УДК 519.217

Цветинович Д. – ст. гр. КТ-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ФРАКТАЛИ КОМПЛЕКСНИХ НЬЮТОНОВИХ МЕЖ

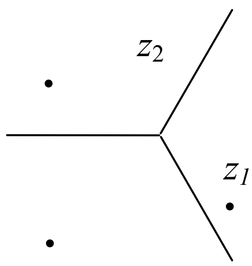
Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

Алгоритм Ньютона для наближеного знаходження коренів рівняння $f(z)$ в комплексній області є прикладом появи фрактальних меж між областями притягання. Аналогічно, як і для функцій дійсної змінної, для функцій комплексної змінної наближене значення кореня рівняння $f(z)=0$ знаходяться за допомогою ітераційного алгоритму $z_{n+1}=z_n-f(z_n)(f'(z_n))^{-1}$.

Використовуючи цей ітераційний процес, почавши в безпосередній близькості від кореня рівняння, отримаємо послідовність комплексних чисел, які швидко збігаються до нього. Не однозначний результат ми отримаємо, якщо початкова точка z_0 вибрана на комплексній площині випадково.

Для рівняння другого степеня $z^2-1=0$ по ітераційному алгоритму $z_{n+1}=0{,}5(z_n^2+1)(z_n)^{-1}$, як показав у 1977 р. Дж. Хаббард, послідовність комплексних чисел досить швидко буде збігатися до найближчого кореня. Виключенням є випадки, коли початкова точка рівновіддалена від коренів, тобто знаходяться на серединному перпендикулярі відрізка, який з'єднує два корені. В цьому випадку послідовність ітерацій залишається на даній прямій, здійснюючи хаотичний рух.

Якщо ж розглянути найпростіше рівняння третього степеня $z^3-1=0$, яке має один дійсний корінь $z_1=1$ і два комплексно-спряжені: $z_2=0{,}5+i0{,}5\sqrt{3}$ і $z_2=0{,}5-i0{,}5\sqrt{3}$. Вони утворюють рівносторонній трикутник. Ці корені є нерухомими точками (атракторами) відображення, яке описується ітераційним алгоритмом для функції $f(z)=z^3-1$: $z_{n+1}=\dfrac{2z_n^3+1}{3z_n^2}$. Беручи $z=x+iy$ і розділяючи дійсну і уявну частини, можна перейти до двовимірного дійсного відображення:



$$x_{n+1}-\frac{2}{3}x_n+\frac{x_n^2-y_n^2}{3(x_n^2+y_n^2)^2}\ ,\ \ y_{n+1}-\frac{2}{3}y_n\left(1-\frac{x_n}{(x_n^2+y_n^2)^2}\right).$$

Стартувавши в безпосередній близькості від кожного кореня, ми отримуємо методом Ньютона збіжні до атракторів послідовності чисел. Геометрія меж областей притягання має складну форму.

Якщо розфарбувати різні області притягання різними кольорами, то на екрані монітора буде видно, що межі областей притягання складаються із переплетених само подібних (фрактальних) структур. На межі між будь-якими двома кольорами розміщується гірлянда острівців третього кольору. Межі цих острівців, у свою чергу, складаються із гірлянд острівців меншого розміру, відповідного доповнюю чого кольору і т.д. таким чином, кожна точка такої фрактальної межі одночасно є суміжною з трьома областями притягання.