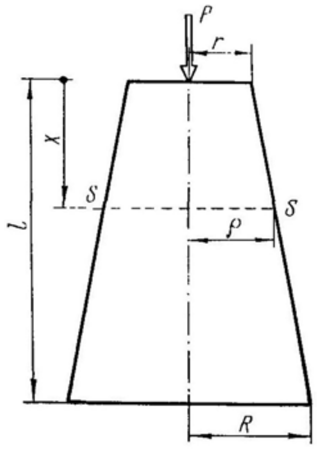
УДК 539.3

Харчук Ю. – ст. гр. МБ-12

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Габрусєв Г. В.



Розглянемо задачу про стиснення зрізаного конуса довжини l повздовжньою силою P. Нижня основа стержня жорстко закріплена, а її радіус $R = 2r$ (r – радіус верхньої основи). Знайдемо рівняння повздовжнього згину конуса, а також критичну силу. Початкові умови задачі мають вигляд:

$$\text{при } x = 0,\ y = 0; \text{ при } x = l,\ \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1)$$

Запишемо диференціальне рівняння пружної лінії:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Py. \quad (2)$$

Для довільного перерізу $s - s$ радіуса ρ матимемо: $\frac{\rho - r}{\rho - R} = \frac{x}{l}$, $\rho = r + \frac{r\beta}{l}x$, $\beta = \frac{R - r}{r}$, отже момент інерції $J = J_0\left(1 + \frac{\beta x}{l}\right)^4$, де $J_0 = \frac{\pi r^4}{4}$ – момент інерції верхньої основи. Врахувавши початкові умови (1), із (2), матимемо:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 + \frac{\beta x}{l}\right)^{-4} Py = 0. \quad (3)$$

Після заміни $1 + \frac{\beta x}{l} = -\frac{1}{t}$, $y = \frac{z}{\sqrt{t}}$ із рівняння (3), отримаємо:

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + \left(\alpha^2 t^2 - \frac{1}{4}\right)z = 0, \text{ де } \alpha^2 = \frac{Pl^2}{EJ_0\beta^2}. \quad (4)$$

Рівняння (4) є рівнянням Бесселя, а його загальний розв'язок матиме вигляд:

$$z = C_1 J_{1/2}(\alpha t) + C_2 J_{-1/2}(\alpha t) \text{ або } z = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha t}}\left(C_1 \sin(\alpha t) + C_2 \cos(\alpha t)\right), \quad (5)$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі, а $J_{-1/2}(\alpha t)$ та $J_{1/2}(\alpha t)$ – функції Бесселя першого роду половинного аргументу. Повернувшись до змінних x та y і використавши першу умову (1), отримаємо:

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}\frac{l + \beta x}{l\cos\alpha}} \cdot C_1 \sin\frac{\alpha\beta x}{l + \beta x}. \quad (6)$$

Використавши другу умову (1), друге співвідношення (4) та продиференціювавши вираз (6), одержуємо рівняння для визначення параметра α, а отже і критичної сили:

$$tg\frac{\alpha\beta}{1 + \beta} = \frac{\alpha}{1 + \beta},\ \mathrm{P}_{кр} = \frac{\alpha^2 EJ_0\beta^2}{l^2}. \quad (7)$$

Оскільки $R = 2r$ то $\beta = 1$, отже із (7): $\alpha \approx 4.06$, $\mathrm{P}_{кр} \approx \frac{17.08EJ_0}{l^2}$.