УДК 517.9

Л. Фурсевич
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Розв’язки істотно неоднорідних крайових задач, одержані за допомогою звичайних інтегральних перетворень, збігаються у метриці простору $L_2(\Omega)$ до точного розв’язку лише строго у внутрішніх точках області Ω. Поблизу границі і на границі Γ збіжність розв’язку нерівномірна. Для одержання задовільного результату потрібні додаткові дослідження. З метою усунення труднощів, які виникають при розв’язанні неоднорідних задач методом інтегральних перетворень та розширенням конструктивних можливостей цього методу на інші класи нестаціонарних задач використовується новий клас інтегральних перетворень на основі спектральних задач з параметром у граничних умовах. Цей метод дозволяє одержувати розв’язки неоднорідних задач, які збігаються до точного розв’язку як всередині області Ω, так і на її границі Γ, коротко він має назву „інтегральні $\Omega\,\Gamma$ – перетворення ”.

Нехай $g(x)=0$, а задані граничні умови у спектральній задачі для рівняння

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left[\lambda-g(x)\right]\psi=0 \qquad \left(x\in(0,1)\right) \tag{1}$$

мають вигляд:

$$\lambda\frac{d\psi}{dx}=\psi,\quad x=0; \qquad -\lambda\frac{d\psi}{dx}=\psi,\quad x=1,$$

тоді функції $\varphi(x,\lambda)$ і $\chi(x,\lambda)$ повинні задовольняти умови

$$\varphi(0,\lambda)=\lambda,\ \varphi'(0,\lambda)=1; \qquad \chi(1,\lambda)=\lambda,\ \chi'(1,\lambda)=-1.$$

Отже, $\varphi(x,\lambda)=\sin\sqrt{\lambda}x+\lambda^{3/2}\cos\sqrt{\lambda}x$;

$\chi(x,\lambda)=\sin\sqrt{\lambda}(1-x)+\lambda^{3/2}\cos\sqrt{\lambda}(1-x)$; $\qquad \omega(\lambda)=\left(\lambda^3-1\right)\lambda^{1/2}\sin\sqrt{\lambda}-2\lambda^2\cos\sqrt{\lambda}$.

Власні значення λ_n є коренями рівняння $2\lambda^{3/2}\cos\sqrt{\lambda}=\left(\lambda^3-1\right)\sin\sqrt{\lambda}$.

Таким чином, розклад функції $f(x)$, визначеної на інтервалі $[0;1]$, має вигляд:

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x+\lambda_n^{3/2}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n^3+6\lambda_n+1}\cdot\left[\int_0^1 f(\xi)\left(\sin\sqrt{\lambda_n}\xi+\lambda_n^{3/2}\cos\sqrt{\lambda_n}\xi\right)d\xi+\right.$$
$$\left.+f'(0)\sqrt{\lambda_n}-f'(1)\left(\lambda_n^{1/2}\cos\sqrt{\lambda_n}-\lambda_n^2\sin\sqrt{\lambda_n}\right)\right].$$

Для практичного використання складено таблиці, в яких зведені всі можливі комбінації граничних умов для регулярного одновимірного випадку та наведені формули прямих перетворень для довільних функцій $f(x)$, заданих на інтервалі $[0;1]$, а також ядра і характеристичні рівняння для знаходження власних значень спектральної задачі.

Формула перетворення у всіх наведених випадках має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n\varphi(x,\lambda_n)}{\left\|\varphi(x,\lambda_n)\right\|_{L^2}^2}.$$