УДК 517.9

Яценик О. - ст. гр. КТ-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРИ В ЦИЛІНДРІ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Самборська О.М.

Yatsenyk O.

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

STATIONARY TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A CYLINDER

Supervisor: Samborska O.

Ключові слова: рівняння Лапласа, циліндричні координати, функції Бесселя.
Key words: Laplace's equation, cylindrikal coordinates, Bessel functions.

Розглядається циліндр з радіусом основи R та висотою h. На нижній основі та бічній поверхні циліндра температура дорівнює нулю, а на верхній основі температура є деякою функцією $f(r)$, де r - відстань від будь-якої точки цієї основи до її центра. Потрібно знайти стаціонарний розподіл температури всередині циліндра.

Задачу розв'яжемо в циліндричній системі координат r, φ, z. Оскільки температура в будь-якій точці не залежить від кута φ, то позначимо її $u(r,z)$. Функція $u(r,z)$ повинна задовольняти рівняння Лапласса

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

та крайові умови $u(r,0)=0, u(R,z)=0,$ (2) $u(r,h)=f(r)=\mathrm{A}\left(1-r^2R^{-2}\right),\ \mathrm{A}=const$. (3)

Розв'язок задачі шукаємо методом Фур'є: $u(r,z)=F(r)Z(z)$. (4)

Для функцій $F(r)$ та Z (z) отримаємо рівняння:

$$F''(r)+\frac{1}{r}F'(r)+\lambda^2F(r)=0, \quad (5) \qquad Z''(z)-\lambda^2 Z(z)=0. \quad (6)$$

Рівняння (5) заміною $\lambda r = t$ зводиться до рівняння Бесселя, для якого $\nu = 0$. Оскільки розв'язок $F(r)$ рівняння (5) повинен бути скінченним при $r=0$ і задовольняти умову $F(R)=0$, то отримаємо:

$$F_n(r)=C_nJ_0\left(\mu_n rR^{-1}\right), \qquad (7)$$

де μ_n (n=1, 2, 3,$\cdots$) - додатні корені функції Бесселя першого роду нульового порядку.

Загальний розв'язок рівняння (6) можна записати у вигляді: $Z(z)=Dch\lambda z+\mathrm{E}sh\lambda z$. (8)

Множина розв'язків $u_n(r,z)$, які задовольняють рівняння (1) та крайові умови (2), має вигляд : $u_n(r,z)=\mathrm{B}_n sh(\mu_n zR^{-1})J_0(\mu_n rR^{-1})$. (9)

Розв'язок задачі (1), (2), (3) шукаємо у вигляді ряду Фур'є: $u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(r,z)$. (10)

Задовольнивши крайову умову (3), знайдемо невідомі коефіцієнти B_n для випадку

$$f(r)=\mathrm{A}\left(1-r^2R^{-2}\right).$$