УДК 519.217

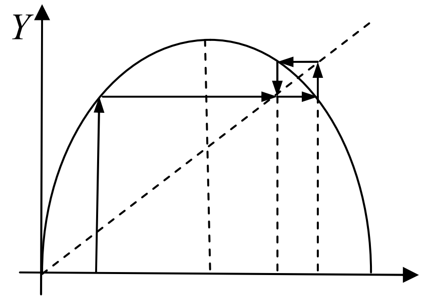
Сало У. – ст. гр. КТ-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

БІФУРКАЦІЇ ТИПУ ВИЛКИ НА ЛОГІСТИЧНІЙ ПАРАБОЛІ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

В процесі екологічного, економічного або іншого росту деяка величина x_{n+1} для наступного покоління (наприклад, популяції тварин) є лінійною функцією від теперішнього значення цієї величини x_n: $x_{n+1} = rx_n$, де $r > 0$ – параметр зростання. Неконтрольоване зростання підлягає експоненціальному закону: $x_n = r^n x_0$. Якщо ж на зростання накладається обмежена кількість ресурсів, то отримуємо обмежене зростання: із збільшенням x_n зменшується r. Зменшення фактора зростання моделюється заміною r на $r(1-x_n)$. Тоді при $x_n \to 1$ параметр r прямує до 0 і ми отримуємо закон росту $x_{n+1} = f(x_n) = r(1-x_n)x_n$, який називається квадратичним відображенням, або логістичною параболою. Це є одновимірна дискретна динамічна система – відображення T. Квадратичне відображення має дві нерухомі точки $x = 0$ і (при $r > 1$) $x = x^* = 1 - r^{-1}$.



Похідна $f'(x) = r(1-2x)$ в нерухомих точках дорівнює: r при $x = 0$ і $2 - r$ при $x^* = 1 - r^{-1}$. Ці точки є стійкими при $|f'(x)| < 1$. Нерухома точка $x = 0$ стійка при $0 < r < 1$, а точка $x^* = 1 - r^{-1}$ – в діапазоні $1 < r < 3$ ($|f'(x = 1 - r^{-1})| < 1$). Для біологічної моделі росту популяції важливим є, що при $1 < r < 3$ наявний стійкий розв'язок. При $r = 2$ похідна дорівнює нулю в нерухомій точці $f'(x^* = 0{,}5) = 0$. Такі точки називаються надстійкими через дуже швидку до них збіжність. При $r = 3$ кутовий коефіцієнт до параболи в нерухомій точці $x^* = 2/3$ дорівнює -1. Це нейтральна нерухома точка, яка не притягує і не відштовхує сусідні точки. Якщо ж $r > 3$, то нерухома точка стає нестійкою і розщеплюється на дві (створює біфуркацію) із надстійкою орбітою періодом 2 (при $r = 3{,}236$ надстійка орбіта: $0{,}5 \to 0.809... \to 0{,}5$ і т.д.) Такі точки знаходять із умови $x = T(Tx) = T^2 x$ ($x = f(f(x)) = f^{(2)}(x)$), або з рівняння $r^2(1-x)(1-rx(1-x)) = 1$. При дальшому збільшенні r обидві нерухомі точки функції $f^{(2)}(x)$ стають нестійкими, причому втрачають свою стійкість при одному і тому ж значенні r. Нерухомі точки створюють біфуркацію, породжуючи орбіту із довжиною періоду 4. Відображення $f^{(4)}(x)$ має чотири нерухомих точки, які утворюють надстійку орбіту: $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$ і т.д. При $r = 3{,}498...$ цими чотирма точками є: $x_0 = 0{,}500$; $x_1 = 0{,}874...$; $x_2 = 0{,}383...$; $x_3 = 0{,}827...$. Це біфуркації типу вилки, які повторюються в міру росту r, породжуючи орбіти періоду 16, 32, 64 і т.д., аж до цього часу, коли каскад подвоєнь періоду завершується «хаотичною» орбітою з нескінченно довгим періодом при $r = 3{,}5699...$.