2. УДК 517.944

Л. Фурсевич
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ДЕЯКІ СПЕЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ЗАТУХАЮЧОЮ ПАМ'ЯТТЮ

Розглядається лінійне функціональне рівняння

$$\mathfrak{M}_u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f(t,x), \qquad (1)$$

де ε, λ - задані нескінченно диференційовні на $t \in [0,\infty)$ функції (ядра релаксації), f - задана функція своїх аргументів, $x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3$, t - час, який може використовуватись для математичного описання деяких еволюційних процесів у спадкових середовищах. Ціллю даної роботи є описання деяких спеціальних властивостей розв'язку цього рівняння.

Специфіка часової залежності у розглядуваному рівнянні не дозволяє відокремити змінні в класичному розумінні. Застосування інтегральних перетворень дозволяє здійснити послідовну процедуру відокремлення і звести рівняння до алгебраїчного. З одного боку, перетворенням Лапласа по t можна звести (1) до еліптичного рівняння

$$-\nabla^2 \hat{u} + p\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\lambda}}\hat{u} = \frac{1}{p\hat{\lambda}}\left(\hat{f}(x,p) + \varepsilon_\infty u_0(x)\right), \qquad (2)$$

p - параметр перетворення, $\varepsilon_\infty = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t)$, $\quad \hat{\varphi}(t) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt \equiv \mathrm{Z}\left[\varphi(t)\right]$.

З другого – в припущенні про спадання u при $|x| \to \infty$ швидше довільного степення $|x|^{-1}$ застосування до (1) перетворення Фур'є зводить його до звичайного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + |\xi|^2\tilde{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\tilde{u}}{dt} + |\xi|^2\left(\dot{\lambda} * \tilde{u}\right) = \tilde{f}\left(|\xi|;t\right), \qquad (3)$$

де $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$, $\quad (x,\xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_{3,}$ $\quad \tilde{\varphi}(|\xi|) = \int\limits_{E^3} e^{t(x,\xi)}\varphi(x)\,dx \equiv F\left[\varphi(x)\right]$.

Ці висновки дозволяють стверджувати, що узагальнена функція $G(x,t)$ є фундаментальним розв'язком оператора $\mathfrak{M}$ тоді і тільки тоді, коли її трансформанта Фур'є-Лапласа задовольняє алгебраїчне рівняння

$$\mathfrak{M}(-i\xi, p)F\mathrm{Z}\left[G(x,t)\right] = 1. \qquad (4)$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок описує процес із скінченною швидкістю розповсюдження збурень, для цього використовується гіперболічне рівняння, або нелінійне рівняння теплопровідності в якому коефіцієнт теплопровідності є степеневою функцією температури.