УДК 536.2

Бартош Т. – ст. гр. КА-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ НАПІВБЕЗМЕЖНОГО СТЕРЖНЯ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Шелестовський Б.Г.

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \ge 0, \qquad t \ge 0, \tag{1}$$

з граничними умовами

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = q(t). \tag{2}$$

Нехай $U(x,p)$ зображення Лапласа $u(x,t)$, і операторне рівняння має вигляд

$$pU(x,p) = a^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} \tag{3}$$

$$U(0,p) = Q(p) \to q(t). \tag{4}$$

$$U(x,p) = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

Так як $U(x,p)$ обмежена при $x \to \infty$, то $C_1 = 0$.

$$U(0,p) = Q(p) = C_2$$

$$U(x,p) = Q(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} = pQ(p) \cdot \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} \to 1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = Erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

та інтеграл Дюамеля, одержимо

$$u(x,t) = q(t) Erf(\infty) + \int_0^t \left[Erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)\right]'_\tau q(t-\tau)\, d\tau,$$

$$Erf(\infty) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = 0$$

$$\left[Erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)\right]'_\tau = \sqrt{\pi} \frac{x}{2a} \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}.$$

Остаточно маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$$