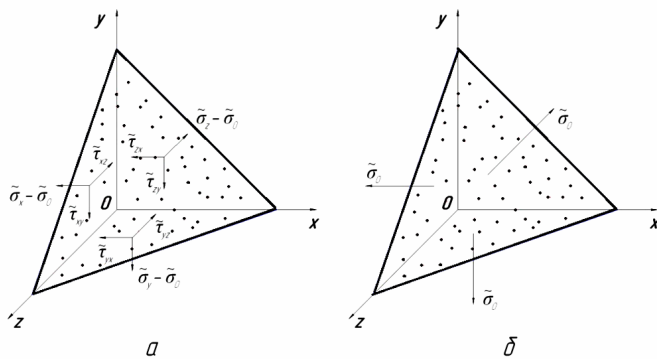


Рисунок 3. Розкладання тензора ефективних напружень з врахуванням пошкоджуваності на девіаторну (а) і шарову (б) частини

стану на довільно нахиленій площадці, з урахуванням пошкоджуваності, можна розглядати як напружений стан, пов'язаний лише зі зміною форми, на яку «накладене» гідростатичне розтягування-стискання (рис. 3).

Наведені міркування про можливість розкладання напруженого стану дозволяють

представити тензор ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності у вигляді двох складових:  $T(\tilde{\sigma}) = T^0(\tilde{\sigma}) + L(\tilde{\sigma})$ , де  $T^0(\tilde{\sigma})$  – сферичний тензор ефективних напружень, який характеризує зміну об’єму тіла без зміни його форми (рис. 3б)

$$T^0(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

$L(\tilde{\sigma})$  – девіатор ефективних напружень, який характеризує зміну форми тіла без зміни його об’єму (рис. 3а)

$$L(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) & \frac{\tau_{xy}}{1-D_{xy}} & \frac{\tau_{xz}}{1-D_{xz}} \\ \frac{\tau_{yx}}{1-D_{yx}} & \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) & \frac{\tau_{yz}}{1-D_{yz}} \\ \frac{\tau_{zx}}{1-D_{zx}} & \frac{\tau_{zy}}{1-D_{zy}} & \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_z}{1-D_z} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} \right) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Перший інваріант сферичного тензора ефективних напружень співпадає з першим інваріантом тензора ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності

$$I_1^0(\tilde{\sigma}) = 3\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_x}{1-D_x} + \frac{\sigma_y}{1-D_y} + \frac{\sigma_z}{1-D_z} = I_1(\tilde{\sigma}). \quad (19)$$

Перший інваріант девіатора ефективних напружень за властивістю дорівнює нулю.

$$I_1'(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_z}{1-D_z} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} \right) = 0. \quad (20)$$

Очевидно, що при напруженому стані, який описується девіатором, середнє напруження дорівнює нулю, тобто складова об’ємного ефективного напруження не змінюється.

Другий і третій інваріанти сферичного тензора ефективних напружень та девіатора ефективних напружень відповідно дорівнюють:

$$I_2^0(\tilde{\sigma}) = 3\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_x}{1-D_x} + \frac{\sigma_y}{1-D_y} + \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right)^2 = \frac{1}{3} I_1^2(\tilde{\sigma}) \quad (21)$$

$$I_3^0(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}_0^3 = \frac{1}{27} \left( \frac{\sigma_x}{1-D_x} + \frac{\sigma_y}{1-D_y} + \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right)^3 = \frac{1}{27} I_1^3(\tilde{\sigma}) \quad (22)$$

$$I'_2(\tilde{\sigma}) = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) & \frac{\tau_{xy}}{1-D_{xy}} \\ \frac{\tau_{yx}}{1-D_{yx}} & \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) & \frac{\tau_{xz}}{1-D_{xz}} \\ \frac{\tau_{zx}}{1-D_{zx}} & \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_z}{1-D_z} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} \right) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) & \frac{\tau_{yz}}{1-D_{yz}} \\ \frac{\tau_{zy}}{1-D_{zy}} & \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_z}{1-D_z} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} \right) \end{array} \right| \quad (23)$$

$$I'_3(\tilde{\sigma}) = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) & \frac{\tau_{xy}}{1-D_{xy}} & \frac{\tau_{xz}}{1-D_{xz}} \\ \frac{\tau_{yx}}{1-D_{yx}} & \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_y}{1-D_y} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_z}{1-D_z} \right) & \frac{\tau_{yz}}{1-D_{yz}} \\ \frac{\tau_{zx}}{1-D_{zx}} & \frac{\tau_{zy}}{1-D_{zy}} & \frac{1}{3} \left( \frac{2\sigma_z}{1-D_z} - \frac{\sigma_x}{1-D_x} - \frac{\sigma_y}{1-D_y} \right) \end{array} \right| \quad (24)$$

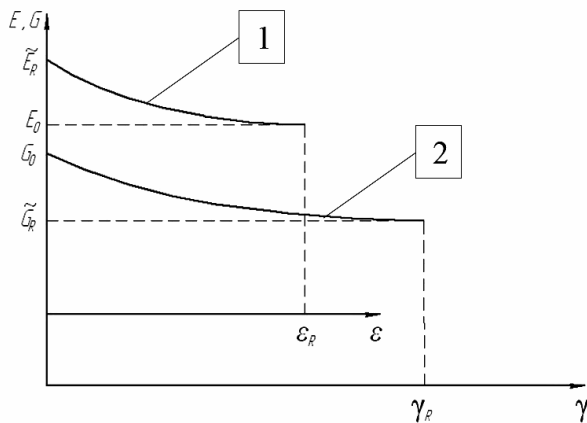


Рисунок 4. Зміна модулів пружності  $\tilde{E}_i$ , та  $\tilde{G}_{ij}$  від відносної пластичної деформації  $\epsilon_i$  при осьовому навантаженні та від величини відносного кута  $\gamma_{ij}$  при крученні відповідно

**Трансформація тензора ефективних напружень фізико-механічними властивостями конструкційних матеріалів.** У роботі [7, 8] розглянуто співвідношення для оцінювання кінетики накопичення пошкоджень при осьовому навантаженні та зсуві (крученні) через зміну модулів пружності при пружно-пластичному деформуванні, які виражаються формулами

$$D_i = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{E}_i}{E_0}}, \quad D_{ij} = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{G}_{ij}}{G_0}}, \quad (25)$$

де  $E_0, G_0$  та  $\tilde{E}_i, \tilde{G}_{ij}$  – початковий та поточний модулі пружності

матеріалу при осьовому навантаженні та зсуві (крученні) відповідно.

На рисунку 4 наведено узагальнені криві зміни модуля пружності при пружно-пластичному осьовому навантаженні (крива 1) та зсуві (крученні) (крива 2) від відносної пластичної деформації, які описуються рівняннями:

$$\tilde{E}_i = E_0 \left[ 1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_R} \right)^\alpha \right] \quad \tilde{G}_{ij} = G_0 \left[ 1 - \varphi_\tau \left( \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_R} \right)^\beta \right], \quad (26)$$

де  $\varphi_\sigma = \frac{E_0 - \tilde{E}_R}{E_0}$   $\varphi_\tau = \frac{G_0 - \tilde{G}_R}{G_0}$  – параметр зміни модуля пружності  $E$ ,  $G$  від

початкового значення  $E_0$ ,  $G_0$  до кінцевої величини  $E_R$ ,  $G_R$ , яка визначається при пружно-пластичному навантаженні на межі міцності конструкційного матеріалу;

$\varepsilon_R$ ,  $\gamma_R$  – відносна величина пружно-пластичної деформації на межі міцності матеріалу, яка відповідає модулю пружності  $E_R$ ,  $G_R$ ;

$\varepsilon_i$ ,  $\gamma_{ij}$  – поточна величина відносної пружно-пластичної деформації;

$\alpha, \beta$  – параметр пластичності конструкційного матеріалу.

Підставляючи рівняння (27) в (26), отримуємо кінетику накопичення пошкоджуваності  $D$  при осьовому навантаженні та зсуві (крученні) відповідно

$$D_i = 1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} \quad D_{ij} = 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_R} \right)^\beta} \quad (27)$$

**Інтенсивність ефективних напружень при пропорційному пружно-пластичному деформуванні.** В ході дослідження були проведені експериментальні випробування на пропорційне навантаження зразків зі сталі 07X16H6. Дослідження проводилися на автоматизованій експериментальній установці УМЕ-10 ТМ. Дані знімалися з датчиків осьового зусилля розтягу, моменту, осьової поздовжньої деформації, кута закручування, поперечної деформації та значень електричного опору робочої зони зразка. За отриманими даними було розраховано значення інтенсивності ефективних напружень за запропонованим тензором ефективних напружень та порівняння його значень з іншими розрахунками.

При пропорційному навантаженні на довільно нахилену площадку діють осьове ефективне напруження та зсувні ефективні напруження в площині ( $xy$ ), перпендикулярній напрямку осьового навантаження (вісь  $z$ ). При цьому напруження в усіх інших напрямках дорівнюють нулю

$$\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_y = \tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_{zx} = \tilde{\tau}_{yz} = \tilde{\tau}_{zy} = 0. \quad (28)$$

У цьому випадку тензор ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності при пропорційному навантаженні запишеться у вигляді

$$T(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau_{xy}}{1 - D_{xy}} & 0 \\ \frac{\tau_{yx}}{1 - D_{yx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_z}{1 - D_z} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Для випадку пропорційного пружно-пластичного деформування сталі 07X16H6 були розраховані компоненти тензора ефективних напружень.

За отриманими компонентами тензорів ефективних напружень була розрахована інтенсивність ефективних напружень (30) та порівняна з інтенсивністю дійсних напружень залежно від інтенсивності деформацій (31)

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y)^2 + (\tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_z)^2 + (\tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_x)^2 + 6(\tilde{\tau}_{xy}^2 + \tilde{\tau}_{yz}^2 + \tilde{\tau}_{zx}^2)} \quad (30)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (31)$$

Для випадку пропорційного пружно-пластичного деформування формули інтенсивності ефективних напружень (30) та інтенсивності деформацій (31) мають вигляд

$$\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_z^2 + 3\tilde{\tau}_{xy}^2} \quad (32)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2\varepsilon_z^2 + 6\gamma_{xy}^2} \quad (33)$$

Для сталі 07X16H6 на рис. 4 наведено графік порівняння кривої інтенсивності ефективних напружень, розрахованої через компоненти тензора ефективних напружень (30) за рівнянням (32), кривої інтенсивності ефективних напружень, розрахованої з урахуванням пошкоджуваності від зміни електричного опору та кривої інтенсивності дійсних напружень залежно від значення інтенсивності деформацій, розрахованої за рівнянням (33). Крива 1 – інтенсивність ефективних напружень, розрахована через запропонований тензор ефективних напружень (30); крива 2 – інтенсивність ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності через зміну питомого електричного опору робочої зони зразка; крива 3 – інтенсивність дійсних напружень.

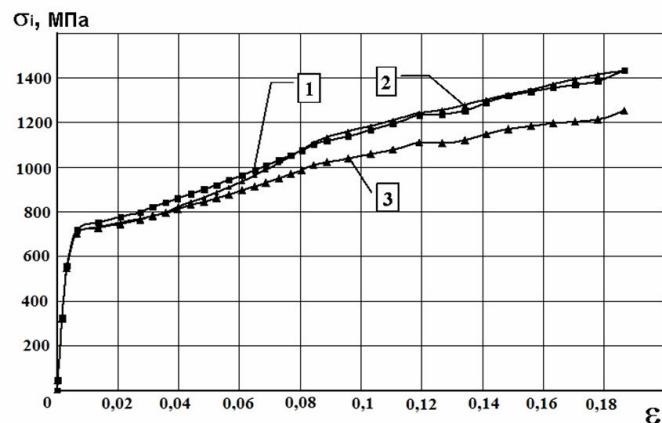


Рисунок 5. Порівняння значень інтенсивності ефективних напружень для сталі 07X16H6

Як бачимо з графіка значення інтенсивності ефективних напружень, розрахованої з урахуванням запропонованого в ході дослідження тензора ефективних напружень з урахуванням пошкоджуваності, лежить найближче до еталонного значення інтенсивності ефективних напружень, розрахованої з урахуванням пошкоджуваності через зміну питомого електричного опору.

Середня похибка розрахунку інтенсивності ефективних напружень через зміну питомого електричного опору та з урахуванням запропонованого тензора ефективних напружень при пропорційному пружно-пластичному деформуванні становить близько 2 %.

**Висновки:** В загальному вигляді складного навантаження конструкційні матеріали змінюють свої фізико-механічні властивості, що призводить до розпушення матеріалу. Отримано тензор ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності для об'ємного напруженого стану на довільно нахилений площадці. Знайдено перший, другий та третій інваріанти тензора ефективних напружень із врахуванням пошкоджуваності. Розкладено тензор ефективних напружень на девіаторну і шарову частини та знайдено інваріанти для них відповідно. Розраховано й проведено



порівняння інтенсивності ефективних напружень при пропорційному пружно-пластичному деформуванні зразка сталі 07Х16Н6, визначеної через компоненти тензора ефективних напружень, із врахуванням пошкоджуваності від зміни електричного опору та залежно від значення інтенсивності деформацій. Встановлено, що середня похибка розрахунку еталонного значення інтенсивності ефективних напружень та значення інтенсивності від запропонованого тензора становить близько 2%.

#### **Література**

1. Качанов, Л.М. Основы механики разрушения [Текст] / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
2. Работнов, Ю.Н. Введение в механику разрушения [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1987. – 80с.
3. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 732с.
4. Фридман, Я.Б. Механические свойства металлов: в 2 ч.: Деформация и разрушение [Текст] / Я.Б. Фридман. – М.:Машиностроение, 1974. – Ч.1. – 472 с.
5. Lemaitre, J. Damage mechanics – The Bath Press, Great Britain. – 1990. – 556 p.
6. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. – М., Издательство «Наука», 1988. – 548 с.
7. Бобир, М.І. Моделі накопичення пошкоджень та руйнування при складному навантаженні [Текст] / М.І. Бобир, А.П. Грабовський // Вестник НТУУ „КПІ”, Машиностроение. – 2003. – №44. – С. 15–18.
8. Дослідження кінетики пошкоджуваності в конструкційних матеріалах при складному напруженому стані [Текст] / А.П. Грабовський, О.В. Тимошенко, О.М. Масло, О.П. Халімон // Вестник НТУУ «КПІ», Машиностроение. – 2003. – №44. – С. 43–47.