

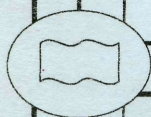
620.10 (07)

М 48

Тернопільський державний технічний
університет імені Івана Пулюя

О. В. МИЛЬНИКОВ

**ОПТИКА
МАТЕРІАЛІВ**



Навчально-методичний посібник

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільський державний технічний університет
імені Івана Пулюя

*Кафедра технічної механіки
та сільськогосподарського
машинобудування*

О.В. Мильніков

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчально-методичний посібник

Тернопіль
2005

УДК 620.10(075.8)

Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТДТУ, 2005.
– 247с.

Навчально-методичний посібник видано у відповідності з Освітньо-професійною програмою вищої освіти, затвердженою Міністерством освіти і науки України 1.09.97р., з навчальним планом і матеріалами літературних джерел, наведених у списку посилань.

Розглянуто і схвалено кафедрою технічної механіки та сільськогосподарського машинобудування, методичною комісією механіко-технологічного факультету.

Рецензенти: **Макара В.А.**, професор, директор навчально-наукового центру „Фізико-хімічне матеріалознавство” Київського національного університету імені Тараса Шевченка та Національної академії наук України, член-кор. НАН України;
Підгурський М.І., кандидат технічних наук, доцент.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя.

О.В. Мильніков, 2005 р.

Видавництво ТДТУ імені Івана Пулюя

Передмова.

Посібник написано на основі положень Освітньо-професійної програми вищої освіти, затвердженої Міністерством освіти України 1.09.97р., та лекцій з курсу „Опір матеріалів”, які автор читає протягом 30 років для студентів механічних спеціальностей у Тернопільському державному технічному університеті імені Івана Пулюя.

Серед кращих підручників з опору матеріалів, написаних у різні роки видатними науковими діячами, слід відзначити розробки С.П.Тимошенка, М.М. Беляєва, В.І. Феодосьєва. Гарним підручником, написаним з урахуванням сучасних досягнень механіки деформівного твердого тіла й до того ж прекрасно оформленим є, на погляд автора, „Сопротивление материалов”, написаний колективом учених під редакцією академіка АН УРСР Г.С. Писаренка.

На жаль, з відомих україномовних підручників, автор у позитивному плані може відзначити тільки підручник С.Л. Посацького.

Мабуть не випадковим явищем є значна кількість посібників – складних і простих, математизованих і не дуже, з урахуванням вузької інженерної спеціалізації та загального плану, саме з опору матеріалів. Так чи інакше інженери різних профілів (та й не тільки інженери) стикаються у житті з практичною необхідністю оцінювати та забезпечувати міцність, жорсткість і стійкість конструкцій різних ступенів складності.

Викладач, що працює з певним контингентом студентів, змушений доводити майбутнім інженерам загально й давно відомі істини, перетворюючи їх кожного разу так, щоб конкретна студентська аудиторія певного інженерного спрямування, певного рівня загального розвитку й математичної підготовки змогла б їх сприйняти. Це і є основним мотивом створення цього навчально-методичного посібника, який може бути використаний як студентами механічних спеціальностей ТДТУ імені Івана Пулюя, так і всіма тими, хто вивчає опір матеріалів.

Навчально-методичний посібник містить, в основному, тільки лекційний матеріал, не включаючи в себе приклади розв’язку конкретних задач, зокрема індивідуальних розрахунково графічних завдань, а також матеріалів, що стосуються лабораторного практикуму. Це зумовлено, по-перше, тим, щоб не перевантажувати об’єм посібника, а, по-друге, тому, що ці питання, їх важливість, складність і актуальність вимагають відображення в окремій навчально-методичній літературі.

Слід відзначити, що автор, не мавший нагоди особисто і безпосередньо займатись багатьма питаннями механіки деформівного твердого тіла, зокрема питаннями розрахунку кривих стержнів, дослідженнями в галузі знакозмінних напружень, коливань і деяких інших прикладних проблем, в основному опирався при написанні посібника на такі поважні джерела, як підручник „Сопротивление материалов” М.М. Беляєва та „Сопротивление материалов”, написаний колективом авторів на чолі з Г.С. Писаренко.

Необхідність цього кроку вмотивована спробою стисло і зрозуміло викласти той матеріал, який можна донести до студентів у сучасних скорочених за часом курсах з опору матеріалів.

Автор висловлює подяку співробітникам кафедри технічної механіки та сільськогосподарського машинобудування ТДТУ імені Івана Пулюя за допомогу у підготовці цієї роботи. Особливу подяку автор висловлює кандидату технічних наук, доценту Підгурському М.І. та кандидату фіз.-мат. наук, доценту кафедри механіки суцільних середовищ Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка Кепічу Т.Ю., які взяли на себе важку працю по рецензуванню посібника.

1. Основні поняття

1.1. Предмет опору матеріалів

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій, деталей машин та приладів.

Що ж таке міцність, жорсткість та стійкість?

Чому саме інженерні методи розрахунку? Що слід розуміти під терміном *конструкція*?

Міцність – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, **не руйнуючись**.

Жорсткість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, якомога менше деформуючись.

Стойкість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, зберігаючи **первісну форму пружної рівноваги**.

Як бачимо, опір матеріалів вивчає поведінку тіл у полі зовнішніх сил. Але ж цим займається і теоретична механіка. Чим тоді відрізняються курси опору матеріалів та теоретичної механіки?

Якщо в теоретичній механіці всі тіла вважають абсолютно твердими і розглядають закономірності руху цих тіл, то в задачах опору матеріалів усі тіла вважають твердими, але здатними до деформацій і розглядають процеси, пов'язані з цими деформаціями, а рух цих тіл цікавить тільки з точки зору утворення додаткових сил (наприклад, сил інерції).

Під терміном „*конструкція*” будемо розуміти сукупність елементів (*тіл*), які функціонально пов'язані між собою та виконують певне технічне завдання. *Тіло*, в свою чергу, теж може виступати в ролі конструкції, якщо, наприклад, у постановці задачі потрібно враховувати неоднорідну побудову (композитні матеріали).

Опір матеріалів є наукою *інженерних* методів розрахунку саме тому, що постановка задач передбачає рівень абстрагування та спрощення таким, щоб інженер-практик міг розв'язати ці задачі, використовуючи доступний для нього математичний апарат.

Таким чином, опір матеріалів – це загальна наука про міцність і надійність конструкцій та їх елементів. Ці ж питання вивчають й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, яка в більшості розглядає закономірності, пов'язані зі створенням цілих систем стержнів, функціонально зв'язаних між собою; математична теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості, реологія та ін. Але ці науки використовують більш розвинений апарат математики.

При вирішенні основної задачі опору матеріалів – вибору матеріалу й поперечних розмірів для елементів споруд і машин, крім уміння обчислювати напруження, необхідне знання механічних властивостей реальних матеріалів. Це зумовлює необхідність лабораторних експериментальних досліджень. Глибокі знання про міцність матеріалів, що використовуються, і не менш глибоке і чітке уявлення про розподіл напружень в елементах конструкцій – ось що повинен дати курс опору матеріалів інженеру, аби достатньо озброїти його для вирішення практичних задач.

1.2. Задачі опору матеріалів

При проектуванні конструкцій і машин інженеру доводиться вибирати матеріал і поперечні розміри для кожного елемента конструкції так, щоб він надійно, без ризику руйнуватися або спотворити свою форму, *чинив опір* дії зовнішніх сил, які передаються на нього від сусідніх частин конструкції, тобто, щоб була забезпечена нормальна робота

цього елемента. Підстави для правильного вирішення цієї задачі дає інженеру наука про *опір матеріалів*.

Опір матеріалів, вивчаючи поведінку різних матеріалів під впливом сил, вказує, як підібрати для кожного елемента конструкції необхідний матеріал і поперечні розміри за умови повної надійності роботи і найбільшого здешевлення конструкції.

Іноді в опорі матеріалів доводиться вирішувати видозмінену задачу — перевірити достатність розмірів уже запроектованої або існуючої конструкції.

Вимоги надійності та найбільшої економії суперечать одна одній. Перше, зазвичай, призводить до збільшення матеріалоемності, друге ж вимагає її зниження. Ця суперечність є найважливішим елементом наукової методики, що зумовлює розвиток опору матеріалів як науки.

Часто настає момент, коли існуючі матеріали і методи перевірки міцності не в змозі задовольнити потребам практики, що ставить на чергу вирішення нових задач (наприклад, використання великих швидкостей в техніці взагалі, в авіації та турбобудуванні зокрема, перекриття великих прольотів, динамічні задачі і ін.). Тоді починаються пошуки нових матеріалів, дослідження їх властивостей, поліпшення і створення нових методів розрахунку та проектування. Опір матеріалів повинен встигати за загальним прогресом техніки.

У деяких випадках інженеру, крім основних вимог — надійності й найбільшої економії, - при виконанні конструкції доводиться задовольняти й інші умови, наприклад, вимоги до підвищення темпів спорудження (при відновленні зруйнованих споруд), мінімальної ваги (при конструюванні літаків) і т.п. Ці обставини також відображаються на виборі матеріалу, розмірів і форм самої конструкції та її елементів.

1.3. Коротка історична довідка

Початок розвитку опору матеріалів як науки відносять до 1638 р. і пов'язують з ім'ям Галілео Галілея, знаменитого італійського вченого. Він був професором математики в Падуб, жив в період розпаду феодального ладу, розвитку торгового капіталу, налагодження міжнародних морських стосунків і зародження гірничої та металургійної промисловості.

Нова економіка того часу поставила за мету вирішення ряду нових технічних проблем. Пожвавлення зовнішніх торгових відносин зумовило завдання збільшення вантажопідйомності суден, а це спричинило необхідність зміни їх конструкції. Водночас постало питання про реконструкцію і створення нових внутрішніх водних шляхів сполучення, включаючи розбудову каналів і шлюзів. Ці технічні завдання не могли бути вирішені простим копіюванням існуючих раніше конструкцій суден і споруд. Виявилось, що необхідно навчитися шляхом розрахунку оцінювати міцність елементів конструкції залежно від їх розмірів і величини діючих на них навантажень.

Значна частина робіт Галілея була присвячена вирішенню задач про залежність між розмірами балок і інших стержнів із тими навантаженнями, які можуть витримати ці елементи конструкції. Він вказав, що одержані ним результати можуть «принести велику користь при спорудженні великих суден, особливо при зміцненні палуб і покриттів, оскільки в спорудах цього роду легкість має величезне значення». Дослідження Галілея опубліковані в його книзі „Discorsi e Dimostrazioni matematiche” (1638, Лейден, Голландія).

Подальший розвиток опору матеріалів відбувався паралельно з розвитком техніки будівництва і машинобудування, що пов'язало його з цілим рядом робіт видатних учених-математиків, фізиків та інженерів, у тому числі й вітчизняних.

До речі, не можна не навести і негативний приклад, який досить сильно вплинув на розвиток опору матеріалів. І. Ньютон, якому завдячують бурхливим розвитком математика й механіка в цілому, в силу особистої неприязні до Р. Гука, зробив багато для того, щоб і та галузь науки – опір матеріалів, якою плідно займався Гук, вважалася недостойною уваги видатних умів того часу. Це було причиною того, що механіка твердого деформівного тіла, зокрема опір матеріалів, були загальмовані в своєму розвитку років на півтора.

Великий внесок в науку про опір матеріалів в XVIII столітті вніс дійсний член Петербурзької Академії наук Леонард Ейлер, що вирішив задачу про стійкість стиснутих стержнів.

У XIX столітті світову популярність набули роботи Д. І. Журавського і Х. З. Головіна. У зв'язку з проектуванням і спорудою мостів на Миколаївській залізниці, що будувалася між Петербургом і Москвою, Д. І. Журавський вирішив ряд важливих і цікавих питань, пов'язаних з міцністю балок при їх згині. Х. С. Головін уперше правильно розв'язав задачу про міцність кривих стержнів. Збагатили світову науку роботи Ф. С. Ясинського з питань стійкості елементів конструкцій, викликані необхідністю вивчення причин руйнування мостів. Професор М. О. Белелюбський організував і довго керував найбільшою в світі лабораторією з випробовувань матеріалів в Петербурзькому інституті інженерів шляхів сполучення. Він же протягом багатьох років працював головою міжнародного суспільства з випробовувань матеріалів. Кінець IX століття ознаменувався появою перших наукових робіт одного з видатних учених у галузі механіки – С.П. Тимошенка.

З початку XX століття роль наших вітчизняних вчених в опорі матеріалів набула провідної ролі. Професор І. Г. Бубнов став засновником сучасної науки про міцність корабля. Академік А. Н. Крилов, крім подальшого розвитку праць про розрахунок корабля, провів важливі дослідження в галузі динамічних розрахунків. Професор Н. П. Пузиревський створив нову методику розрахунку балок на пружній основі. З численних праць академіка Б. Г. Гальоркіна достатньо згадати роботи, присвячені розвитку варіаційних методів механіки, загальному вирішенню просторової задачі теорії пружності й розрахунку плит. Багатьох питань розрахунку на міцність торкалися і роботи С. П. Тимошенка. Академік А. Н. Диннік опублікував ряд капітальних робіт, присвячених стійкості елементів конструкцій. Проф. М. М. Герсєванов плідно працював у галузі механіки ґрунтів, вирішував задачі міцності і стійкості основ і фундаментів споруд і машин. Професори П. Ф. Папкович і Ю. А. Шиманський очолили школу вчених, що займалася питаннями міцності кораблів. Професор М. М. Давиденков спільно зі своїми учнями створив нову теорію, що пояснює причини руйнування матеріалів. Велике значення мають і його праці з питань динамічної міцності та руйнування при ударі. Зусиллями наших інженерів розроблено нову теорію розрахунку залізобетонних конструкцій, яка відображає дійсний характер роботи цих конструкцій і при забезпеченій міцності дає значну економію матеріалів. Академік М. І. Мусхелішвілі розвинув сучасні методи теорії функцій комплексної змінної й теорії сингулярних інтегральних рівнянь і застосував їх до вирішення ряду задач. Професор В. З. Власов створив нову оригінальну теорію розрахунку тонкостінних оболонок і тонких стержнів, що мають широке використання в різних конструкціях. Великий внесок у розвиток механіки твердого деформівного тіла зробили академіки А.Д. Коваленко (термопружність і термопластичність), Г.М.Савін (теорія пластин та оболонок, концентрація напружень), Г.С.Писаренко, Я.С. Підстригач та інші. Створена ними наукова школа є однією з найпотужніших шкіл механіків у світі.

1.4. Основні поняття опору матеріалів

1.4.1. Основні гіпотези опору матеріалів

Опір матеріалів, як і будь-яка інша наука, базується на певних гіпотезах (аксіомах), основними з яких є:

- *гіпотеза про суцільність матеріалу* – матеріал заповнює все тіло;
- *гіпотеза про однорідність та ізотропність* – матеріал вважають однорідним та ізотропним;
- *гіпотеза про малі деформації* – розглядають деформації, які значно менші за розміри самих тіл (на 2 порядки і більше);
- *гіпотеза про ідеальну пружність (пружність – це здатність тіл відновлювати свою форму та розміри при розвантаженні)*;
- *закон Гука* – приймається лінійна залежність між величинами сил та деформаціями, що викликані ними. Більшість задач опору матеріалів розв'язують саме в цій постановці;

Гук Роберт (1635 – 1703) – англійський вчений-енциклопедист. Вивчав питання тиску повітря, розробив теорію капілярності, відкрив закон пропорційності між силами та деформаціями тіл, займався теорією планетарних рухів, висловлював ідею всесвітнього тяжіння, вивчав питання, пов'язані з природою світла, побудував перший повітряний насос та інші прилади, працював над проектами літальних апаратів. Після Великої лондонської пожежі брав активну участь у відбудові міста – багато споруд було виконано за його проектами.

- *принцип суперпозиції* – вважають, що результат від суми дій дорівнює сумі результатів від кожної дії окремо;
- *принцип Сен-Венана* – якщо тіло навантажене силами і при цьому розміри зони прикладання цих сил незначні в порівнянні з розмірами тіла, то в перерізах, достатньо віддалених від місць прикладання сил, напруження практично не залежить від способу навантаження.

Барре де Сен-Венан (1797 – 1886) – французький вчений у галузі математики та механіки. Основні дослідження відносяться до механіки твердого тіла, теорії пружності, гідростатики, гідродинаміки та векторного числення.

Хоча наведені тут гіпотези дають дуже великі наближення при дослідженні процесів, які відбуваються в тілах при навантаженні, інженерна практика дає змогу оцінити розрахунки, які базуються на цих гіпотезах як такі, що досить добре описують загальний стан навантажених тіл.

1.4.2. Класифікація тіл, що приймається в опорі матеріалів

В опорі матеріалів, як і в будь-якій науці, розглядають не самі конкретні тіла, а якийсь спрощений їх символ, модель, абстрагуючись від другорядних ознак цього тіла.

Усі тіла при розгляді задач опору матеріалів можна віднести до однієї з відповідних моделей:

– *стержень (брус)* – це тіло, в якого один із розмірів значно більший, ніж два інших (рис.1.1). При цьому стержень може бути з прямою віссю (прямий стержень) або ламаною віссю (рама). Стержні можуть бути як призматичні (рис.1.1,а,б). так і змінного поперечного перерізу (рис. 1.1,в).

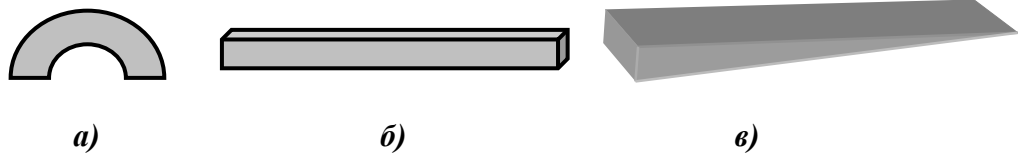


Рис.1.1. Типи стержнів (а – кривий, б – прямий, в –змінного поперечного перерізу)

– *оболонка* – це тіло, в якого один з розмірів значно менший, ніж два інших (рис.1.2,а). За формою серединної поверхні оболонки поділяються на циліндричні, конічні, сферичні.

Якщо серединна поверхня є площиною, то така оболонка носить назву *пластини* (рис.1.2,б).



Рис.1.2. Оболонка (а) та пластина(б)

– *масиви* – тіла, в яких усі розміри приблизно одного порядку (рис.1.3).



Рис.1.3. Масив

Прикладами деталей, які розглядаються як прямі стержні, є вали, балки, осі. Криві стержні – крюки підйомних кранів, віконні ручки і т.п. Як оболонки можна розглядати стінки котлів, обшивку крила літака, корпус підводного човна й т.п. До пластин відносять плоскі кришки люків, панелі перекриття, диски турбомашин і т.п. Масивами можуть бути представлені куски каменю, блоки фундаментів та ін.

1.4.3. Поняття про деформації

Під деформаціями розуміють будь-які зміни розмірів або форми тіла.

Деформації можуть бути *абсолютні та відносні* (коли вони вимірюються відношенням зміни величини до її початкового значення).

У більшості випадків деформація тіла складається з двох частин: *пружної та пластичної (залишкової)*.

Пружні деформації – це деформації, які зникають при розвантаженні тіла. *Пластичні* – такі, що залишаються після розвантаження.

При нормальній експлуатації інженерних конструкцій не допускаються пластичні деформації, коли розміри і форми елементів конструкцій незворотно змінюються. Визначення умов виникнення та зростання пластичних деформацій має велике значення для знаходження тих навантажень, які безпечно можуть передаватися на конструкцію.

1.4.4. Сили та їх класифікація

Сили, що діють на тіло, можна класифікувати за різними ознаками.

Вони можуть бути *зовнішніми та внутрішніми*. Зовнішні – це сили, які прикладаються до тіла за рахунок інших тіл. Зовнішні сили, розподілені по всьому об'єму тіла, або його частині називають *об'ємними або масовими*. Зовнішні сили, прикладені по поверхні, носять назву *поверхневих*.

Навантаження – це система зовнішніх сил, що діють на тіло.

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між частинами твердого тіла. Зовнішні сили викликають деформації тіл, що призводить до виникнення вже внутрішніх сил.

Навантаження тіла може бути *статичним або динамічним*. Статично прикладені сили – це сили, при дії яких практично немає прискорень тіла (чи його частин). Це має місце, коли навантаження тіла проводити, повільно змінюючи від нуля до повного прикладання сили. Динамічним називають навантаження, при якому виникають прискорення тіла, (чи якоїсь його частини) і, як наслідок цього, сили інерції.

Навантаження може бути *зосередженим* (діяти в досить локальній зоні – практично в точці) (рис.1.4,а) та *розподіленим* (тобто діяти або на певній площадці, або на певній довжині) (рис.1.4,б,в). Якщо розподіл має рівномірний характер (рис.1.4,в), навантаження носить назву *рівномірно-розподіленого*.

Для того, щоб порахувати повне навантаження Q в цьому випадку, рівномірно-розподілене навантаження q треба перемножити відповідно на площу, по якій воно розподіляється (або на довжину – у випадку розповсюдження по довжині). Тобто у випадку, зображеному на рис. 1.4,в. : $Q = qa$.

Зосереджені сили, як правило, позначають великими літерами " F, R, Q, H " і вони мають розмірність одиниць сили (Н), (кН) та (МН).

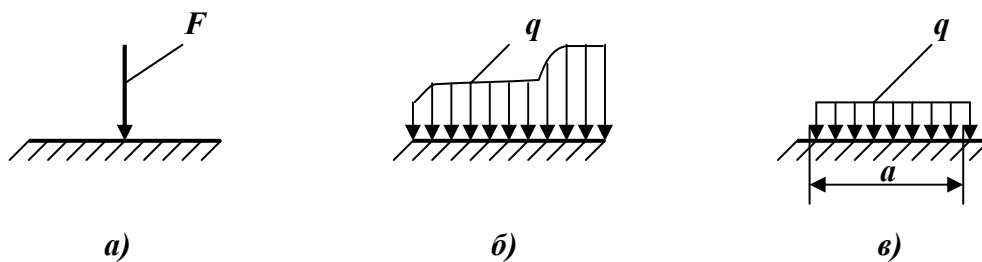


Рис. 1.4. Види навантажень: а) зосереджене, б) розподілене, в) рівномірно розподілене

Розподілене навантаження, як правило, позначають літерою " q " і воно має розмірність сили, віднесеної до площі (або сили, віднесеної до довжини) ($\text{Н}/\text{м}^2$), ($\text{кН}/\text{м}^2$) та ($\text{МН}/\text{м}^2$), або ($\text{Н}/\text{м}$), ($\text{кН}/\text{м}$) та ($\text{МН}/\text{м}$).

1.4.5. Умови рівноваги

У зв'язку з тим, що опір матеріалів розглядає деформації тіл, у більшості випадків нехтуючи їх рухом, одними з основних математичних залежностей, що використовуються, є рівняння рівноваги.

В загальному випадку просторової задачі (рис.1.5), вибравши ортогональну декартову систему координат, їх можна сформулювати так:

- суми проєкцій всіх сил, що діють на тіло, на відповідні осі дорівнюють нулю;
- суми моментів усіх сил, що діють на тіло, відносно будь-якої координатної осі дорівнюють нулю.

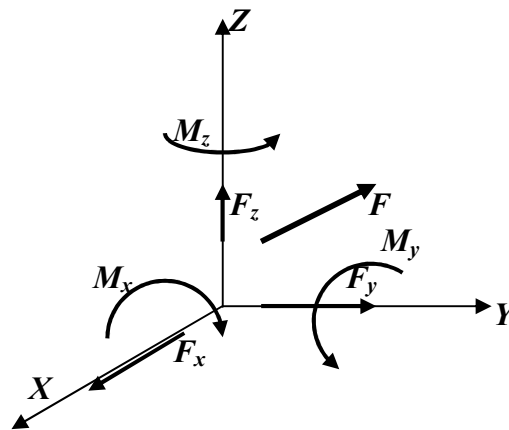


Рис.1.5. Силкові фактори при загальному випадку просторового навантаження

Або символічно:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases} \quad (1.1')$$

(1.1)

$$\begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \quad (1.1'')$$

Зрозуміло, що для плоскої задачі цих рівнянь вже буде тільки три (суми проєкцій сил на кожен з осей рівні 0 та сума моментів всіх сил відносно будь-якої довільної точки цієї площини теж дорівнюють 0).

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

У випадку лінійного навантаження (уздовж однієї осі) рівняння рівноваги буде тільки одне – алгебраїчна сума всіх сил повинна дорівнювати 0.

$$\sum X = 0 \quad (1.3)$$

При розгляді стержневих систем постає питання про знаходження внутрішніх сил, що діють у будь-якому довільному перерізі. Для цього може бути використано

метод перерізів, суть якого полягає у тому, що внутрішній силовий фактор (сила, момент) у перерізі знаходиться як алгебраїчна сума всіх сил, взятих з одного боку від цього перерізу

Суть методу зображено на рис.1.6,а,б,в.

Чому саме з одного боку? Тому, що за законами рівноваги сума сил з другого боку повинна дорівнювати тій же величині та бути спрямованою в протилежний бік (рис 1.6,в), виходячи з (1.3).

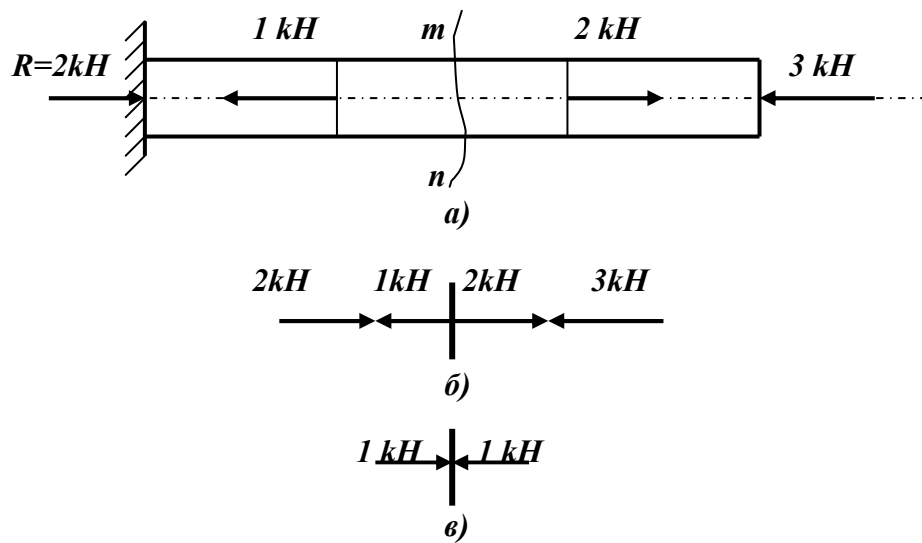


Рис. 1.6. Ілюстрація методу перерізів

Слід зауважити, що, по-перше, реакції опор – це також зовнішні сили і ними не можна нехтувати, по-друге, якщо зображений на рисунку вектор сили направлений в один бік, а величина сили за обчисленнями дорівнює від’ємному числу, то насправді сила спрямована в інший бік. Користуючись цим методом неважко побудувати епюру навантажень у наведеному стержні (рис 1.7).

Таким чином від системи зовнішніх сил можна перейти до внутрішніх силових факторів, тобто тих сил і моментів, що діють безпосередньо в перерізі, який нас цікавить.

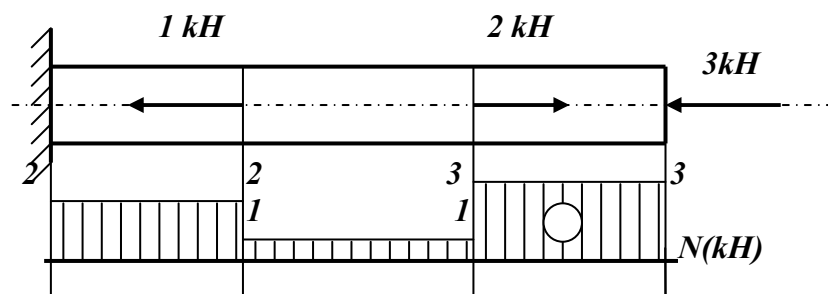


Рис.1.7. Розподіл навантажень у стержні

1.4.6. Напруження

При вирішенні питання про міцність конструкції недостатньо знати тільки систему сил, що діють на цю конструкцію. Необхідно знати ще її розміри та матеріал, з якого вона зроблена. На початку XIX століття Огюст Коші, відомий математик і механік, увів поняття напруження, яке одночасно характеризує й сили фактори, що діють в перерізі, й геометричні розміри цього перерізу. Напруження в загальному вигляді це відношення сили, що діє по площадці до величини (площі) цієї площадки.

Коші Огюстен Луї (1789 – 1857) – французький математик. Написав більш 700 наукових робіт з теорії функцій, математичної фізики, математичного аналізу. В галузі механіки ввів поняття напруження, розробив диференціальні рівняння рівноваги, вивів загальні співвідношення між компонентами напружень та деформацій для ізотропного тіла. В оптиці розвинув теорію Френеля та теорію дисперсії. За наукові досягнення був удостоєний звання барона.

Розглянемо довільне тіло, на яке діє система зовнішніх сил $F_1, F_2 \dots F_i$ (рис. 1.8) і при цьому тіло знаходиться у рівновазі.

Розглянемо переріз тіла. Якщо відкинути ліву частину, то для збереження рівноваги до точок перерізу треба прикласти сили, які дорівнюють силам, що діють з боку відрізаної частини (рис. 1.9).

Вибираємо в околі якоїсь довільної точки A елементарну площадку dA . На ній буде діяти певна (внутрішня вже) сила dF . Тоді можна вважати, що **повне напруження**

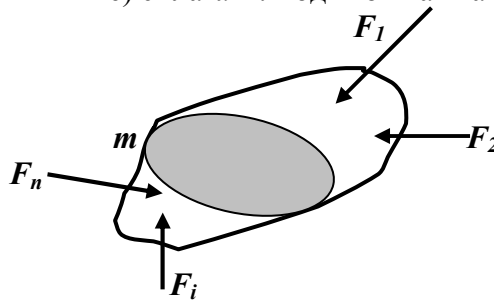


Рис.1.8. Навантажене тіло

в т. A на площадці dA визначається як

$$p = \frac{dF}{dA}$$

(1.4)

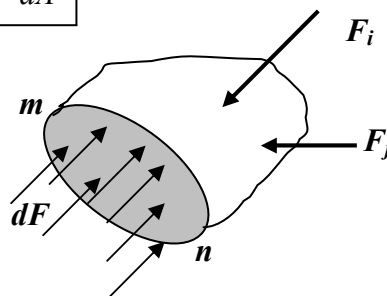


Рис.1.9. Розподіл сил по перерізу

Це *повне* напруження в т. A можна розглянути у вигляді двох складових – *нормальної* – σ та *дотичної* – τ (рис 1.10). В свою чергу

$$\boxed{\sigma = \frac{dN}{dA}} \quad (1.5)$$

$$\boxed{\tau = \frac{dQ}{dA}} \quad (1.6)$$

Очевидна залежність

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2. \quad (1.7)$$

Напруження на площадці є векторною величиною з модулем, який

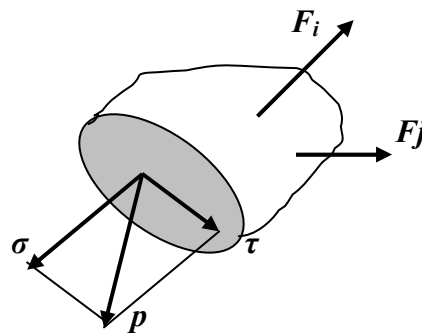


Рис.1.10. Типи напружень

обчислюється за формулами (1.4 – 1.6). Слід зауважити: якщо через т. A провести якийсь інший переріз і знову спробувати знайти напруження, то величина напруження, як повного, так і його складових, буде вже іншою. Тобто, напруження в точці твердого тіла залежить не тільки від зовнішніх сил, геометрії системи та положення точки, в якій визначаються напруження, а ще й від того, як в цій точці орієнтована площадка, на якій визначаються напруження.

Уява напруження у вигляді двох складових – нормальної та дотичної - допомагають зрозуміти способи руйнування тіла. Нормальне напруження зумовлює відрив частинок однієї від іншої. Дотичне напруження відповідно обумовлює їх взаємний зсув.

Розмірність одиниць напружень – це відношення одиниць сили до одиниць площі. В міжнародній системі за одиницю напружень приймають 1 Паскаль ($Па$), що дорівнює 1 Ньютону (Н) поділеному на 1метр² ($м^2$).

$Па = \frac{Н}{м^2}$ – досить мала величина, тому в техніці поширеніші одиниці виміру 1

кПа (кілоПаскаль) ($кПа = \frac{кН}{м^2}$), або 1 МПа (мегаПаскаль) ($МПа = \frac{МН}{м^2}$).

2. Геометричні характеристики плоских перерізів

Відзначалося, що для розгляду задач міцності, жорсткості та стійкості необхідно мати уявлення не тільки про зовнішню систему сил, що діють на тіло, але й про його розміри і форму. При цьому у багатьох випадках для розуміння процесів, пов'язаних з напружено-деформованим станом, не вистачає такої геометричної характеристики плоских перерізів, як площа. Наприклад, якщо звичайну лінійку (стержень прямокутного поперечного перерізу) розтягувати вздовж її осі, то з точки зору міцності й жорсткості немає різниці як буде орієнтований її поперечний переріз. Але, якщо ту ж саму лінійку спробувати зігнути в різних площинах – міцнісні та жорсткісні властивості будуть суттєво відрізнятися, хоча площа поперечного перерізу при цьому змінюватися не буде. Тому розглянемо ще деякі характеристики перерізів, які часто зустрічаються в опорі матеріалів.

2.1. Класифікація геометричних характеристик перерізів

2.1.1. Площа – A

Усі мають чітке уявлення що таке площа, тому відзначимо тільки, що ця величина завжди додатна і розмірність її – (од. довжини²), тобто (m^2) або похідні від цієї величини ($cm^2 = 10^{-4} m^2, mm^2 = 10^{-6} m^2$).

2.1.2. Статичний момент площі відносно осі

Розглянемо переріз у довільній декартовій прямокутній системі координат XOY (Рис 2.1). Виберемо елемент площі dA . Тоді величина

$$S_x = \int_A y dA \quad (2.1)$$

буде називатися *статичним моментом площі A відносно осі X* .

Аналогічно $S_y = \int_A x dA$ – статичний момент цієї площі відносно осі y . Розмірність статичного моменту площі – одиниці довжини в третьому степені (m^3, cm^3). Статичний момент може бути додатним, від'ємним і дорівнювати нулю.

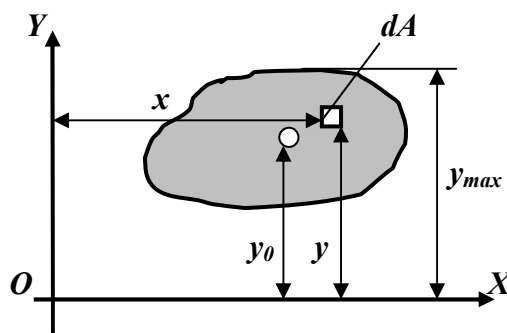


Рис.2.1. Переріз у декартовій системі координат

Як правило, нас цікавить його величина – модуль, а знаком можна нехтувати.

Проводячи математичну аналогію з моментами сил та спираючись на теорему про момент рівнодійної, можна записати:

$$S_x = y_0 \cdot A \quad \text{та} \quad S_y = x_0 \cdot A, \quad (2.2)$$

де $x_0; y_0$ – координати центра ваги площі A .

Це дає змогу обчислити координати центра ваги

$$\begin{cases} x_0 = \frac{S_y}{A} \\ y_0 = \frac{S_x}{A} \end{cases} \quad (2.3)$$

З цих формул випливає: якщо відносно певної осі статичний момент дорівнює 0, ця вісь є центральною (тобто вона проходить через центр ваги).

Для обчислення статичних моментів складної фігури її розбивають на простіші частини. При цьому загальний статичний момент буде дорівнювати алгебраїчній сумі статичних моментів окремих частин фігури відносно тієї самої осі:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i; \quad (2.4)$$
$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i.$$

2.1.3. Моменти інерції площ

А). *Осьовий (екваторіальний) момент інерції I_0 .*

Розглянемо той же самий переріз (рис. 2.1).

Осьовим (або екваторіальним) моментом інерції площі відносно осі X називають величину

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (2.5)$$

Ця величина має розмірність одиниць довжини в четвертій степені (m^4, cm^4) і приймає тільки додатні значення.

Б). *Відцентровий момент інерції.*

Відцентровим моментом інерції вважають величину

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (2.6)$$

Розмірність її така ж сама, як і в осьового моменту інерції – одиниці довжини в четвертому степені.

Ця величина вже може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Крім того відцентровий момент інерції може дорівнювати нулю.

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називають головними осями інерції перерізу. Відповідні осьові моменти інерції називають головними. Якщо головні осі проходять через центр ваги перерізу, їх називають центральними головними осями інерції.

Зауваження: якщо хоч одна з пари координатних осей буде віссю симетрії, ці осі будуть головними.

Дане твердження випливає з того, що в умовах симетричності відносно осі кожній точці перерізу можна вказати симетричну, яка одну координату буде мати таку ж саму, а

другу – зі зміненим знаком. Тоді в інтегральну суму увійдуть попарно члени, рівні за модулем та різні за знаком, що й перетворить цю суму в 0.

В). Полярний момент інерції.

Полярним моментом інерції I_p називають інтегральну суму добутків елементарних площадок dA на квадрат відстані їх від полюса – ρ^2 (у полярній системі координат), взяту по всій площі перерізу (рис. 2.2). Тобто

$$I_p = \int_A \rho^2 dA . \quad (2.7)$$

Ця величина має розмірність одиниць довжини в четвертому степені ($см^4, м^4$), й може бути лише додатною. Зрозуміло: якщо сумістити початок декартової прямокутної системи координат 0 з полюсом полярної системи (див. рис. 2.2), то

$$I_p = I_x + I_y \text{ тому що } (\rho^2 = x^2 + y^2). \quad (2.8)$$

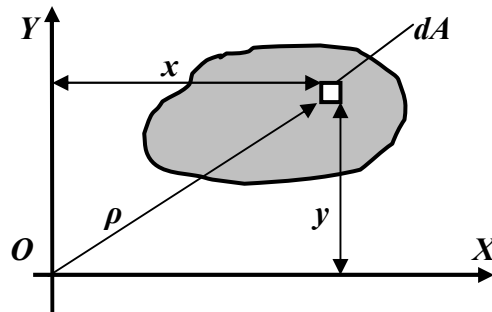


Рис. 2.2. Співвідношення осьових та полярного моментів інерції

2.1.4. Моменти опору

А). Момент опору осьовий.

Відношення осьового моменту інерції перерізу до відстані між відповідною віссю та найвіддаленішою від неї точкою перерізу називають осьовим моментом опору $W_0(W_x; W_y)$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} . \quad (2.9)$$

Б). Момент опору полярний.

Полярний момент опору W_p – це, відповідно, відношення полярного моменту інерції I_p до відстані між полюсами та самою віддаленою точкою ρ_{\max} . Тобто

$$w_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} . \quad (2.10)$$

Розмірність осьових і полярних моментів інерції – одиниці довжини в третьому степені ($м^3, см^3$). Знаком осьових моментів опору, як правило, не цікавляться, рахуючи їх за модулем.

2.1.5. Радіус інерції

Радіус інерції i – визначається як величина, що дорівнює кореню квадратному з відношення осьового моменту інерції I_0 до площі перерізу A :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$
(2.11).

Розмірність цієї величини – одиниці довжини. Знак додатний.

2.2. Перетворення моментів інерції

2.2.1. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей

Нехай є прямокутна система координат X_0OY_0 пов'язана з центром ваги перерізу т.С (рис 2.3)

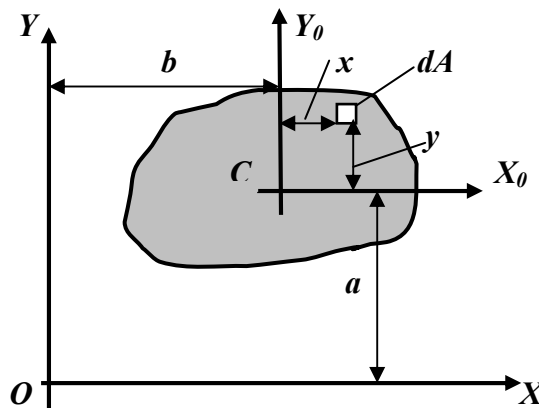


Рис.2.3. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей

Будемо вважати відомими осьові та відцентровий моменти інерції відносно цих центральних осей та площу перерізу ($I_{x_0}; I_{y_0}; I_{x_0y_0}; A$). Нехай є також друга система координат XOY , осі якої паралельні осям першої системи та віддалені від неї на відстані відповідно „a” та „b”. Треба визначити осьові та відцентровий моменти інерції відносно осей O, X та O, Y іншої системи координат.

Для цього розглянемо елементарну площадку dA на перерізі. Її координати в старій системі координат – $x_0; y_0$, а у новій – $x; y$ відповідно. Причому

$$x = x_0 + b;$$

$$y = y_0 + a.$$
(2.12)

Тоді скористаймося (2.5)

$$I_x = \int_A y^2 dA;$$

$$I_y = \int_A x^2 dA.$$
(2.13)

Підставимо в перше з цих співвідношень вираз для y з (2.12):

$$I_x = \int_A (y_0 + a)^2 dA.$$

Перетворюючи та розбиваючи на суму інтегралів

$$I_x = \int_A (y_0^2 + 2ay_0 + a^2) dA = \int_A y_0^2 dA + 2a \int_A y_0 dA + a^2 \int_A dA,$$

маємо

$$I_x = I_{x_0} + a^2 A \quad . \quad (2.14)$$

Дійсно: перший інтеграл цієї суми – це момент інерції відносно центральної осі OX_0 . Другий інтеграл є статичним моментом відносно осі OX_0 , який дорівнює нулю, тому що вона центральна. Останній інтеграл – це повна площа перерізу A . Цілком аналогічно можна вивести залежність

$$I_y = I_{y_0} + b^2 A \quad . \quad (2.15)$$

Для виведення формули у випадку перетворення відцентрового моменту, скористаймося (2.6), підставивши (2.11).

$$I_{xy} = \int_A (y_0 x_0 dA + a \int_A x_0 dA + b \int_A y_0 dA + ab \int_A dA) \quad .$$

Розглядаючи цей вираз, неважко помітити, що перший інтеграл в ньому – відцентровий момент відносно осей x_0, y_0 – I_{x_0, y_0} ; другий та третій – це статичні моменти відносно осей OX_0 та OY_0 (і тому дорівнюють нулю), а останній інтеграл являє собою повну площу перерізу A . Тобто

$$I_{xy} = I_{x_0, y_0} + abA \quad . \quad (2.16)$$

Зауваження: формулами (2.13 – 2.15) можна скористатися тільки в тому випадку, коли осі OX_0 та OY_0 – центральні. Тому слід уважно перераховувати моменти інерції при паралельному перенесенні осей. Якщо від нецентральных осей треба перейти до знов-таки нецентральных, цей перехід слід робити у 2 етапи:

- спочатку треба перейти від нецентральных до центральных осей, встановивши попередньо всі потрібні відстані та положення центра ваги;
- потім від центральных осей перейти до тих нецентральных осей, які нас цікавитимуть.

2.2.2. Перетворення моментів інерції при повертанні осей

Нехай є перша прямокутна система координат XOY та повернута на кут α відносно першої друга система X_1OY_1 . Причому всі ці осі довільні (тобто не обов'язково є центральними або головними) (рис. 2.4).

Розглянемо елементарну площадку dA . Її координати у першій системі $x; y$, а в другій $x_1; y_1$.

Співставивши значення координат, можна записати:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Враховуючи, що

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA; \quad I_{x_1, y_1} = \int_A x_1 y_1 dA;$$

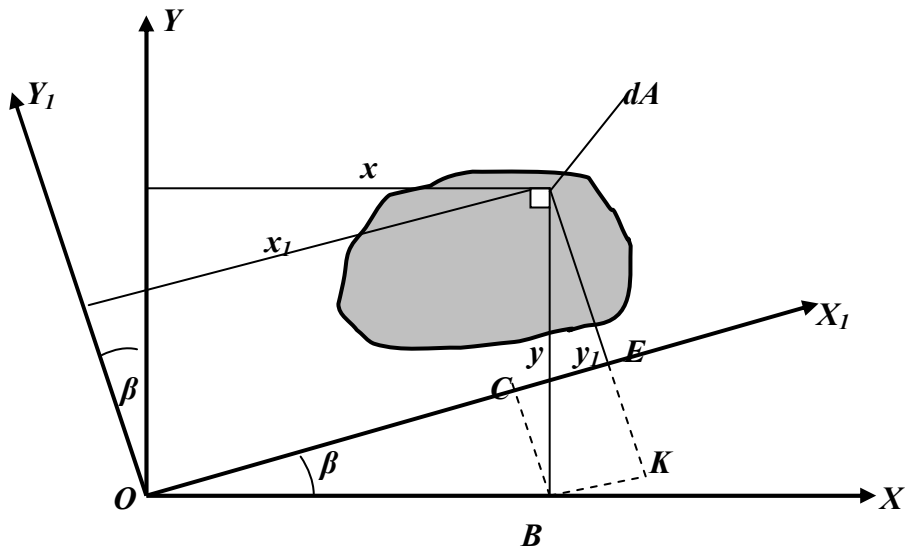


Рис. 2.4. Перетворення моментів інерції при повертанні осей

підставимо у ці співвідношення вирази (2.17).
Відповідно, перетворюючи, будемо мати:

$$I_{x_1} = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dx = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA$$

або

$$\cos^2 \alpha \cdot I_x - \sin 2\alpha \cdot I_{xy} + \sin^2 \alpha \cdot I_y .$$

Остаточно можна записати:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha . \quad (2.18)$$

Роблячи аналогічні перетворення, отримуємо:

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha ; \quad (2.19)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha . \quad (2.20)$$

Аналізуючи залежності (2.18) – (2.19), неважко отримати:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p . \quad (2.21)$$

Тобто, при повертанні осей сума осьових моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту I_p (за тих умов, коли початок координат і полюс співпадають).

2.2.3. Головні осі інерції. Головні моменти інерції

Цікавим є питання про визначення осей, відносно яких моменти інерції будуть набувати найбільшого та найменшого значення. Позначимо ці осі „u” та „v”. Дослідимо на екстремум вираз (2.18). Взяти першу похідну та прирівнявши її до нуля, матимемо:

$$- 2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot I_x + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot I_y - 2 \cos 2\alpha \cdot I_{xy} = 0$$

або, перетворюючи:

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = I_{x_1 y_1} = 0. \quad (2.22)$$

Тобто, I_{x_1} та I_{y_1} приймають екстремальні значення відносно тієї пари осей, для яких відцентровий момент $I_{x_1 y_1} = 0$. Тобто, за прийнятими нами позначеннями головних осей індексами „u” та „v” можна записати $I_{uv} = 0$. Нехай $I_u = I_{\max}$, а $I_v = I_{\min}$ (це відбувається за тієї умови, що $I_x > I_y$).

Головними осями інерції називають осі, відносно яких відцентровий момент дорівнює нулю.

Відносно головних осей виникають екстремальні значення моментів інерції, які теж називають головними моментами інерції.

Площини, проведені через вісь стержня та головні осі інерції називають *головними площинами інерції*.

Цікавим є визначення орієнтації головних осей та значень головних моментів інерції.

Нехай у перерізі є довільні взаємно перпендикулярні осі x та y. Відомі моменти інерції відносно цих осей I_x, I_y та I_{xy} . Потрібно встановити орієнтацію головних осей **u** та **v**, тобто визначити кут повороту на головні осі α_0 і визначити головні моменти інерції I_u та I_v .

Для визначення орієнтації головних осей розглянемо вираз (2.20). Для головних осей відцентровий момент дорівнює нулю, тому

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

або
$$\boxed{tg 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}}, \quad (2.23)$$

звідки
$$\boxed{\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right)}. \quad (2.24)$$

Для визначення головних моментів розглянемо формули (2.18 – 2.19):

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0.$$

Розглянемо суму цих величин та їх різницю:

$$I_u + I_v = I_x + I_y ; \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} I_u - I_v &= I_x \cos 2\alpha_0 - I_y \cos 2\alpha_0 - 2I_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= (I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 + (I_x - I_y) \operatorname{tg} 2\alpha_0 \sin 2\alpha_0 = (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тоді з (2.25) та (2.26)

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y + (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha} \right]; \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y - (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Або, зробивши заміну

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{4I_{xy}^2}{(I_x - I_y)^2}}, \quad (2.28)$$

маємо:

$I_u = \frac{1}{2} \left[I_x + I_y + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]$	(2.29)
$I_v = \frac{1}{2} \left[I_x + I_y - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]$	

Таким чином, отримано можливість визначати як положення (орієнтації) головних осей, так і значень головних моментів інерції перерізу.

2.2.4. Еліпс інерції

Вище вже згадувалося поняття радіусів інерції $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$; $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$.

Головним осям u та v відповідають головні радіуси інерції $i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}$; $i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$.

На головних центральних осях інерції перерізу можна побудувати еліпс із півосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому вздовж осі u відкладемо i_u , а вздовж осі v – i_v (рис. 2.5).

Цей еліпс називають *центральним еліпсом інерції*. Він має цікаву властивість – радіус інерції відносно будь-якої центральної осі Z визначається як перпендикуляр OA , проведений з центра еліпса до дотичної, яка паралельна даній осі (у нашому випадку осі Z). Точку дотику легко отримати побудовою хорди, яка проходить паралельно осі Z . Промінь, проведений з центра еліпса через середину цієї хорди, пройде через точку дотику на кривій еліпса. Після цього, вимірявши радіус інерції i_z - відрізок OB , можна отримати момент інерції: $I_z = i_z^2 A$.

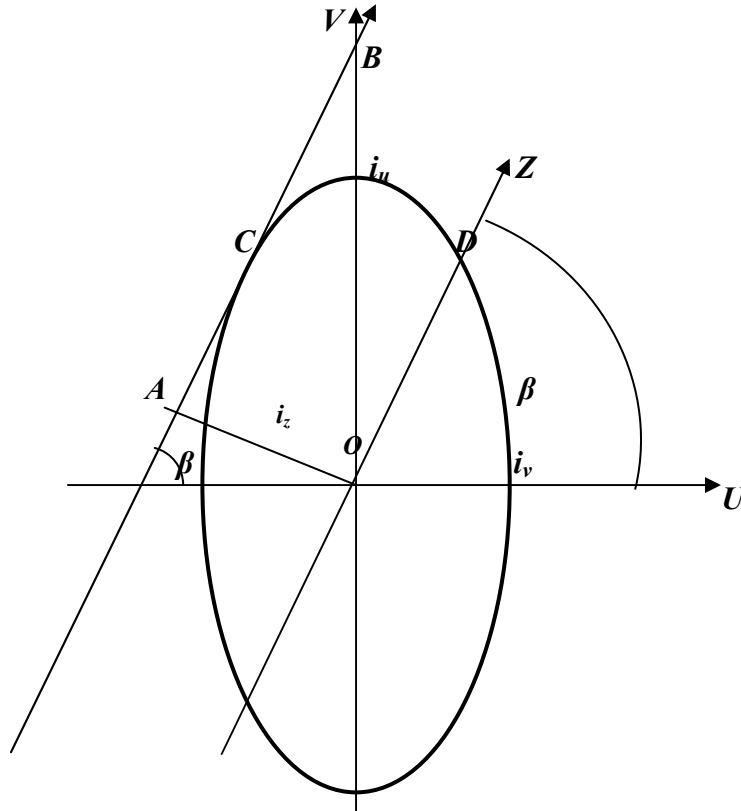


Рис. 2.5. Еліпс інерції

2.3. Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів

2.3.1. Прямокутник

Нехай задано прямокутник (рис. 2.6). Обчислимо його осьові моменти інерції I_x, I_y

(X, Y – центральні, головні осі інерції) : $I_x = \int_A y^2 dA$.

Елементарну площадку dA можна виразити як добуток $b dy$, тоді

$$I_x = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = 2 \frac{y^3}{3} b \Big|_0^{\frac{h}{2}}$$

або

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad (2.30)$$

аналогічно

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad . \quad (2.31)$$

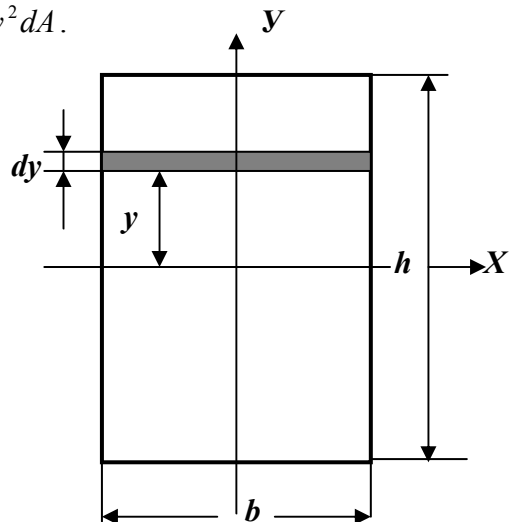


Рис. 2.6. Прямокутний переріз

Обчислюючи осьові моменти опору W_y та W_z , отримуємо:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}; \quad (2.32)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}. \quad (2.33)$$

2.3.2. Трикутник

Нехай задано довільний трикутник (рис. 2.7), вісь X співпадає з основою, а X_0 – центральна.

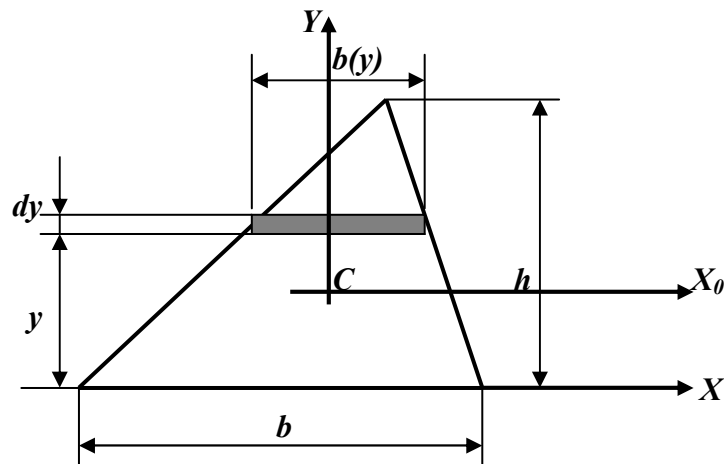


Рис. 2.7. Трикутний переріз

Знайдемо спочатку I_x :

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Елементарна площадка dA запишеться як

$$dA = b(y)dy,$$

де $b(y) = b \frac{h-y}{h} = b \left(1 - \frac{y}{h}\right),$

тобто $I_x = \int_0^h by^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy$

або
$$I_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.34)$$

Для центральної осі x_0 момент інерції підрахуємо за допомогою формули паралельного переносу (2.13), знаючи, що центр ваги трикутника знаходиться на рівні $\frac{1}{3}$ висоти від основи.

$$I_{x_0} = I_x - a^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2}.$$

Знак „-“, у формулі вибрано тому, що здійснюється перехід від нецентральної осі до центральної. Тобто

$$\boxed{I_{x_0} = \frac{bh^3}{36}}. \quad (2.35)$$

2.3.3. Круг

Нехай задано круг з радіусом R (рис. 2.8). Знайдемо момент інерції відносно будь-якої центральної осі, наприклад, X :

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Площадку dA можна уявити як добуток $b(y)dy$. З рис.2.8 очевидно, що

$$b(y) = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ а } y = R \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Тоді } dy = -\frac{1}{2} R \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha.$$

Отже

$$I_x = \int_{\pi}^0 R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} 2R \sin \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{2} R \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha \right). \quad (2.36)$$

Перетворюючи і змінюючи межі інтегрування, одержимо:

$$I_x = R^4 \int_0^{\pi} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha = R^4 \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha. \quad (2.37)$$

Тобто

$$\boxed{I_x = \frac{\pi R^4}{4}}. \quad (2.38)$$

Осьовий момент опору

$$\boxed{W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi R^3}{4}}. \quad (2.39)$$

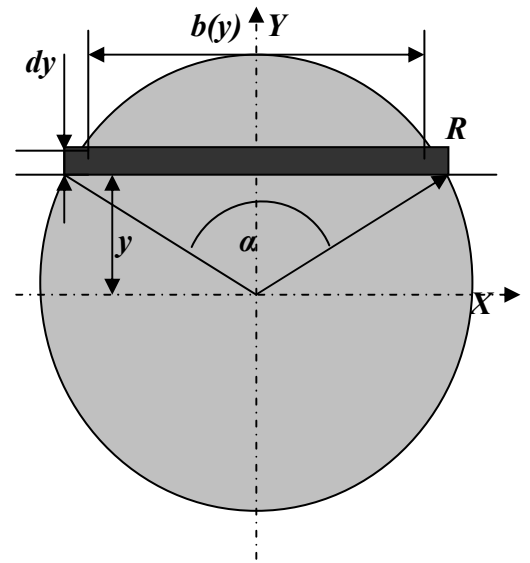


Рис. 2.8. Круглий переріз

Скориставшись залежністю між осьовими та полярними моментами інерції та враховуючи, що для круга будь-яка центральна вісь є головною, можна підрахувати полярні моменти інерції та опору:

$I_p = 2I_x = \frac{\pi R^4}{2}$	(2.40)
$W_p = \frac{\pi R^3}{2}$	(2.41)

2.3.4. Кільце

Нехай задано кільце (рис. 2.9).
Тоді моменти інерції можна підрахувати за властивостями інтегральних сум.

Тобто,

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{4}$$

або в такому вигляді

$I_x = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4)$	(2.42)
--	--------

де $\alpha = \frac{r}{R}$

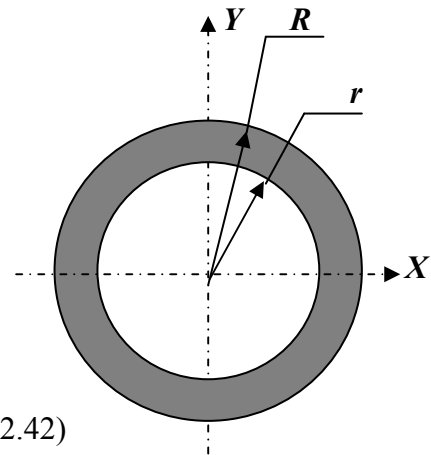


Рис.2.9. Кільцевий переріз

Аналогічно $W_x = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \alpha^4)$; (2.43)

$I_p = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4)$	(2.44)
--	--------

$W_p = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4)$	(2.45)
--	--------

2.4. Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо)

Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо) проводяться за допомогою таблиць сортаменту, представлених у різних довідниках, підручниках і задачниках з опору матеріалів і деталей машин.

3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів

Для того, щоб проектувати і створювати конструкції та деталі машин, треба насамперед знати механічні властивості матеріалів, з яких планується виготовлення окремих елементів цих конструкцій та деталей. Для цього проводять лабораторні натуральні дослідження їх зразків.

Матеріали прийнято поділяти на *крихкі* та *пластичні*. Пластичні – це такі, що руйнуються при досить великих залишкових деформаціях $\varepsilon \sim (8 \div 28)\%$. Крихкими називають матеріали, що руйнуються при малих величинах залишкових деформацій $\varepsilon \leq 2\%$.

При цьому мається на увазі, що випробовування матеріалів проводять при кімнатних температурах та нормальних атмосферних тисках .

3.1. Діаграма розтягу для пластичних матеріалів

Багато відомостей про матеріал інженери отримують із випробувань зразків на розтяг аж до руйнування. Для дослідів виготовляють зразок циліндричної форми круглого або прямокутного перерізу (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Зразок для випробовувань.

Зразок закріплюють у захватах розривної машини і починають розтягувати. При цьому самописець, з'єднаний з машиною, рисує так звану діаграму Прандтля (рис. 3.2).

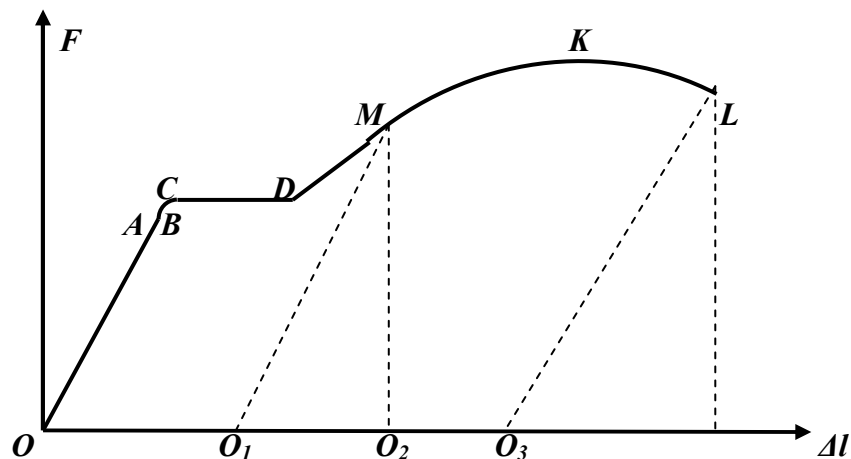


Рис. 3.2. Діаграма розтягу для пластичного матеріалу ($\Delta l, F$)

Якщо розглянути цю узагальнену діаграму розтягу пластичного матеріалу (рис. 3.2), то можна розбити її на кілька характерних ділянок.

– Ділянка OA – пряма лінія. Це – ділянка пропорційності. Точці A відповідає рівень навантаження, який називають *границею (або межею) пропорційності*. На цій

ділянці спостерігається лінійна залежність між напруженнями та деформаціями, тобто виконується закон Гука.

– Точка B (практично співпадає з т.А) відповідає навантаженню, яке називають *границею (межею) пружності* (якщо матеріал навантажувати до т. B ., практично не спостерігається залишкових деформацій).

– Ділянка CD – це, так звана, *площадка текучості*. Їй відповідає *границя текучості*. Якщо матеріал деформувати до рівня текучості, то подальше його деформування не викликати зростання напружень.

– Ділянка DK – *ділянка тимчасового зміцнення*, де матеріал знов починає чинити опір силам, що його деформують.

– У точці K починається руйнування матеріалу, на зразку утворюється „шийка” – місцеве звуження. Цій точці відповідає *границя (межа) міцності*.

– У точці L зразок повністю зруйнується.

Відрізки $O_1 O_2$ та $O_3 O_4$ відображають ступінь пластичної деформації при розвантаженні зразка матеріалу в т. M та остаточному руйнуванні його в т. L .

Діаграма на рис. 3.2 дозволяє встановити ще одну механічну характеристику матеріалу, пов'язану з поведінкою його при ударних навантаженнях. У цьому випадку опір стає тим більшим, чим більшою є робота, яку треба виконати, щоб розірвати зразок. Виявляється, що величина цієї роботи (в певному масштабі, звичайно) дорівнює площі діаграми розтягу, що зображена на рис. 3.3.

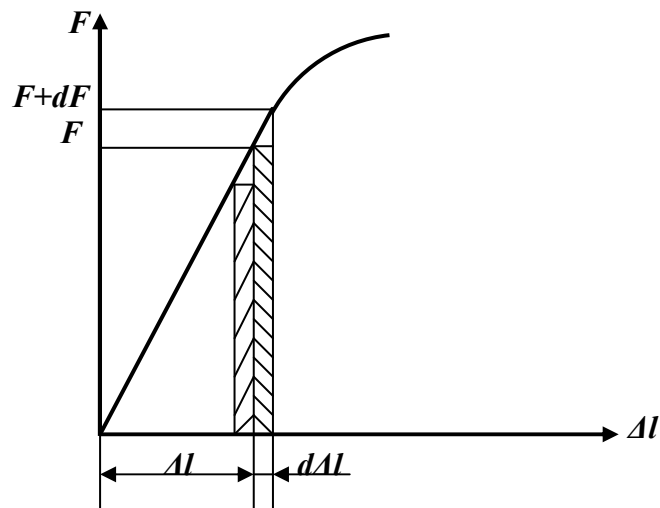


Рис. 3.3. Обчислення роботи, яка потрібна для деформації зразка

Розглянемо частину цієї діаграми в межах пропорційності. З рис.3.3 очевидно, що диференціал роботи системи $dA_c = \left(F + \frac{1}{2} dF \right) d\Delta l = F d\Delta l + \frac{1}{2} dF \cdot d\Delta l$, причому другий доданок значно менший, ніж перший і ним можна знехтувати, тоді:

$$dA_c = F \cdot d\Delta l.$$

Геометричні уявлення процесу інтегрування дозволяють зрозуміти, що при поступовому зростанні сили F та видовженні Δl робота (або потенціальна енергія деформації) чисельно будуть представлені таким чином:

$$U = A_c = \int_0^{\Delta l} F d\Delta l = \frac{F \cdot \Delta l}{2}. \quad (3.1)$$

Аналогічні міркування можна застосувати і до повної площі діаграми. Для того, щоб отримати величину, яка б характеризувала не зразок, а сам матеріал, прийнято ділити роботу (її можна прирівняти, нехтуючи дисипацією, до потенціальної енергії деформації U , що накопичує зразок у процесі навантаження) на об'єм зразка.

Співвідношення

$$a = \frac{U}{A_0 l}, \quad (3.2)$$

де A_0 – початкова площа перерізу називають *питомою роботою пружної деформації*.

Аналогічно можна визначити *повну питому роботу*. Це та робота, яку треба затратити, щоб розірвати матеріал.

$$a_b = \frac{U_b}{A_0 l}. \quad (3.3)$$

Чим більшою є ця величина, тим більшу роботу слід затратити для руйнування зразка.

Слід зауважити, що матеріал зразка після переходу за границю текучості продовжує зберігати пружні деформації, до яких вже додаються пластичні. Це стає очевидним після розвантаження зразка після переходу за границю текучості (рис. 3.2, точка M). Якщо знову навантажувати і розвантажувати зразок, то границя пропорційності підвищується до того напруження, на яке попередньо був навантажений зразок, а залишкова деформація після розриву зменшується на величину OO_1 , тобто на величину залишкової деформації, набутої в процесі попереднього навантаження. Це явище називають *наклепом*.

3.2. Діаграма напружень

Зображена на рис 3.2 діаграма ілюструє поведінку матеріалу при заданих розмірах зразка, тому для отримання графіка, який характеризував би матеріал, що досліджується, діаграму розтягу представляють вже трохи в іншому вигляді.

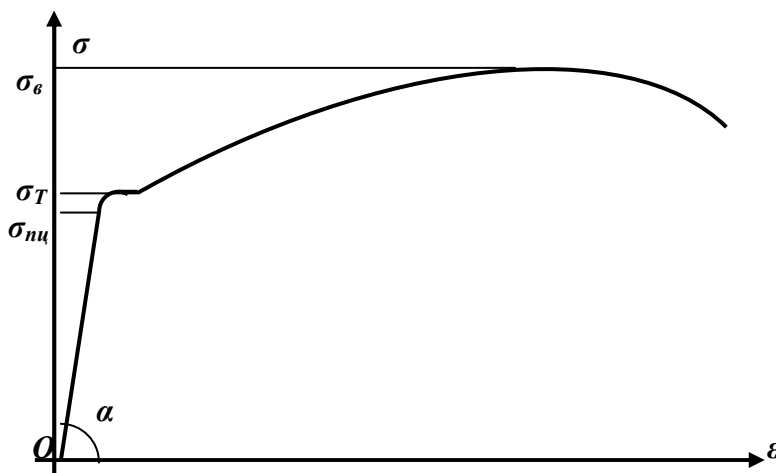


Рис. 3.4. Діаграма розтягу для пластичних матеріалів (ϵ, σ)

Ординати кривої (рис. 3.2) ділять на початкову площу A_0 і отримують напруження $\sigma = \frac{F}{A_0}$, а абсциси ділять на початкову довжину, отримуючи при цьому деформації $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Таким чином, отримують графік у координатах ε, σ , який зображено на рис. 3.4. Вона називається діаграмою напружень при розтягу і за обрисами схожа на діаграму, що на рис. 3.2. На ній зображені всі величини напружень, що характеризують механічні властивості матеріалів: границю пропорційності – σ_{mi} , текучості – σ_m , міцності – σ_s . З цієї діаграми вже видно, що

$$tg\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E, \quad (3.4)$$

де E – модуль пружності I роду.

3.3. Реальна діаграма напружень

Діаграму на рис. 3.4. можна розглядати як таку, що характеризує властивості даного матеріалу при розтягу. Проте ця характеристика є досить умовною, бо не враховує зміни площі поперечного перерізу в процесі деформації.

На рис 3.5 зображено діаграму розтягу для рейкової сталі, у якої абсциси дорівнюють відносній зміні площі, тобто $\psi_t = \frac{A_0 - A_t}{A_0}$, ординати відповідно – напруженням $\sigma_p = \frac{F}{A_t}$; т. A відповідає початку утворення шийки, тобто т. K на рис. 3.2;

3.4. Ординати реальної діаграми характеризують властивість матеріалу чинити опір пластичній деформації.

Ординату в точці т. A називають *реальною границею міцності (або реальним тимчасовим опором)*. Ординату в кінці при розриві зразка називають *напруженням при розриві*.

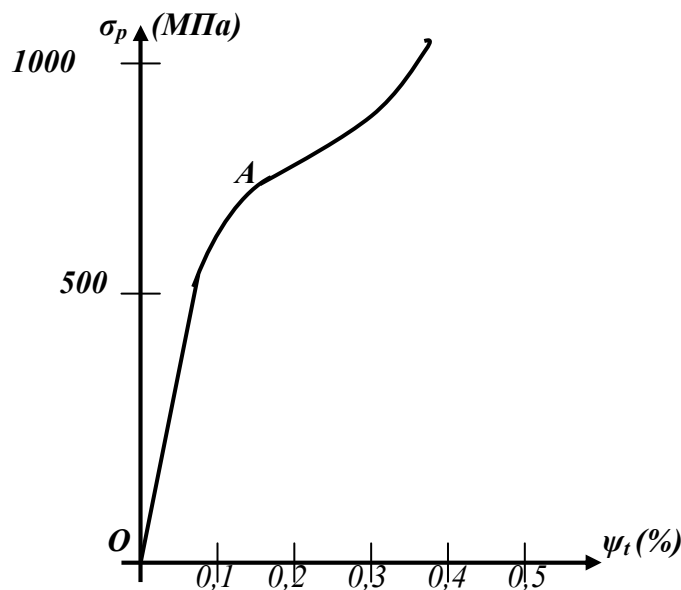


Рис.3.5. Реальна діаграма напружень

3.4. Діаграма розтягу для крихких матеріалів

Крихкі матеріали характеризуються тим, що руйнування зразків виникає вже при невеликих деформаціях. Наприклад діаграма розтягу чавуну представлена на рис. 3.6. Треба звернути увагу, що в порівнянні з рис. 3.2; 3.4 горизонтальний масштаб діаграми рис. 3.6 збільшений \sim в 40 раз, вертикальний \sim в 6.

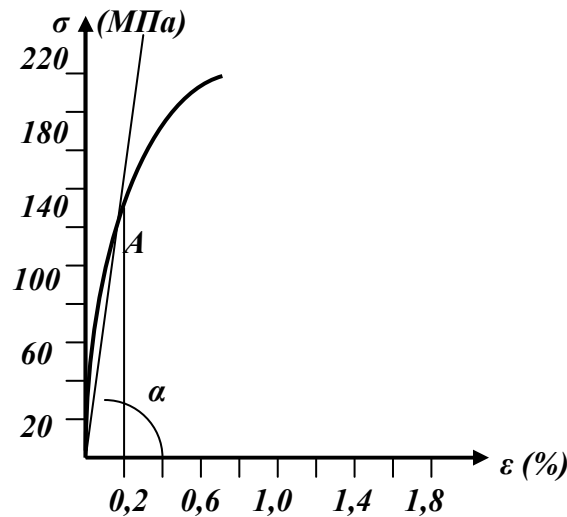


Рис. 3.6. Діаграма розтягу для крихких матеріалів

Як правило, крихкі матеріали погано чинять опір розтягу. Для них також практично не існує ділянки пропорційності. Тому для обчислень модуля пружності криву апроксимують хордою, яка сполучає початок координат і точку, що відповідає \sim границі пружності ($\varepsilon \sim 0,2\%$).

3.5. Діаграми стиску для пластичних і крихких матеріалів

Діаграма стиску для пластичного матеріалу незначно відрізняється від діаграми розтягу.

На рис. 3.7 зображено типову діаграму стиску для маловуглецевої сталі. На ній також спостерігаються ділянка пропорційності та площадка текучості, але т. К, яку розглядали на рис 3.2. та 3.4 – відсутня. Шийка тут не утворюється.

Що стосується стиску крихких матеріалів, то вони переносять стиск значно краще, ніж розтяг. Якщо порівняти дві діаграми – розтягу та стиску для чавуну, то отримаємо картину, схожу на зображену на рис. 3.8. (Знаком „+” відзначено зону розтягу, знаком „-” – стиску).

3.6. Твердість

Величина границі міцності при розриві пластичних матеріалів певною мірою пов'язана з їх властивістю, що називають *твердістю*. *Твердість* - це здатність матеріалу чинити опір проникненню в нього інших тіл.

Одним з найпоширеніших методів визначення твердості є спосіб Брінеля.

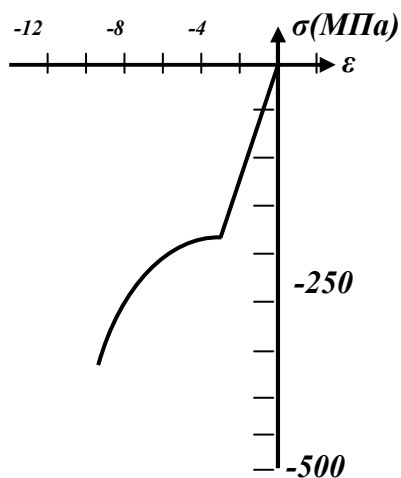


Рис.3.7. Діаграма стиску для пластичних матеріалів

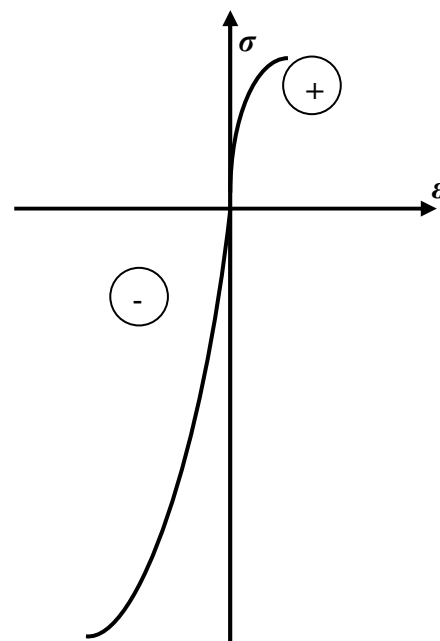


Рис.3.8. Діаграма стиску для крихких матеріалів

Характеристикою твердості при цьому є так зване „число твердості”, яке визначається за допомогою втискання в матеріал кульки, зробленої з закаленої сталі. „Числом твердості по Брінелю” називають величину, що чисельно дорівнює відношенню вдавлюючої сили на площу кульової поверхні лунки.

$$H_B = \frac{P}{\pi D h} = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (3.5)$$

де D – діаметр кульки;
 d – діаметр відбитка;
 h – глибина відбитка.

Твердість у техніці прийнято вимірювати в $\frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$ ($1 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2} \approx 10 \text{ МПа}$). Наприклад, для маловуглецевої сталі $H_B = 100 \div 120 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$, для рейкової $H_B = 200 \div 220 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$; для твердої закаленої $H_B = 400 \div 450 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$.

Між числом твердості по Брінелю та границею міцності для сталі встановлена досить чітка емпірична залежність

$$\sigma_s \approx 0,36 H_B. \quad (3.6)$$

З інших методів визначення твердості можна виділити ще метод Роквелла. Він полягає у вдавлюванні в матеріал алмазної пірамідки або закаленої кульки діаметром 1,59 мм. У цьому випадку характеристикою твердості є глибина вдавлювання.

3.7. Порівняльні характеристики пластичних і крихких матеріалів

Основна різниця між крихкими та пластичними матеріалами полягає в тому, що крихкі матеріали руйнуються при досить малих деформаціях. У зв'язку з цим площі під діаграмами для пластичних матеріалів значно більші, ніж для крихких.

Тобто, для руйнування пластичних матеріалів треба затратити значно більшу роботу, ніж для руйнування крихких матеріалів. Крім того, крихкі матеріали значно гірше чинять опір розтягу й ударам та досить чутливі до місцевих напружень (концентраторів напружень (див. гл.17,18)). Вироби, зроблені з крихких матеріалів, не здатні до зміни форми.

Пластичні матеріали не мають цих недоліків. Таким чином, пластичність є однією з найважливіших і бажаних властивостей.

3.8. Основні положення для вибору коефіцієнта запасу міцності та допустимих напружень

3.8.1. Загальні положення

Розглянуті нами величини, що характеризують механічні властивості матеріалу (границі міцності, пропорційності, текучості, модуль пружності і т. п.) визначають за допомогою лабораторних досліджень при статичному навантаженні.

Дію динамічних навантажень розглянемо пізніше.

Ідеєю будь-якого розрахунку на міцність є *зробити так, щоб максимальні розрахункові напруження в конструкції не перевищували допустимих*. Тобто:

$$p_{\max} \leq [p]; \quad \text{або} \quad \sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad \text{або} \quad \tau_{\max} \leq [\tau].$$

Візьмемо, наприклад,

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

і розглянемо, яким же чином вибрати рівень допустимих напружень $[\sigma]$.

При виборі напружень, що допускаються, доводиться враховувати цілий ряд обставин. Величини і характер дії сил, що входять у розрахунки, відомі нам не зовсім точно; механічні властивості матеріалів на практиці часто дають значні відхилення від середніх значень; методи наших розрахунків, наші уявлення про взаємодію окремих частин конструкцій зазвичай є спрощеними і наближеними.

Тому допустимі напруження вибирають як *зменшені небезпечні напруження*,

тобто:

$$[\sigma] = \frac{\sigma^H}{k}, \quad (3.7)$$

де k – коефіцієнт запасу міцності (або коефіцієнт незнання, як часто називають його інженери).

Коефіцієнт запасу повинен врахувати всі ці неточності, що є неминучими в наших розрахунках.

Чим неодноріднішим є матеріал, чим наближеніше ми оцінюємо дійсні навантаження, чим спрощеніше уявляємо собі з'єднання окремих елементів конструкції, тим більшим цей коефіцієнт доводиться вибирати. Частини машин у роботі зношуються, тому у багатьох випадках доводиться давати «запас на знос». У металевих і дерев'яних інженерних спорудах доводиться враховувати можливість корозії й загнивання.

З другого боку, є конструкції (літаки, наприклад), де необхідно максимально знижувати коефіцієнт запасу з метою зменшення ваги. Так само інженеру доводиться знижувати коефіцієнт запасу при виконанні робіт на тимчасових спорудах в обстановці військового часу.

Таким чином, правильний вибір напружень, що допускаються, є вельми складною задачею, пов'язаною з методами розрахунків та дослідження матеріалів, а також господарсько-економічними і деякими іншими факторами.

Для багатьох конструкцій норми напружень, що допускаються, встановлюють прийнятні в тій чи іншій галузі нормативи, і інженер лише повинен уміти їх правильно застосовувати.

Підсумовуючи сказане, можна сформулювати основні міркування таким чином.

Коефіцієнт запасу треба вибирати з тим розрахунком, щоб *був забезпечений* відомий запас міцності проти виникнення так званого *небезпечного стану* матеріалу, який *буде загрожуєчим* для роботи конструкції.

При статичному або ударному навантаженні для пластичних матеріалів такий стан характеризується появою великих залишкових деформацій (явище текучості), для крихких – появою тріщин, руйнуванням матеріалу. При повторно-змінному навантаженні небезпечний стан характеризується появою і розвитком тріщини втомленості. Напруження σ^H , що викликає небезпечний стан, зазвичай приймають відповідним:

$\sigma^H = \sigma_T$ – границя текучості – для пластичного матеріалу;

$\sigma^H = \sigma_e$ – границя міцності – для крихкого матеріалу (при статичному навантаженні);

$\sigma^H = \sigma_k$ – границя витривалості – за умов виникнення тріщин при динамічному навантаженні.

Таким чином, залежно від характеру небезпечного стану матеріалу можна записати:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k_T}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_e}{k_e}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_k}{k_k},$$

де, $k_T; k_e; k_k$ — відповідні коефіцієнти запасу. Ці три формули можна узагальнити у вигляді (3.7):

$$[\sigma] = \frac{\sigma^H}{k}, \quad (3.7)$$

маючи на увазі під σ^H або σ_T , або σ_e , або σ_k , а під k – або k_T , або k_e , або k_k .

Оскільки межі текучості й витривалості певною мірою пов'язані з межею міцності, то для всіх видів небезпечного стану можна встановити коефіцієнт запасу й відносно межі міцності σ_e .

Неоднорідність матеріалу, неточність при визначенні величин сил, неточність розрахунку, тобто загальні параметри, *враховують* так званим основним *коефіцієнтом* запасу k_0 . Для пластичних матеріалів (сталь) його зазвичай приймають рівним $k_m = k_0 = 1,4 \div 1,6$ для крихких матеріалів і дерева $k_e = k_0 = 2,5 \div 3,0$. Решту параметрів, тобто динамічність навантажень, змінність їх дії і вплив місцевих перенапружень враховують додатковими коефіцієнтами, на які множать основний.

Якщо при визначенні напружень, що допускаються, враховують тільки загальні параметри, тобто коефіцієнт запасу приймають рівним одному лише основному, то динаміку й місцеві напруження враховують, коли це можливо, у величині дійсного напруження, перемножуючи основне статичне напруження на коефіцієнти динамічності й концентрації.

Прийняті в інженерній практиці значення загального коефіцієнта запасу відносно до межі міцності для різного стану матеріалу і для різного характеру дії навантажень із включенням у нього звичайної величини впливу динамічності навантаження і місцевих напружень показано в таблиці 3.1.

Коефіцієнти запасу

Таблиця 3.1

Характер навантаження	Стан матеріалу	k_s
1. Статичне навантаження	Пластичний матеріал	2,4 ÷ 2,6
	Крихий матеріал	3,0 ÷ 9,0
2. Ударне навантаження	Пластичний матеріал	2,8 ÷ 5,0
3. Змінне навантаження (розтяг – стиск однакової величини)	Пластичний матеріал (сталь)	5,0 ÷ 15,0

Ця таблиця має лише *орієнтовний* характер. Вона дає уявлення про зміну коефіцієнта залежно від різних обставин. Докладніше про коефіцієнти запасу для ударних і змінних навантажень буде сказано далі.

3.8.2. Допустимі напруження на розтяг і стиск для різних матеріалів

У таблиці 3.2 наведено орієнтовні величини основних напружень, що допускаються, на розтяг і стиск для деяких основних конструкційних матеріалів, найбільш

Орієнтовні величини основних допустимих напружень

Таблиця 3.2

Найменування матеріалу	Допустимі напруження в МПа	
	на розтяг	стиск
Чавун сірий у відлив	28 – 80	120 – 150
Сталь ОС і ст.2		140
Сталь т.3		160
Сталь ст. 3 в мостах		140
Сталь киснева конструкційна в машинобудуванні	60 – 250	
Сталь легована конструкційна в машинобудуванні	100 – 400 і вище	
Мідь	30 – 120	
Латунь	70 – 140	
Бронза	60 – 120	
Алюміній	30 – 80	
Алюмінієва бронза	80 – 120	
Дюралюмін	80 – 150	
Текстоліт	30 – 40	
Гетінакс	50 – 70	
Бакелізована фанера	40 – 50	
Сосна вздовж волокон.	7 – 10	10 – 12
Сосна впоперек волокон	–	1,5 – 2,0
Дуб вздовж волокон	9 – 13	13 – 15
Дуб впоперек волокон	–	2 – 3,5
Кам'яна кладка	до 0,3	0,4 – 4,0
Цегляна кладка	до 0,2	0,6 – 2,5
Бетон	0,1 – 0,7	1,0 – 9,0

розповсюджених в інженерній справі, зокрема в машинобудуванні.

Цю таблицю складено на підставі діючих у даний час норм. У кожному окремому випадку розрахункової практики слід встановлювати допустимі напруження відповідно до офіційних технічних умов і норм проектування конкретної конструкції.

4. Розтяг – стиск

Розтяг (або стиск) – це вид деформації, який виникає, якщо до стержня прикласти систему сил, що діють вздовж його осі.

Чому ми об'єднуємо такі протилежні, здавалося б, види деформацій?

Справа в тому, що процеси, які відбуваються при розтягу або стиску в більшості випадків є ідентичними, як і механічні характеристики дуже великої кількості пластичних конструкційних матеріалів. Тому ці протилежні види – розтяг та стиск – описують одними й тими ж математичними залежностями і об'єднують як один вид: *розтяг – стиск*. При цьому домовились: все, що стосується розтягу (сили, напруження, деформації і т.п.) рахувати зі знаком „+”, а те, що стосується стиску – зі знаком „-”.

При розгляді розтягу – стиску користуються основними гіпотезами, розглянутими вище. Крім того, вводять ще гіпотези, які характерні саме для певних видів простої деформації. Так, наприклад, приймають гіпотезу плоских перерізів – *поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступально вздовж осі стержня.*

4.1. Внутрішні сили та напруження при розтягу – стиску

Розглянемо стержень, навантажений поздовжніми силами (рис 4.1).

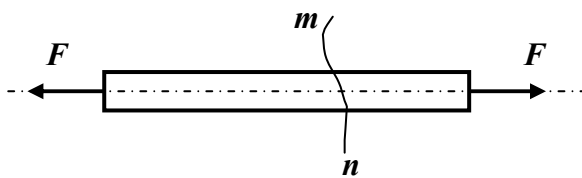


Рис. 4.1. Стержень, що розтягується

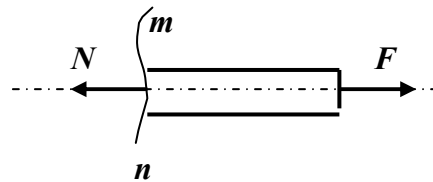


Рис. 4.2. Внутрішня сила в перерізі

У поперечному перерізі навантаженого таким чином стержня виникають тільки нормальні складові внутрішніх сил – N (рис. 3.2). Тому в довільному поперечному перерізі можуть виникати лише нормальні напруження. Причому ці напруження в кожній точці перерізу будуть однаковими, оскільки маленькі частки (диференціал) сили dN будуть однаковими на площадках dA , тобто формула

$$\sigma = \frac{dN}{dA}$$

може бути замінена на

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (4.1)$$

і тоді зрозуміло, що критерій міцності при розтягу – стиску можна записати так:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (4.2)$$

Слід зауважити, що може бути й інший варіант:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_{\min}} \leq [\sigma] \quad (4.3)$$

де $[\sigma]$ – це допустимий рівень напружень, який є однією з основних механічних характеристик конструкційного матеріалу. Методику його визначення описано у параграфах 3.8.,3.9. З умов міцності (4.2) та (4.3) або за відомими силами N_{\max} (визначеними за методом перерізів) можна знайти площу поперечного перерізу стержня A або навпаки, якщо площа перерізу відома, знайти внутрішні, а далі й зовнішні сили, які можна прикласти до стержня.

4.2. Деформації при розтягу – стиску

Розглянемо стержень, зображений на рис. 4.3.

Нехай він має довжину l і площу поперечного перерізу A . Цей стержень розтягується силою F , прикладеною до вільного кінця стержня та власною вагою.

При розтягу – стиску розглядають абсолютну деформацію – „видовження” – Δl та відносну – ε , що дорівнює відношенню абсолютного видовження до початкової довжини стержня і називається – „деформацією”:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (4.4)$$

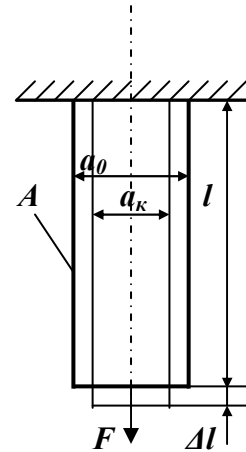


Рис.4.3. Розтяг стержня

розглянемо спочатку видовження без врахування власної ваги стержня.

Експериментально встановлена залежність

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad (4.5)$$

яка є відображенням закону Гука, що пов'язує між собою сили і видовження лінійною залежністю.

При цьому величина E – це модуль Юнга I роду (або модуль пружності I роду).

Томас Юнг (1773 – 1829) – вчений-енциклопедист.

Був домашнім учителем, лікарем, професором, секретарем Бюро довгот, видавничим наукових журналів, займався різними галузями науки. Був, до речі, першим із сучасних учених, хто прочитав єгипетські написи на папірусах. Займався фізикою, хімією, фізіологією, медициною, астрономією, геофізикою, механікою, технікою, філологією. Відкрив інтерференцію світла та заснував хвильову теорію світла. Розвинув теорію звуку. Розробив теорію згину консольної та звичайної балки, досліджував пружну та пластичну деформації. Розвинув теорію руйнування твердих тіл ударом. Увів поняття модуля пружності. Є одним з засновників науки про опір матеріалів.

Юнг увів цю величину, які є однією з найважливіших механічних характеристик матеріалу.

Залежність (4.5) може бути представлена у дещо іншому вигляді:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} ,$$

звідки $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ (4.6)

або $\sigma = E\varepsilon$ (4.7)

З виразів (4.6), (4.7) можна визначити, що E – це коефіцієнт пропорційності між напруженнями σ та деформаціями ε . Зрозуміло, що E має розмірність напружень (Па, кПа, МПа), оскільки ε – величина безрозмірна. Величину „ EA ” називають жорсткістю стержня при розтягу-стиску, а величину $\frac{EA}{l}$ – відносною жорсткістю.

4.3. Коефіцієнт Пуассона

Якщо до стержня прикладати навантаження вздовж осі, то в поперечному напрямку теж буде відбуватися деформація (рис.4.3). Якщо стержень уздовж осі буде видовжуватися, то в поперечному напрямі він буде звужуватися. Тоді поперечне видовження (точніше вкорочення) –

$$\Delta a = a_0 - a_k \quad (4.8)$$

і відповідно поперечна деформація:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} \quad (4.9)$$

Однією з найважливіших механічних характеристик матеріалу є так званий коефіцієнт Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| \quad (4.10)$$

Цей коефіцієнт є безрозмірною величиною, яка для конструкційних матеріалів змінюється в межах 0 – 0,5. Враховуючи, що поздовжня та поперечна деформації мають протилежні знаки, можна записати:

$$\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon \quad (4.11)$$

Слід відзначити, що для деяких матеріалів (наприклад, біологічних тканин) коефіцієнт Пуассона може бути навіть більшим від 1.

4.4. Статично визначені й статично невизначені системи, що працюють на розтяг - стиск

Для знаходження внутрішніх зусиль у стержневих системах використовують, насамперед, рівняння рівноваги.

Розглянемо стержневу систему (рис. 4.4). Стержні 1 та 2 можуть бути як однаковими (мається на увазі матеріал і поперечний переріз), так і різними.

Спробуємо визначити зусилля, що виникають у кожному з них.

Розглянемо рівновагу т.А. (рис. 4.5)

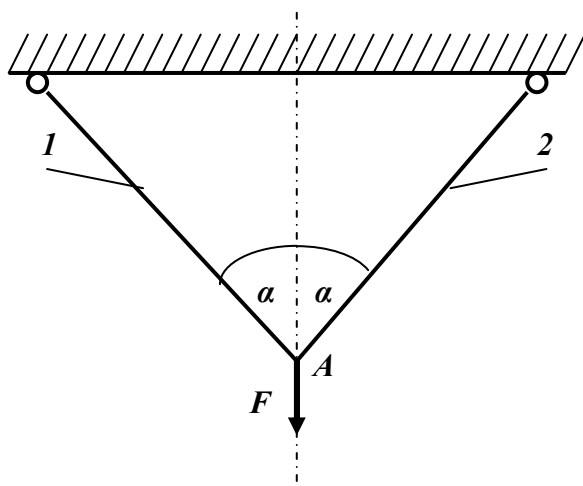


Рис. 4.4. Статично визначена система

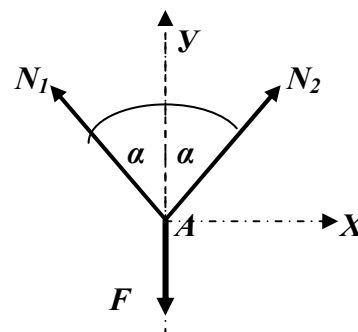


Рис. 4.5. Сили, прикладені до т.А

Позначивши зусилля, що виникають у стержнях, відповідно N_1 та N_2 , запишемо рівняння статки в системі координат XAY :

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - F = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Система практично має два рівняння і два невідомих. Такі системи розв'язують однозначно:

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \cos \alpha} . \quad (4.13)$$

Якщо кількість невідомих сил не перевищує числа лінійно незалежних рівнянь статки, систему називають *статично визначеною*.

Неважно впевнитися, що в *статично визначених* системах:

- сили в елементах конструкції *залежать* тільки від системи зовнішніх сил і геометрії системи та *не залежать* від матеріалу стержнів і їх поперечного перерізу;
- деформації в елементах системи можуть проходити *незалежно* одна від другої;
- стержні, за певних умов похибок по довжині при їх виготовленні, можуть з'єднуватися *без натягів* (тобто без монтажних напружень).

Статично невизначеною системою називають таку систему, в якій кількість невідомих перевищує число лінійно незалежних рівнянь статки. Кількість „зайвих” невідомих зумовлює ступінь статичної невизначеності.

Розглянемо стержневу систему, подібну вже розглянутій, але додавши ще один стержень -3 для збільшення вантажопідйомності (рис. 4.6).

Нехай стержні 1 та 2 – однакові й мають жорсткість $E_1 A_1$, а третій –

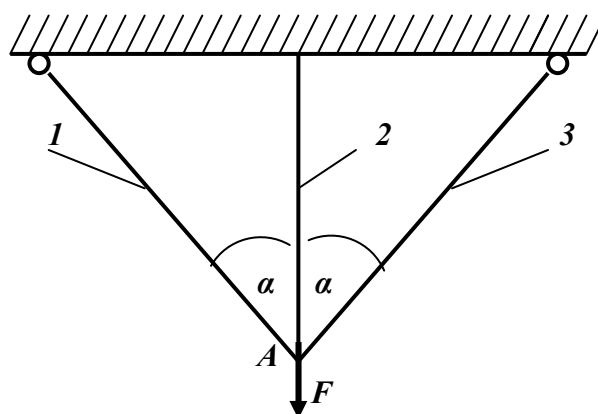


Рис.4.6. Статично-невизначена система

виготовлений з іншого матеріалу і має жорсткість $E_3 A_3$. Також відомі допустимі напруження для матеріалів цих стержнів, відповідно $[\sigma_1]$ та $[\sigma_3]$.

Треба знайти максимально допустиме навантаження F .

Знайдемо сили, які діють у стержнях. Для цього розглянемо рівновагу точки A (рис. 4.7).

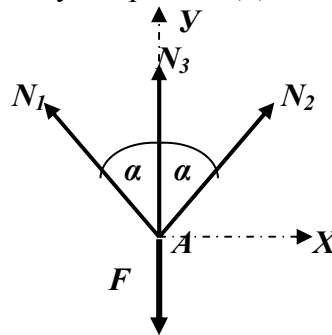


Рис. 4.7. Сили, прикладені до т.А

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - F = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Невідомих три, рівнянь статички – два. Одне невідоме – “зайве”. Кількість “зайвих” невідомих визначає ступінь статичної невизначеності. Наприклад, система, що розглядається, є один раз статично невизначеною.

Для подальшого розв’язування задачі в доповнення до процесу рівноваги треба розглянути переміщення в системі (рис. 4.8). Т.А переміститься в т. А'. При цьому, враховуючи гіпотезу про малі деформації, можна вважати, що кут α при т. А не змінює свою величину.

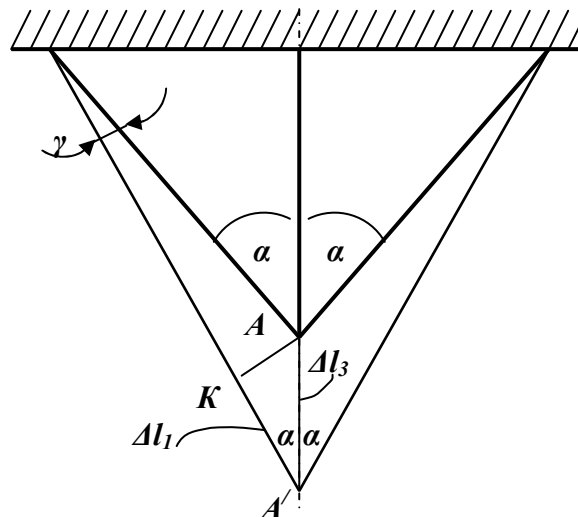


Рис. 4.8. Деформації в системі

Для визначення видовження першого або другого (вони ідентичні) стержня з т. А опустимо $\perp AK$ на BA' (взагалі, потрібно було б радіусом, рівним BA , відтяти таку ж

довжину на BA' , але внаслідок зникаючої малості кута γ це буде практично одне й те ж). Тоді відрізок KA' і буде видовженням Δl_1 першого стержня. А відрізок AA' – видовження третього стержня Δl_3 .

Запишемо співвідношення між ними:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha . \quad (4.15)$$

Це рівняння називають *рівнянням сумісності деформацій*. Таких рівнянь потрібно записати стільки (розглядаючи відповідні переміщення), скільки є „зайвих” невідомих (тобто за ступенем статичної невизначеності).

Рівняння сумісності деформацій записане у вигляді (4.15) не може бути розв’язане сумісно з системою рівнянь (4.14). Тому спочатку потрібно, використавши закон Гука, переписати рівняння (4.15) таким чином:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} \cos \alpha . \quad (4.16)$$

Враховуючи, що $\Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha$, можна записати:

$$N_1 = N_3 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha . \quad (4.17)$$

А тепер, підставляючи (3.17) у (3.14), після невеличких перетворень отримаємо:

$$N_3 = \frac{FE_3 A_3}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} \quad (4.18)$$

та, повертаючись до (4.17)

$$N_1 = \frac{FE_1 A_1}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} \cos^2 \alpha . \quad (4.19)$$

З виразів (4.18) та (4.19) витікає, що сили в елементах статично невизначеної системи залежать не тільки від системи зовнішніх сил та геометрії системи, як у випадку статично визначеної системи, але й від співвідношення жорсткостей цих елементів, причому чим більшу жорсткість має стержень, тим більшу частину навантаження він бере на себе.

Далі від внутрішніх зусиль переходимо до напружень:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{FE_1 \cos^2 \alpha}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} ; \quad (4.20)$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{FE_3}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} \quad (4.21)$$

та до умов міцності

$$\sigma_1 = \frac{FE_1 \cos^2 \alpha}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} \leq [\sigma_1] ; \quad (4.22)$$

$$\sigma_3 = \frac{FE_3}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} \leq [\sigma_3] . \quad (4.23)$$

З цих двох виразів отримаємо два значення сили F . Для подальших розрахунків виберемо, безумовно, *найменше* з цих двох значень сили.

Цікавим буде той випадок, коли жорсткість середнього стержня така ж сама, як і жорсткість крайніх стержнів. Тобто $E_1 = E_3 = E$, $A_1 = A_3 = A$

Тоді формули (4.18) – (4.21) набудуть вигляду:

$$N_3 = \frac{F}{2 \cos^3 \alpha + 1}; \quad (4.24)$$

$$N_1 = \frac{F \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + 1}; \quad (4.25)$$

$$\sigma_3 = \frac{F}{A(2 \cos^3 \alpha + 1)}; \quad (4.26)$$

$$\sigma_1 = \frac{F \cos^2 \alpha}{A(2 \cos^3 \alpha + 1)}. \quad (4.27)$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $\sigma_3 \geq \sigma_1$, тому що $\cos^2 \alpha \leq 1$. Тоді умова міцності буде виглядати так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_3 = \frac{F}{A(2 \cos^3 \alpha + 1)} \leq [\sigma]. \quad (4.28)$$

Розглянутий метод розрахунку статично невизначених систем називають – *розрахунком за допустимими напруженнями*.

4.5. Температурні та монтажні напруження

4.5.1. Температурні напруження

Розглянемо стержень, жорстко закріплений з обох кінців (рис. 4.9).

Нехай відомі його механічні параметри: довжина – l , площа поперечного перерізу – A , модуль Юнга E і роду – E , коефіцієнт лінійного температурного розширення – α .

Цей стержень закріплено при температурі t_0 , після чого температура піднялася на Δt . Треба розрахувати напруження, які при цьому виникають у стержні.

Розглянемо сили, які виникають у стержні. Внаслідок температурного впливу стержень намагається розширитися, але це йому не вдається завдяки жорсткому закріпленню кінців (рис. 4.10).

Виникають реакції опор R_l та R_{np} .

Розглядаючи рівновагу за допомогою рівнянь статки

$$\sum X = R_l - R_{np} = 0, \quad (4.29)$$

можна з'ясувати лише, що $R_l = R_{np}$. Рівняння статки одне, а невідомих – два.

Система один раз статично невизначена. Складаємо рівняння сумісності деформації, розглядаючи можливі температурні деформації Δl та деформації за рахунок сил R_l та R_{np} – $\Delta l(R)$.

$$\Delta l_t = \Delta l(R) \quad (4.30)$$

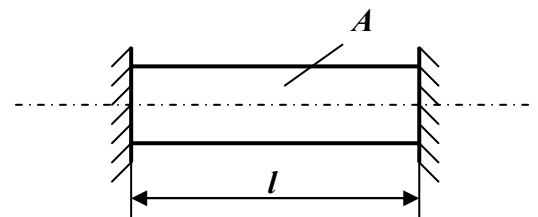


Рис.4.9. Нагріваний стержень

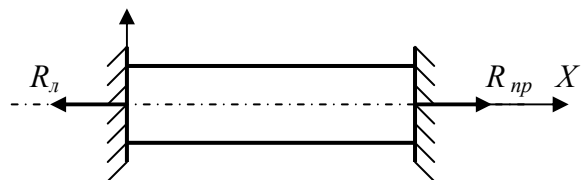


Рис.4.10. Сили, що виникають при нагріванні

або
$$\Delta\alpha_l\Delta t = \frac{R_n l}{EF}, \quad (4.31)$$

тоді
$$\sigma = \frac{R_n}{F} = E\alpha_l\Delta t. \quad (4.32)$$

Цікавим є те, що напруження в даному випадку не залежить від довжини стержня.

4.5.2. Монтажні напруження

Розглянемо систему (рис. 4.11.) в якій один з елементів зроблено не за розміром (середній стержень коротший, ніж треба), але всі стержні треба з'єднати в одній точці *C* (рис. 4.12). Нехай стержні зроблено з одного й того ж матеріалу і мають однаковий поперечний переріз.

Позначимо крайні стержні 1 та 3, а середній – 2. Розглядаючи т.*C*, яка лежить між точками *A* і *B* і в якій з'єднуються всі три стержні при монтажі, можна скласти три рівняння статички:

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - N_2 = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Очевидно, що система є один раз статично невизначеною. Розглянемо сумісність деформацій стержнів. З рис.4.13 випливає, що

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} + \Delta l_2 = \Delta. \quad (4.34)$$

Використовуючи закон Гука, отримуємо ще одне рівняння

$$\frac{N_1 l_1}{EF \cos \alpha} + \frac{N_2 l_2}{EF} = \Delta, \quad (4.35)$$

яке має розв'язуватися разом із системою (4.33).

Таким чином, можна зробити висновок, що розв'язок наведених задач зводиться до розгляду статично невизначених систем.

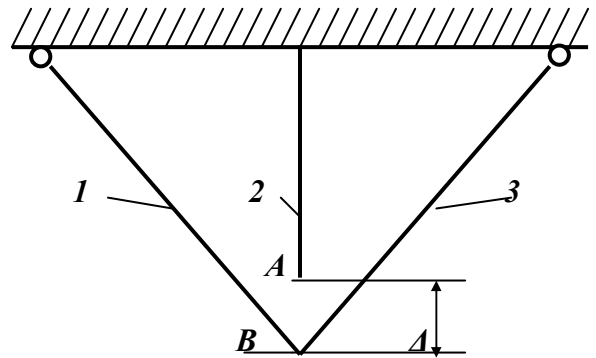


Рис. 4.11. Система, в якій виникають монтажні напруження

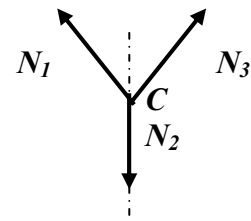


Рис. 4.12. Розподіл сил

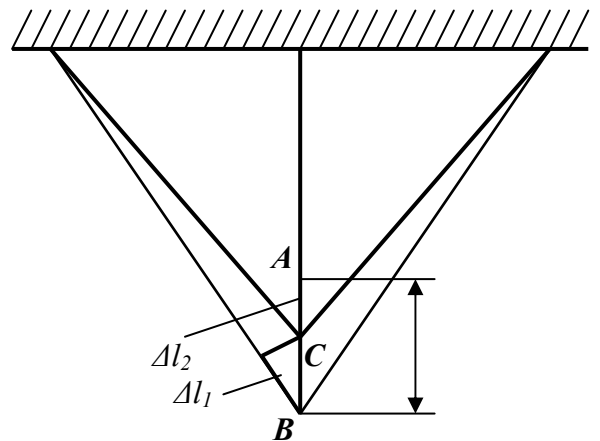


Рис.4.13. Деформації в системі

4.6. Урахування власної ваги та сил інерції при розтягу – стиску

У більшості випадків зовнішні навантаження в елементах конструкцій значно перевищують власну вагу самих елементів або сил інерції, що виникають при прискореннях цих елементів. Але бувають випадки, коли цими факторами неможливо нехтувати. Дію власної ваги або сил інерції враховують як розподілене по довжині стержня навантаження.

При врахуванні власної ваги формула (4.5) дещо змінюється. Нехай питома вага стержня, зображеного на рис. 4.14 – γ .

Тоді нормальна сила в довільному перерізі на відстані x від вільного кінця стержня

$$N(x) = F + \gamma Ax . \quad (4.36)$$

Розглянемо видовження короткої ділянки цього стержня довжиною dx :

$$\Delta dx = \frac{(F + \gamma Ax)dx}{EA} . \quad (4.37)$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\Delta x = \int_0^x \frac{(F + \gamma Ax)dx}{EA} = \frac{Fx}{EA} + \frac{\gamma Ax^2}{2EA} . \quad (4.38)$$

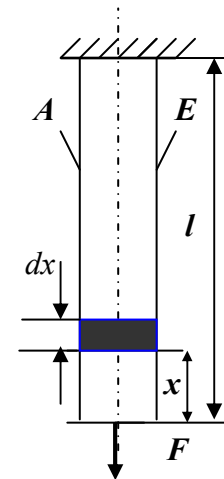


Рис.4.14. Навантажений стержень

З цієї формули очевидно, що характер розподілу видовжень при врахуванні власної ваги є квадратичним на відміну від лінійного розподілу при врахуванні тільки зовнішніх сил.

Неважко помітити, що видовження стержня довжиною l буде в цьому випадку

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma Al^2}{2EA} \quad (4.39)$$

або

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{Ql}{2EA} , \quad (4.40)$$

де Q – власна вага стержня.

Наприклад: нехай є стержень, навантажений зовнішньою силою F та власною вагою (рис. 4.15, а). Нехай площа поперечних перерізів всюди однакова й дорівнює A , модуль Юнга I роду – E ; довжини ділянок відповідно – a і b , питома вага – γ .

Запишемо функції розподілу нормальних сил і напружень у довільному перерізі нижньої частини стержня ($0 \leq x < a$):

$$N_1(x) = \gamma Ax ; \quad (4.41)$$

$$\sigma_1(x) = \frac{N(x)}{A} = \gamma x . \quad (4.42)$$

Розглянемо деформацію першої ділянки. Видовження дуже малої ділянки довжиною dx на відстані x від нижнього кінця буде дорівнювати:

$$\Delta dx = \frac{N(x)dx}{EA} \quad (4.43)$$

Щоб отримати закон розподілу, треба проінтегрувати цей вираз:

$$\Delta x = \frac{N(x)x}{2EA} = \frac{\gamma Ax^2}{2EA} \quad (4.44)$$

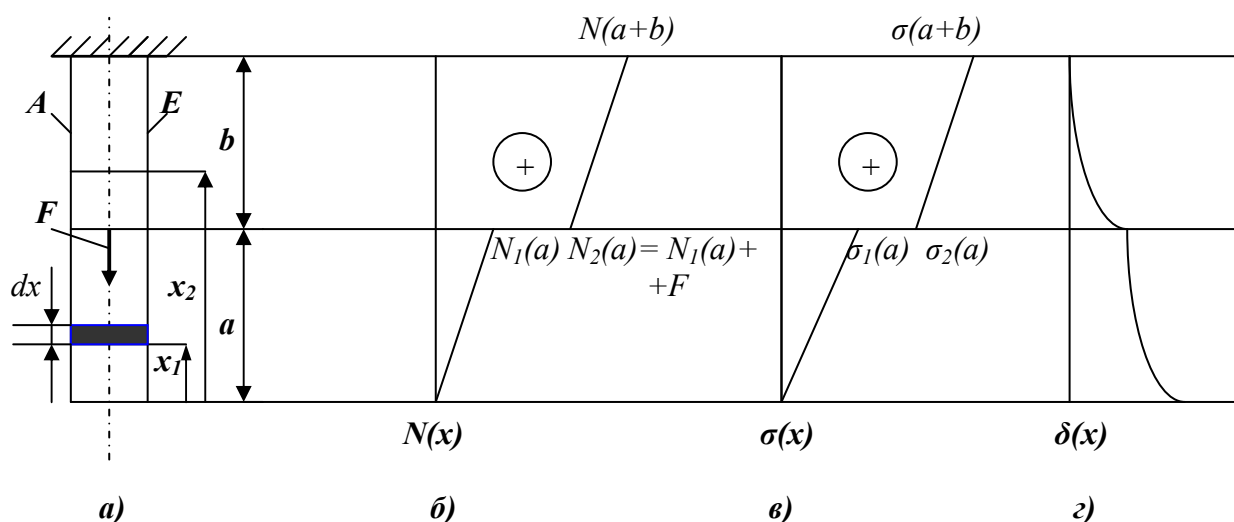


Рис. 4.15. Стержень, що розтягується з урахуванням власної ваги (а). Розподіл нормальних сил (б), нормальних напружень (в) та переміщень (г)

Повністю на довжині „а” стержень буде мати видовження:

$$\Delta a = \frac{N(a)a}{2EA} = \frac{\gamma Aa^2}{2EA} \quad (4.45)$$

Перейдемо до другої ділянки ($a \leq x \leq a+b$) і запишемо аналогічні функції.

Очевидно:

$$N_2(x) = N(a) + F + \gamma A(x-a); \quad (4.46)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2(x)}{A} = \frac{N(a)+F}{A} + \gamma(x-a); \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \Delta a + \frac{(N(a)+F)(x-a)}{EA} + \frac{N(x-a)(x-a)}{2EA} = \\ &= \Delta a + \frac{(N(a)+F)(x-a)}{EA} + \frac{\gamma(x-a)^2}{2E}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Тобто в даному випадку можна узагальнити, що функції нормальних сил та напружень при врахуванні власної ваги є *лінійними*, а функції переміщень та видовжень – *квадратичними*.

Епюри розподілу величини $N(x)$ $\sigma(x)$ та $\delta(x)$ зображені на рис. 4.15,б, в, г.

Аналогічні висновки можна зробити і для дії сил інерції.

4.7. Розрахунок статично невизначених систем за граничним станом

Тепер, знаючи механічні властивості пластичних матеріалів, можна запропонувати ще один метод розрахунку на міцність статично невизначених систем, які працюють на розтяг-стиск.

У деяких випадках при статичному навантаженні системи можна розраховувати за припущенням, що в окремих їх елементах напруження можуть перевищувати допустимі або навіть виходити на рівень границі текучості. Зрозуміло, що при цьому повинна виконуватися умова міцності для всієї конструкції в цілому.

Принцип цього розрахунку полягає в тому, що конструкційні матеріали у більшості випадків є пластичними і мають площадку текучості. Якщо в процесі навантаження в стержнях виникають різні деформації та напруження, що їм відповідають, то можливий варіант, коли при виході напружень у стержнях на рівень текучості вони стануть рівними між собою в той час, як деформації в них будуть різними.

У цьому випадку зусилля в будь-якому „ i ”-ому стержні буде знайдено як

$$N_i = \sigma_i F_i \quad (4.38)$$

Тоді ці вирази для N_i можна підставити у рівняння статички, отримавши при їх розв'язанні величину навантаження Q_m^k – так звану *критичну силу*, яке вводить усю систему в стан текучості. Так як дію на систему такої сили Q_m^k , яка б повністю вводила систему в стан текучості, допустити не можна, слід зменшити її значення у „ k ” разів. Тобто

$$Q_{дон} = \frac{Q_m^k}{k}. \quad (4.39)$$

Цілком зрозуміло, що застосування методу розрахунку на міцність за допустимими навантаженнями (за граничною вантажопідйомністю) передбачає наявність у деяких елементах системи напружень, що виходять на рівень текучості, і дасть значення сили $Q_{дон}$ дещо більшим, ніж застосування методу розрахунку за допустимими напруженнями, ідеєю якого є вихід максимальних напружень на рівень допустимих, тобто значно менших від границі текучості:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \text{де} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{k}.$$

5. Складний напружений стан

Нехай є навантажене зовнішніми силами F_i тіло (рис. 5.1). Виріжемо в довільній точці цього тіла елементарний об'єм у вигляді кубика, зображеного на рис. 5.2.

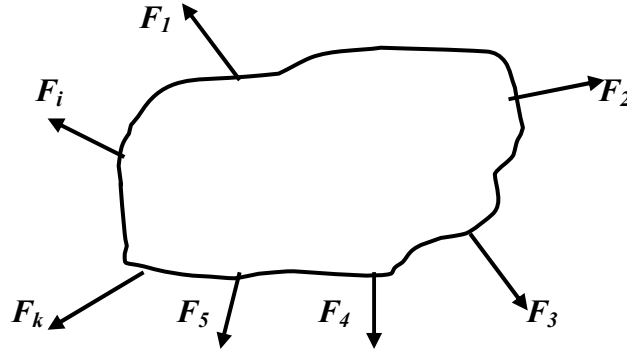


Рис. 5.1. Навантажене тіло

По гранях цього кубика в загальному випадку діятимуть 9 компонент напружень. Нормальні $\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z$, та дотичні $\tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yx}; \tau_{yz}; \tau_{zx}; \tau_{xy}$.

З курсу теорії пружності відомо, що можна вибрати таку орієнтацію граней кубика, що дотичні напруження зникнуть і залишаться тільки нормальні (рис. 5.3).

Площинки, на яких діють тільки нормальні напруження, а дотичні відсутні, називають *головними площадками*, а відповідні нормальні напруження, що діють по цих площадках називають *головними напруженнями*. Головні напруження позначають $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$. При цьому прийнято, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (з урахуванням знака).

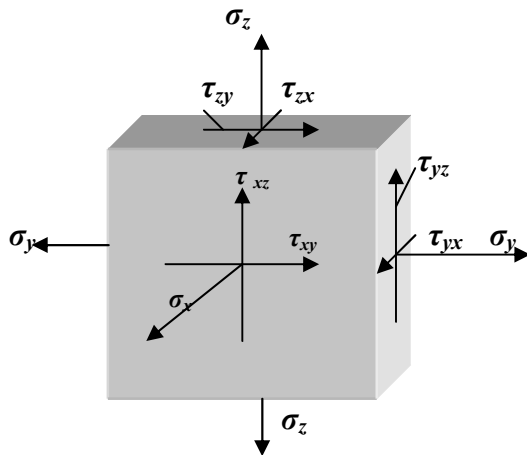


Рис. 5.2. Напруження на гранях кубика в загальному випадку

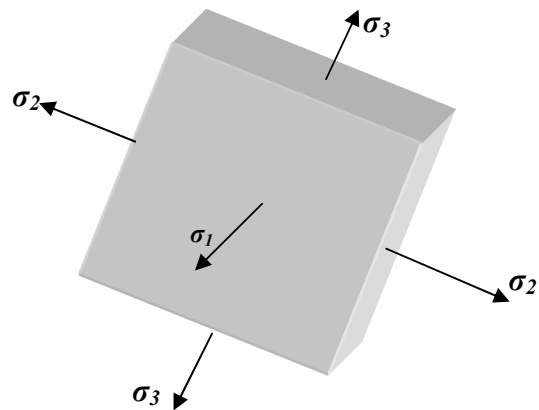


Рис. 5.3. Напруження на головних площадках

Розрізняють три види напруженого стану:

- *лінійний* – коли одне з головних напружень не дорівнює нулю, а два інших дорівнюють нулю. Тут можливі два варіанти – перший, коли $\sigma_1 \neq 0$, а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, – це одновісний розтяг і другий, коли $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, а $\sigma_3 \neq 0$, – це одновісний стиск;

- *плоский* – коли одне з головних напружень дорівнює нулю, а два інших не дорівнюють нулю;
- *об'ємний* – коли жодне з головних напружень не дорівнює нулю.

5.1. Лінійний напружений стан. Напруження на площадках, розташованих під кутом до осі стержня

Розглянемо напруження, які виникають у розтягнутому стержні на різних площадках (рис. 5.4). Власною вагою стержня в цьому випадку будемо нехтувати.

На площадці, нормальній до осі – A_0 , виникають напруження:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_0} \text{ при } N = F. \quad (5.1)$$

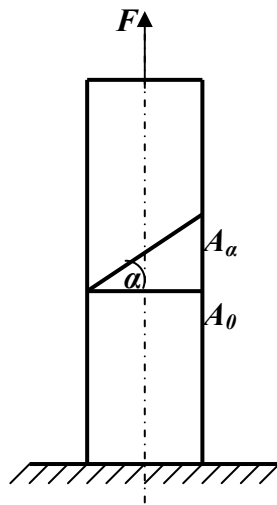


Рис. 5.4. Лінійний напружений стан

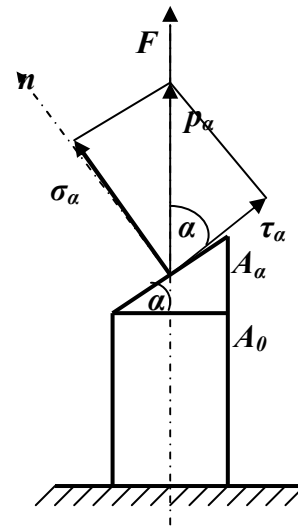


Рис. 5.5. Розподіл напружень на нахиленій площадці

Тепер розглянемо напруження на площадці A_α , нахиленій під кутом α до площини A_0 (α – кут між нормаллю до площадки A_α і віссю стержня) (рис 5.5).

Повне напруження на цій площадці

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{F}{A_0} \cos \alpha, \quad (5.2)$$

тому що

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha}.$$

Тоді $p_\alpha = \sigma_0 \cos \alpha$ (5.3)

Розглядаючи складові, будемо мати:
нормальне напруження

$$\boxed{\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha} \quad (5.4)$$

і дотичне напруження

$$\tau_{\alpha} = \sigma_0 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \quad (5.5)$$

При цьому не важко переконатися, що виконується залежність

$$p_{\alpha}^2 = \sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\alpha}^2 \quad (5.6)$$

Слід зауважити: якщо нормальне напруження вважається додатнім при розтягу, а від'ємним – при стиску, то дотичне напруження на грані вважається додатнім, якщо воно намагається повернути частину елемента, що розглядається, за годинниковою стрілкою. Від'ємним буде протилежний напрямок.

5.2. Плоский напружений стан

5.2.1. Пряма задача (аналітичне виведення)

Розглянемо елемент у вигляді кубика, „вирізаного” з тіла на головних площадках. Нехай він знаходиться у плоскому напруженому стані (рис. 5.6,а) і головні напруження задані таким чином: $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0$.

Треба знайти напруження на площадці, повернутої на кут α до тієї головної, де діє σ_1 (рис. 5.6,б).

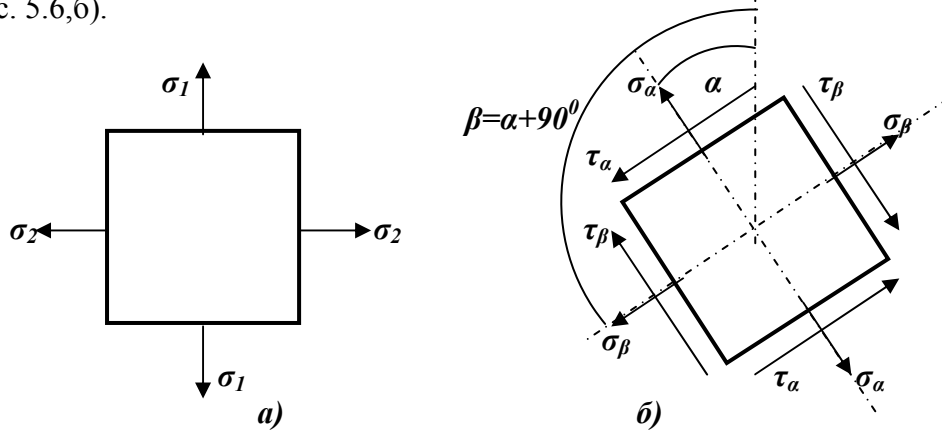


Рис. 5.6. Плоский напружений стан: а) головні площадки; б) площадки, розвернуті відносно головних

Розглянемо рис. 5.7.

Використовуючи принцип суперпозиції, на основі (5.4) та (5.5) можна записати:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\beta$$

або, враховуючи, що $\beta = \alpha + 90^\circ$;

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (5.7)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (5.8)$$

Тепер запишемо напруження, які виникають на площадці, перпендикулярній до нами розглянутої (тобто розвернутої до тієї головної, де діє σ_1 , на кут β (рис. 5.6,б та 5.7).

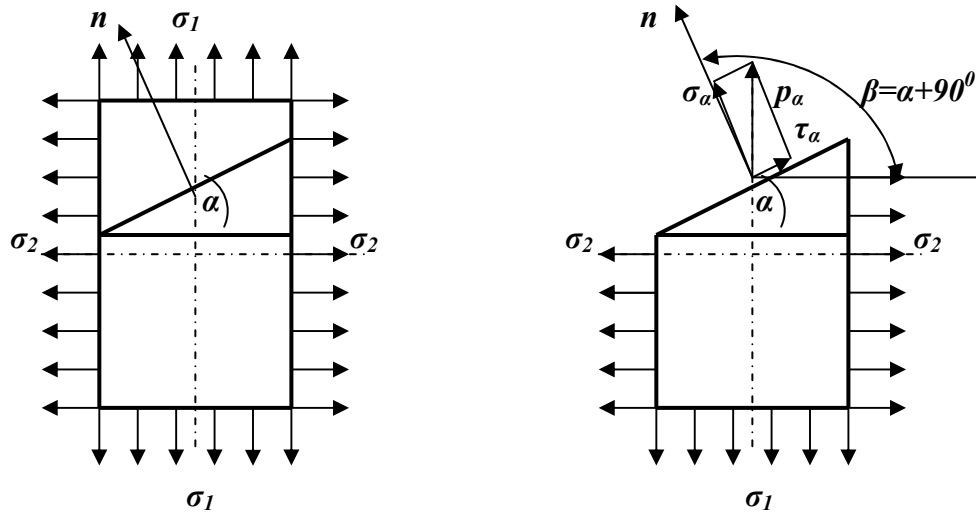


Рис. 5.7. Плоский напружений стан. Зміна напружень при повертанні площадок

Тоді
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2(\alpha + 90^\circ)$$

і
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \quad . \quad (5.9)$$

Аналогічно
$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(\alpha + 90^\circ),$$

а
$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad . \quad (5.10)$$

Дослідимо вираз (5.7) на extremum.

$$(\sigma_\alpha)' = -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0. \quad (5.11)$$

Звідси випливає, що нормальні напруження досягають max та min значень там, де дотичні дорівнюють 0. Тобто головні напруження є екстремальними.

Відносно τ_α зрозуміло, що найбільше значення (за модулем) τ_α отримає, якщо $\sin 2\alpha = 0$, тобто $\alpha = \pm 45^\circ$ та кратні їм кути.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad . \quad (5.12)$$

Складемо почленно (5.7) та (5.9), тоді

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 \quad . \quad (5.13)$$

Тобто сума нормальних напружень на взаємно перпендикулярних площадках є величиною сталою. Порівнюючи (5.8) та (5.10) неважко помітити, що

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta \quad (5.14)$$

У теорії напруженого стану можна розмежувати дві основні задачі. Перша – *пряма задача* – коли задано головні напруження і кут повороту площадки, на якій треба визначити напруження σ_α і τ_α . Друга – *обернена задача* – коли задані напруження на неголовних площадках і треба визначити величини головних напружень та орієнтацію головних площадок. Обидві задачі можна розв’язати як аналітично, так і графічно – за допомогою кругів Мора.

Мор Христіан Отто (1835-1918) – німецький учений. Один із засновників графічної кінематики, розробив так званий *метод трьох моментів*, створив одну з діючих теорій міцності. Розробив *метод сил* для розкриття статичної невизначеності та узагальнив формули Максвелла (теорема Максвелла – Мора).

5.2.2. Круги Мора (пряма задача)

Круг Мора – це геометричне місце точок (у випадку плоского напруженого стану – коло), координати яких відповідають чисельним значенням нормальних і дотичних напружень, що діють у точці на площадках, які мають різні кути нахилу.

Тобто круг Мора – це геометрична інтерпретація напруженого стану в певній точці навантаженого твердого тіла.

Нехай задано головні напруження σ_1 та σ_2 , а треба знайти напруження на площадках розвернутих під кутом α до головних площадок (рис. 5.8).

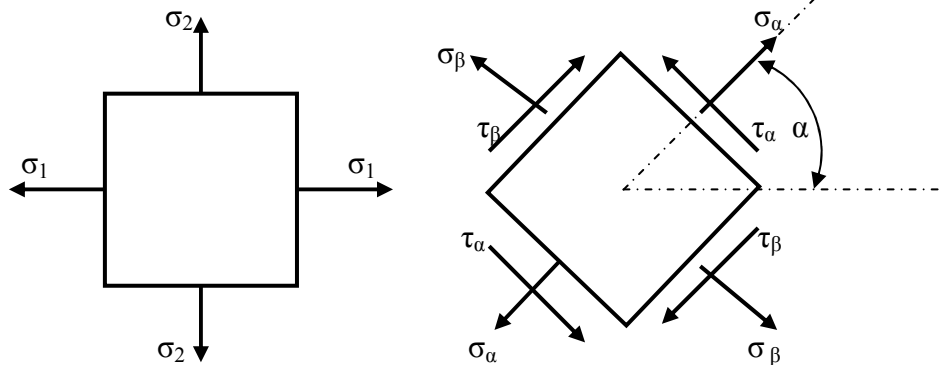


Рис. 5.8. Плоский напружений стан. Пряма задача

Вибираємо орієнтацію осей σ та τ таким чином, щоб вісь σ співпадала з напрямком більшого з головних напружень. Вісь τ буде спрямована перпендикулярно (рис. 5.9).

Відкладаємо на осі σ значення σ_1 та σ_2 (т.т. A та B). Після цього ділимо відстань між отриманими точками навпіл і вибираємо цю точку за центр кола, яке базується на відрізку осі AB як на діаметрі.

Як вже було сказано, круг Мора – це геометричне місце точок, координати яких відображають напруження на площадках, нахилених під різними кутами в точці тіла, що досліджується. Тому для того, щоб знайти напруження на площадці, нахиленій до головної під кутом α , слід з центра кола C провести промінь під кутом 2α або з точки на

осі σ , що відповідає σ_{\min} , провести промінь під кутом α . Перетин цих променів із колом дасть точку D (рис. 5.9), координати якої будуть відповідати σ_α та τ_α .

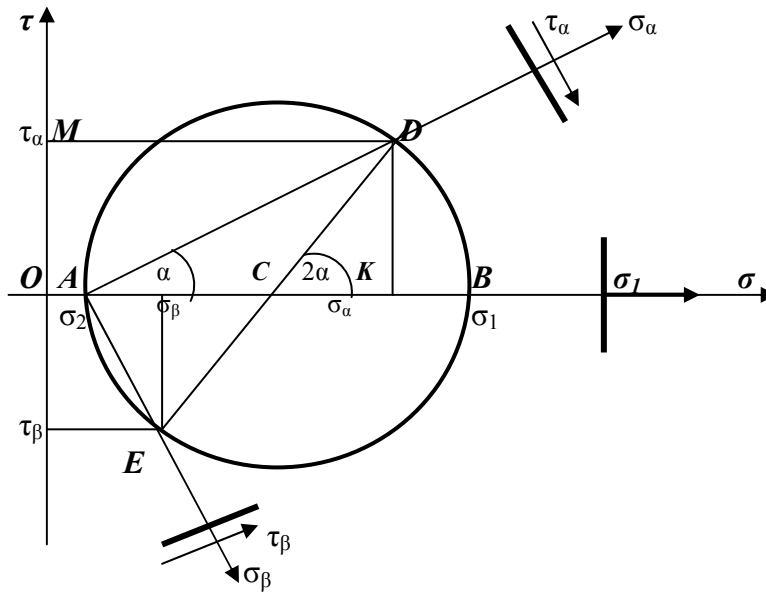


Рис. 5.9. Круг Мора. Пряма задача

Дійсно, радіус кола

$$AC = BC = DC = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Тоді $\sigma_\alpha = OA + AC + CK = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha;$ (5.15)

$$\tau_\alpha = DK = DC \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$
 (5.16)

Координати т. E , діаметрально протилежній т. D , відображають напруження по площадці, що розвернута на 90° до попередньої.

Напрямок σ_α та σ_β визначають напрямом променів AD та AE відповідно. Орієнтацію τ_α та τ_β визначають знаком координати τ .

5.2.3. Круги Мора (обернена задача)

Нехай задані напруження на взаємно перпендикулярних неголовних площадках $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ та $\sigma_\beta \tau_\beta$ (рис. 5.10). Треба визначити величини і напрямом головних напружень (тобто $\sigma_{\max}; \sigma_{\min}; \alpha$). Спочатку ми не знаємо, яку пару головних напружень отримаємо – $\sigma_1 \sigma_2$ чи $\sigma_2 \sigma_3$ чи $\sigma_1 \sigma_3$. Це буде залежати від знака отриманих напружень. Якщо обидва напруження вийдуть зі знаком „+” – це σ_1 та σ_2 ($\sigma_3 = 0$); якщо обидва матимуть знак „-”, – це σ_2 та σ_3 ($\sigma_1 = 0$). Якщо знаки різні – це пара σ_1 та σ_3 ($\sigma_2 = 0$). Домовимося вибирати $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$.

У цьому випадку побудову круга Мора робимо так. Вісь σ орієнтуємо за напрямком σ_α , а ось τ – по нормалі до неї (рис. 5.11).

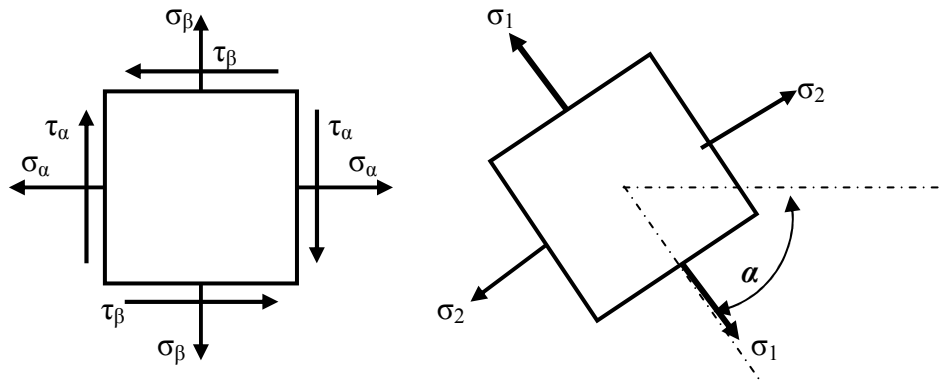


Рис. 5.10. Плоский напряжений стан. Обернена задача

Далі позначаємо т. A та B , координати яких $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ та $\sigma_\beta \tau_\beta$ – відповідно. Сполучаємо між собою ці точки і на цьому відрізку AB , як на діаметрі, будуємо коло з центром у т. C (перетині відрізка AB з віссю σ).

Перетин кола з віссю σ дає в т. D та E відповідні головні напруження σ_1 та σ_2 (σ_3 в цьому випадку $=0$).

Для визначення напрямку σ_1 треба з т. A опустити перпендикуляр на вісь σ до перетину його з колом в т. F . Промінь, проведений з т. E ($\sigma_2; 0$) через цю т. F , визначить напрямок σ_1 .

Аналогічно визначаємо напрям меншого з головних напружень (у даному випадку σ_2). З т. B перпендикулярно до осі σ проводимо промінь до перетину з колом у т. K , після чого промінь з т. E через т. K задає напрям σ_2 .

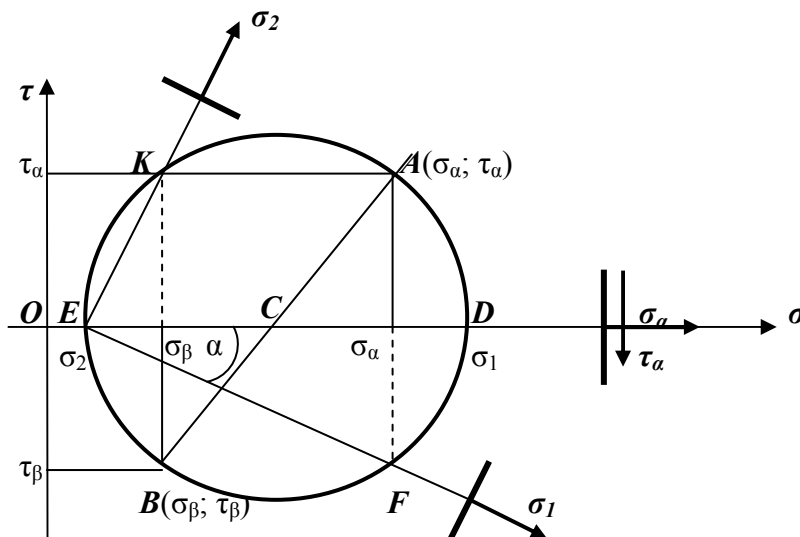


Рис. 5.11. Круг Мора. Обернена задача

5.2.4. Обернена задача (аналітичне виведення)

Тепер отримаємо аналітичні залежності для розв'язування оберненої задачі. Для цього можна або розглянути залежності (5.7; 5.10) або вивести їх за допомогою круга Мора. Розглянемо останній шлях.

$$\sigma_1 = OD = OC + CD = OC + AC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

або
$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right] \quad (5.17)$$

Аналогічно
$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right] \quad (5.18)$$

Кут α можна обчислити використовуючи залежність

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\tau_\alpha}{\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}} = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} \quad (5.19)$$

Знак „-“, з'являється з геометричних міркувань (рис. 5.11).

Можна також використати залежність

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_{\max} - \sigma_\beta} \quad (5.20)$$

5.3. Октаедричні напруження

При вивченні пластичних деформацій цікавими є дотичні напруження, що діють на площадці, рівно нахиленій до всіх головних напрямів. Таку площадку називають *октаедричною* (рис. 5.12).

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Враховуючи, що завжди

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1,$$

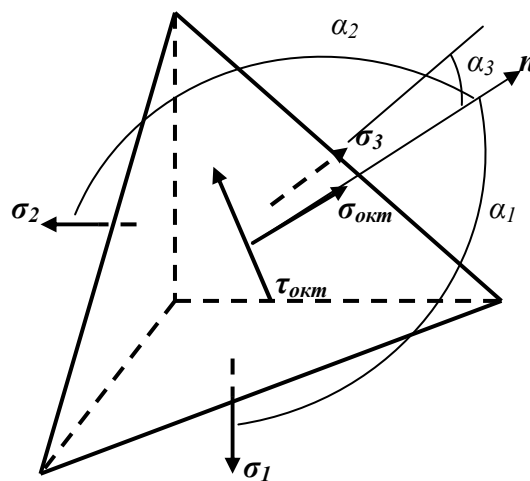


Рис. 5.12. Напруження на октаедричних площадках

отримаємо, що $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

Тоді

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{окт} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

В теорії пластичності зручно вводити так звану інтенсивність напружень σ_i .

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт} \quad (5.23)$$

або

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.4. Об'ємний напружений стан

5.4.1. Узагальнений закон Гука

Розглянемо елементарний об'єм напруженого тіла, вирізаний у вигляді кубика на головних площадках (рис. 5.11). Розглянемо деформації у напрямі дії σ_1 :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E} \mu - \frac{\sigma_3}{E} \mu$$

або

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Залежності (5.25) називають *узагальненим законом Гука для ізотропного тіла*.

Ці вирази справедливі не тільки для головних, але й для будь-яких трьох взаємно перпендикулярних напрямків, оскільки при малих деформаціях вплив зсуву на лінійну деформацію є малою величиною другого порядку.

5.4.2. Об'ємна деформація

Нехай елементарний об'єм у вигляді прямого паралелепіпеда має до деформації розміри $a; b; c$, а після деформації $(a + \Delta a)$; $(b + \Delta b)$ та $(c + \Delta c)$ відповідно.

Тоді його початковий об'єм дорівнює

$$V_0 = abc, \quad (5.26)$$

а кінцевий відповідно

$$V_k = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc + ab\Delta c + ac\Delta b + \\ + cb\Delta a + a\Delta b\Delta c + b\Delta a\Delta c + c\Delta a\Delta b + \Delta a\Delta b\Delta c.$$

Зрозуміло, що у цьому виразі останні чотири члени є нескінченно малими величинами порівняно з рештою членів.

Тоді відносна зміна об'єму

$$\theta = \frac{V_k - V_0}{V_0} \approx \frac{ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a}{abc}$$

або

$$\boxed{\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}. \quad (5.27)$$

Використавши (5.25) перетворимо (5.27) так

$$\boxed{\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}. \quad (5.28)$$

5.4.3. Питома потенціальна енергія зміни форми

Питома потенціальна енергія деформації u – це енергія, яка накопичується в елементарному об'ємі тіла при його пружній деформації. Повну питому потенціальну енергію при розгляді деяких процесів доцільно уявити у вигляді суми двох компонент u_v – питомої потенціальної енергії, яка йде на зміну об'єму; та u_ϕ – питомої потенціальної енергії, яка йде на зміну форми.

Уявивши собі деформацію, коли змінюється об'єм, але форма залишається незмінною, використовуючи закон Гука та вводячи поняття усереднених напружень і деформацій, неважко вивести формулу

$$\boxed{u_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}. \quad (5.29)$$

Якщо розглядати кубик із довжинами граней, які дорівнюють одиниці, можна записати

$$\boxed{u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}}. \quad (5.30)$$

Або застосувавши закон Гука (5.25)

$$\boxed{u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]}. \quad (5.31)$$

Тоді можна знайти u_ϕ як різницю $u - u_v$. Тобто після перетворень

$$u_\phi = u - u_v = \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] . \quad (5.32)$$

Це й буде виразом для знаходження питомої потенціальної енергії формоутворення.

5.5. Теорії міцності

Міцність тіла, що знаходиться у складному напруженому стані навряд, чи може бути оцінена порівнянням із допустимим напруженням тільки одного, нехай і найбільшого напруження. Але все-таки перше найпростіше припущення полягає в тому, що *небезпечний стан матеріалу настає в той момент, коли найбільше за абсолютною величиною нормальне напруження досягає небезпечного значення*. Цю гіпотезу називають *теорією найбільших напружень* або *першою теорією міцності*.

Таким чином, і в загальному випадку, коли всі три головні напруження σ_1, σ_2 і σ_3 не дорівнюють нулю, при перевірці за цією теорією необхідно враховувати величину лише найбільшого розтягуючого та найбільшого стискаючого напруження. Величини ж двох інших головних напружень відсутні і, начебто, ніякого впливу на міцність матеріалу, на досягнення ним небезпечного стану не впливають і про них при перевірці міцності можна забути. Тоді до певної міри втрачається відмінність між перевіркою міцності при лінійному напруженому стані та при об'ємному.

Умови міцності для обох випадків записують однаково:

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 \leq [\sigma] \text{ або } \sigma_I = |\sigma_3| \leq [\sigma] . \quad (5.33)$$

При перевірці вказаної гіпотези дослідями виявилася невідповідність її висновків із результатами дослідів на всебічний стиск не тільки пластичних матеріалів, але й крихких. Лише для випадку розтягу крихких матеріалів ця теорія узгоджується з дослідями. Оскільки ця теорія дає або зайві, або недостатні розміри перетинів елементів конструкцій при складному напруженому стані, її не застосовують і вона має лише історичне значення.

Висунута недоліками першої, і певною мірою на противагу їй, *друга гіпотеза пропонує виникнення небезпечного стану визначати не рівнем найбільшого напруження, а величиною найбільшого відносного видовження (або вкорочення)*.

Якщо це так, то перевірку міцності слід проводити за найбільшими відносними деформаціями. Зберігаючи той же коефіцієнт запасу, для найбільшої відносної повздовжньої деформації в загальному випадку (всі головні напруження не рівні нулю) за допустиму ми повинні вибирати ту ж величину, що і при простому розтягу.

Тобто
$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\varepsilon] .$$

Для випадку ж лінійного напруженого стану ми знаємо величину допустимого напруження $[\sigma]$. За законом Гука

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E} .$$

$$\text{Тоді} \quad \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E} \quad (5.34)$$

і остаточно

$$\boxed{\sigma_{r2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma]} \quad (5.35)$$

Таким чином, приймаючи теорію найбільших відносних видовжень, необхідно порівнювати з допустимим напруженням, встановленим для простого розтягу або стиску, не те або інше головне напруження, а їх сукупність, так зване *приведене (розрахункове) напруження*, що визначається формулою:

$$\sigma_{r2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Ця гіпотеза також суперечить результатам досліджень міцності пластичних матеріалів. Якби вона була для таких матеріалів вірна, то зразок, що розтягується в двох або трьох напрямках, був би міцнішим за зразок, який розтягується лінійно. Досвід цього не підтверджує. Не підтверджується ця гіпотеза і при всесторонньому рівномірному стиску.

Для крихкого стану матеріалу теорія найбільших відносних деформацій дає результати, що, як правило, узгоджуються з дослідом.

Третя гіпотеза міцності (або теорія найбільших дотичних напружень) стверджує, що *головну роль у виникненні небезпечного стану матеріалу відіграє найбільше напруження, але вже не нормальне, а дотичне, що дорівнює напіврізниці найбільшого і найменшого головних напружень*:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

При цьому припущенні перевірку міцності треба здійснювати за дотичними напруженнями. Умова міцності має вигляд:

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Що стосується величини допустимих напружень $[\tau]$, то, вважаючи, що виникнення небезпечного стану залежить лише від найбільших дотичних напружень, при об'ємному напруженому стані ми повинні для цих напружень допускати ту ж величину, що і при простому розтягу.

Якщо при простому розтягу для нормальних напружень ми допускаємо величину $[\sigma]$, то тим самим для найбільших дотичних ми допускаємо значення $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ (див. 5.5).

Ці дотичні напруження, як відомо, діють на площадці, нахиленій під кутом в $\pm 45^\circ$ до напрямку розтягуючої сили.

Умова міцності для об'ємного напруженого стану набуває вигляду:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad \text{або} \quad \boxed{\sigma_{r3} = (\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma]} \quad (5.36)$$

Таким чином, приймаючи вказану гіпотезу, при перевірці міцності доводиться порівнювати з напруженням, що допускається, при розтягуванні або стискуванні не найбільше нормальне напруження, а різницю між найбільшим і найменшим нормальними (головними) напруженнями. Величина розрахункового (приведеного) напруження в цьому випадку дорівнює:

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Третя умова міцності достатньо близько узгоджується з результатами дослідів, особливо для пластичних матеріалів. Вона підтверджується дослідями на всебічний стиск. Ця теорія забезпечує міцність елементів конструкцій, що розраховуються.

У тому простому вигляді розрахункових напружень (5.36) умова міцності може бути написана лише для тих матеріалів, для яких допустимі напруження на розтяг і стиск можуть бути прийняті рівними, наприклад, для сталі. Для таких матеріалів, як чавун, камінь і т. д. в умову (5.36) необхідно внести зміни, які вперше запропонував Х.Мор.

Критерій Мора базується на положенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить, в основному, від величини та знака найбільшого – σ_1 і найменшого – σ_3 з головних напружень. Мор запропонував формулу для умови міцності, яка б враховувала різні рівні допустимих напружень при розтягу $[\sigma_+]$ та стиску $[\sigma_-]$ відповідно:

$$\sigma_{rM} = \left(\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \right) \leq [\sigma_+]. \quad (5.37)$$

Недоліком теорії найбільших дотичних напружень, що відразу впадає в очі, є та обставина, що вона не враховує впливу на роботу матеріалу середнього за величиною головного напруження. Виходить, що при постійних найбільшому σ_1 і найменшому σ_3 ми можемо, не змінюючи умов роботи матеріалу, як завгодно міняти величину середнього напруження σ_2 , лише б воно було менше σ_1 і більше σ_3 . Ця обставина є сумнівною. Досліди підтверджують, що величина напруження σ_2 все ж має вплив на міцність матеріалу.

У зв'язку з недоліками старих теорій виникли нові ідеї щодо того, який фактор викликає виникнення небезпечного стану.

Було зроблено припущення, що небезпечний стан матеріалу залежить не від величини деформацій або напружень окремо, а від сукупності тих та інших – від величини потенціальної енергії або від чисельно їй рівної питомої роботи деформації. Величина цієї роботи виражається через всі три головні напруження.

Якщо припустити, що причиною небезпечного стану є накопичення повної питомої потенціальної енергії деформації, то міцність матеріалу буде забезпечена за умови, коли

$$u \leq [u].$$

Тут u – потенціальна енергія деформації при об'ємному напруженому стані, що виражається формулою (5.31), а $[u]$ – кількість потенціальної енергії, яку (за умовою рівноміцності матеріалу при складному та лінійному напружених станах) можна отримати з виразу (5.31) для повної енергії деформації, що допускається при простому розтягу:

$$u_p = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

При простому розтягу для нормальних напружень ми допускаємо величину $[\sigma]$, тим самим для питомої роботи деформації допускаємо

$$[u] = \frac{[\sigma]^2}{2E}.$$

Для дотримання того ж ступеня безпеки в загальному випадку для питомої роботи деформації ми повинні допускати рівень, не більший, ніж $[u]$. Умова міцності набуде вигляду:

$$\frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

або

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \leq [\sigma]. \quad (5.38)$$

Розрахункове напруження дорівнює

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}.$$

Ця гіпотеза не підтвердилася дослідями і має тільки історичне значення. Зате вона стала базою для створення нової енергетичної теорії міцності, що узгоджується з дослідями.

Теорія, яку зазвичай називають *четвертою теорією (або гіпотезою) міцності, припускає, що причиною виникнення небезпечної пластичної деформації є не вся потенціальна енергія деформації, а тільки та частина її, яка пов'язана зі зміною форми елементарних об'ємів матеріалу.* Отже, міцність матеріалу буде забезпечена, якщо

$$u_\phi \leq [u_\phi].$$

Тут потенціальна енергія формозміни при складному напруженому стані, дорівнює (5.32):

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3].$$

Величина ж потенціальної енергії форми, що допускається, при простому розтягу дорівнює :

$$[u_\phi] = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2.$$

Тоді умова міцності за енергетичною теорією матиме вигляд:

$$\boxed{\sigma_{rIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma]}, \quad (5.39)$$

а розрахункове (приведене) напруження буде:

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}.$$

Умову міцності (5.39) можна навести і в іншому вигляді, іноді зручнішому для обчислень:

$$\boxed{\sigma_{rIV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]} \quad (5.40)$$

Формули (5.39) і (5.40) представляють умову міцності за теорією найбільшої потенціальної енергії зміни форми.

Можна показати, що розрахункове напруження σ_{rIV} за цією теорією пропорційне дотичному напруженню на площадці, рівно нахилений до напрямів головних напружень – октаедричної. Ця теорія міцності може бути віднесена до категорії теорій, що засновують перевірку міцності для пластичних матеріалів за величиною дотичних напружень. Досліди досить добре підтверджують результати, одержані за цією теорією для пластичних матеріалів.

На підставі формул (5.12) умова міцності (5.40) може бути написана ще й так:

$$\sqrt{2(\tau_{1,2}^2 + \tau_{1,3}^2 + \tau_{2,3}^2)} \leq [\sigma]. \quad (5.41)$$

Підсумовуючи розгляд теорій міцності, умову міцності при об'ємному напруженому стані можна записати у такому вигляді:

$$\sigma_r \leq [\sigma],$$

де σ_r – розрахункове (приведене) напруження; $[\sigma]$ – напруження, що допускається, при простому розтягу або стиску.

Великий внесок у теорію складного напруженого стану зробив видатний механік ХХ століття С.П. Тимошенко.

Тимошенко Степан Прокопович (1878–1972) – видатний вчений в галузі механіки. У 1901р закінчив Петербурзький інститут інженерів шляхів сполучень. У 1919 р. брав участь в організації АН України. В 1920 р. емігрував спочатку до Югославії потім – до США. Основні роботи стосуються механіки твердого деформівного тіла, будівельної механіки, опору матеріалів і теорії споруджень. Досліджував згин, кручення, коливання та удар стержнів, розробляв теорію пластин та оболонок, розв'язав задачу про концентрацію напружень навколо отворів. Розвинув теорію стійкості пружних систем, розробив ефективні варіаційні методи теорії пружності. Написав ряд підручників і монографій, що перекладені різними мовами. У США заснував наукову школу в галузі механіки деформованого твердого тіла. Член Національної АН США, акад.АН УРСР (з 1919р.), закордонний член АН СРСР (з 1964, член-кореспондент з 1928р.) та багатьох інших академій наук.

5.6. Поняття про нові теорії міцності

Умови переходу матеріалу в граничний стан, а також умови міцності за різними теоріями були виражені через головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, які є інваріантами напруженого стану.

Для тривимірного простору, спрямувавши осі координат за головними напрямками, вказані умови можна уявити у вигляді деяких граничних поверхонь:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (5.42)$$

Гранична поверхня, що відповідає умові появи масових пластичних деформацій за теорією питомої потенціальної енергії формозміни, має вигляд:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_m^2 = 0 . \quad (5.43)$$

Гранична поверхня (5.43) є круговим циліндром з віссю, рівно нахиленою до координатних осей (рис. 5.12,а), і радіусом $r = \sqrt{(2/3)}\sigma_m$. Для плоского напруженого стану, коли одне з головних напружень рівне нулю, умова (5.43) дає еліптичну граничну криву (рис. 5.12,б).

Критерію найбільших дотичних напружень відповідає гранична поверхня у вигляді правильної шестигранної призми, вписаної в циліндр. Критерію найбільших нормальних напружень відповідає куб із ребром, яке дорівнює σ^H .

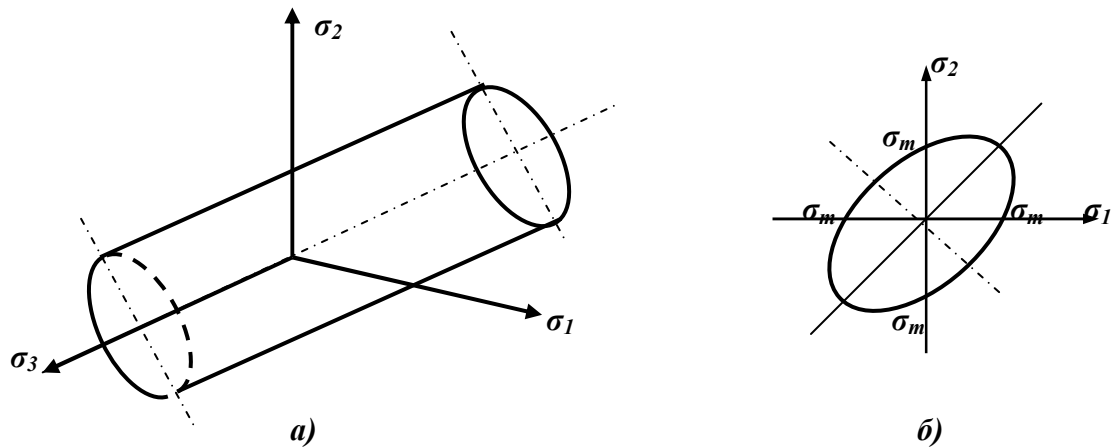


Рис. 5.12. Гранична поверхня (а) та гранична крива (б)

Зауважимо, що всі точки, розташовані всередині області, обмеженої граничною поверхнею, відповідають напруженим станам із коефіцієнтом запасу, більшим від одиниці. Напружені стани, зображені точками, що лежать зовні цієї області, мають коефіцієнт запасу, менший від одиниці.

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів стали стимулом для розробки нових теорій міцності. Більшість із них заснована на виборі такої форми граничної поверхні, за якою можна якнайповніше врахувати особливості опору даного класу матеріалів в умовах складного напруженого стану.

Розглянемо деякі нові теорії.

5.6.1. Теорія Ягна

Ю. І. Ягн запропонував граничну поверхню (5.42) прийняти у вигляді полінома другого ступеня, симетричного за відношенням до всіх трьох головних напружень:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (5.44)$$

де постійні a , b і c для даного ізотропного матеріалу повинні визначатися з дослідів на одноосній розтяг і стиск та на чистий зсув.

Встановивши допустимі напруження $[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$ і $[\tau]$ відповідно при розтягу, стиску і зсуві, знаходимо вирази для постійних:

$$a = \frac{6[\tau]^2 - 2[\sigma_+][\sigma_-]}{[\sigma_+][\sigma_-]}, \quad b = \frac{6[\tau]^2([\sigma_-] - [\sigma_+])}{[\sigma_+][\sigma_-]}, \quad c = 6[\tau]^2.$$

Таким чином, теорія Ю. І. Ягна дозволяє враховувати неоднаковий опір матеріалу розтягу і стиску, а також опір матеріалу зсуву. При певних співвідношеннях між введеними постійними a, b із виразу (5.44) можна одержати ряд енергетичних критеріїв, у тому числі і критерій питомої потенціальної енергії формозмінення.

5.6.2. Теорія Писаренка і Лебедєва

Г. С. Писаренко і А. О. Лебедєв, вважаючи, що настання граничного стану зумовлено здатністю матеріалу чинити опір як дотичним, так і нормальним напруженням, запропонували шукати критерії міцності у вигляді інваріантних відносно напруженого стану функцій дотичних напружень і максимальних нормальних напружень.

Писаренко Георгій Степанович (1910 – 1998) – вітчизняний вчений у галузі механіки, академік НАНУ. З 1966р. – директор Інституту проблем міцності АН України. Основні роботи присвячені теорії механічних коливань і теорії міцності. Провів дослідження в галузі теорії нелінійних коливань, вивчав міцність матеріалів і несучу здатність елементів конструкцій за умов високих температур при різних силових і температурних навантаженнях.

Лебедєв Анатолій Олексійович (1931) – вітчизняний вчений в галузі механіки, член-кореспондент НАНУ. Основні дослідження відносяться до механіки матеріалів і міцності конструкцій. Працював у галузі деформаційного зміцнення конструкційних матеріалів за умов низьких і високих температур. Створив комплекс автоматизованих систем для досліджень міцності конструкцій.

Запропоновано, наприклад, критерій у такій лінійній формі:

$$\tau_{окт} + m_1 \sigma_1 \leq m_2. \quad (5.45)$$

Вираз для $\tau_{окт}$ дається формулою (5.22). Константи m_1 і m_2 матеріалу можна виразити через граничні напруження σ^0, σ_-^0 при одноосному розтягу і стиску. Тоді умова (5.45) набуде вигляду:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{окт} + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma^0, \quad (5.46)$$

$$\text{де} \quad \chi = \frac{\sigma^0}{\sigma_-^0}.$$

Для матеріалів, що знаходяться в пластичному стані, $\sigma^0 = \sigma_-^0$, $\chi = 1$ і вираз (5.46) перетвориться в розрахункове рівняння теорії формозміни. Для ідеально крихкого матеріалу $\chi = 0$ вираз (5.46) перетвориться в рівняння для I теорії міцності. При $0 < \chi \leq 1$ (більшість конструкційних матеріалів) гранична поверхня (5.46) є рівно нахиленою до головних осей фігурою, в яку вписана шестигранна піраміда, відповідна спрощеній теорії міцності Мора.

Експериментальна перевірка розглянутої теорії показала, що критерій (5.46) добре узгоджується з результатами випробовувань широкого класу конструкційних матеріалів.

5.6.3. Діаграми механічного стану (критерії Я. В. Фрідмана)

Вплив типу напруженого стану на характер втрати міцності матеріалів приблизно можна врахувати за допомогою діаграм механічного стану. Останні будують на підставі таких положень:

- залежно від типу напруженого стану матеріали можуть руйнуватися від розтягуючих напружень (або подовжень) шляхом відриву або від дотичних напружень шляхом зрізання і відповідно до цього розрізняють дві характеристики міцності — опір відриву $S_{відр}$, який є величиною нормальних напружень на поверхні руйнування в першому випадку, та опір зрізанню τ_k , який є величиною дотичних напружень у другому випадку;
- обидві характеристики міцності ($S_{відр}$ і τ_k) не залежать від типу напруженого стану;
- крива деформації матеріалу в координатах $\tau_{макс} - \gamma_{макс}$ також не залежить від напруженого стану;
- втрата міцності шляхом відриву описується теорією найбільших відносних подовжень так:

$$\sigma_{екв.II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = S_{відр}, \quad (5.47)$$

а втрата міцності другого типу — теорією найбільших дотичних напружень наступним чином:

$$\tau_{макс} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_k. \quad (5.48)$$

Діаграма механічного стану складається з двох діаграм (рис. 5.13) — власне діаграми механічного стану (а) і кривої деформації в координатах $\tau_{макс} - \gamma_{макс}$ (б). При побудові діаграми по осі ординат відкладають найбільше дотичне напруження $\tau_{макс}$, а по осі абсцис — найбільше еквівалентне розтягуюче напруження за другою теорією міцності ($\sigma_{екв.II}$). На діаграму наносять граничні лінії, відповідні границі текучості τ_m при зсуві, опору зрізу τ_k і опору відриву $S_{відр}$. Відхилення лінії опору відриву вправо вище за межу текучості відповідає зростанню опору відриву з появою залишкових деформацій.

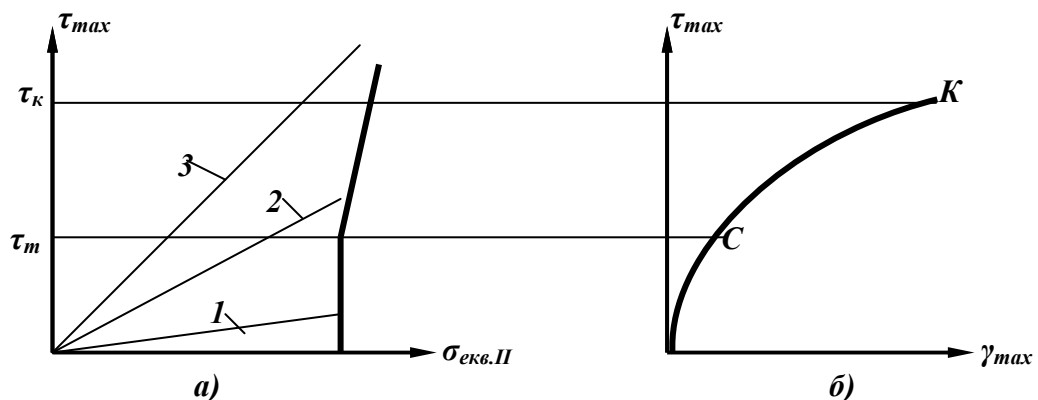


Рис.5.13. Діаграми: (а) – механічного стану, (б) – крива деформації

Для характеристики типу напруженого стану вводять коефіцієнт «м'якості», що є відношенням найбільшого дотичного напруження в точці до найбільшого еквівалентного розтягуючого напруження:

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{екв}}} . \quad (5.49)$$

Різні напружені стани, таким чином, при зростанні навантаження відображають на діаграмі променями, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють відповідному значенню α . Наприклад: при всебічному розтягу ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), $\tau_{\max} = 0$, $\alpha = 0$ і промінь співпадає з віссю абсцис; при простому розтягу ($\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{\text{екв11}} = \sigma \quad \text{і} \quad \alpha = \frac{1}{2};$$

при простому стиску ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{\text{екв11}} = \mu\sigma; \quad \alpha = \frac{1}{2\mu} .$$

Приймаючи $\mu = 0,25$, знаходимо, що $\alpha = 2$.

Розглядаючи промені, що відповідають різним типам напруженого стану матеріалу, можна приблизно встановити вид руйнування і таким чином вибрати відповідну теорію міцності. Наприклад, промінь 1 на діаграмі найперше перетинає лінію опору відриву. Отже, матеріал руйнуватиметься шляхом відриву без попередньої пластичної деформації. Промінь 2 перетинає спочатку лінію текучості, а потім – лінію опору відриву. Отже, при даному напруженому стані руйнування відбудеться шляхом відриву, але з попередньою пластичною деформацією. Для напруженого стану, відповідного променю 3, після пластичної деформації руйнування відбудеться шляхом зрізу. В тих випадках, коли промені, що відображають той або інший складний напружений стан, перетинають перш за все лінію опору відриву, розрахунок міцності слід проводити за теорією Мора, другою або першою теоріями міцності. Якщо ж спочатку промінь перетинає лінію межі текучості, то розрахунок міцності належить проводити за третьою або четвертою теоріями міцності.

Таким чином, діаграми механічного стану з певним наближенням відображають залежність форми руйнування від виду напруженого стану. Наближеність побудови полягає в тому, що межа текучості й опір руйнуванню непостійні. Промені, що зображують напружені стани, мають вигляд прямої лінії лише до досягнення межі текучості.

6. Чистий зсув

Чистий зсув (або зріз) – це випадок плоского напруженого стану, коли по гранях елемента діють тільки дотичні напруження.

У цьому неважко визначити випадку величини та напрямки головних напружень, розглядаючи, наприклад, круг Мора, зображений на рис. 6.1.

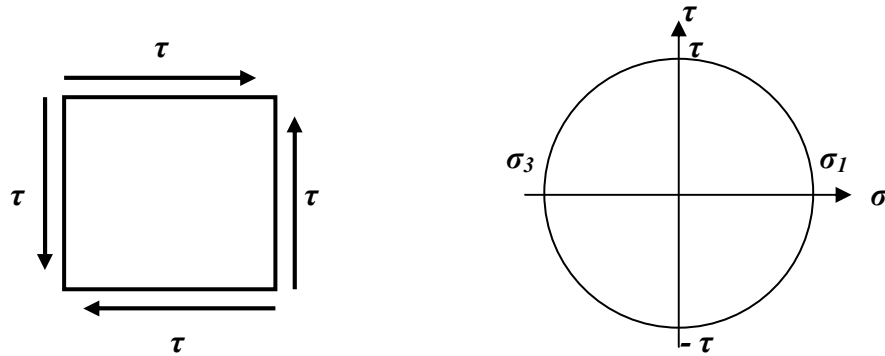


Рис.6.1. Напружений стан при чистому зсуві

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\sigma_3 = \tau \\ \sigma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Розглянемо деформацію елемента $ABCD$, що знаходиться в умовах чистого зсуву (рис. 6.2).

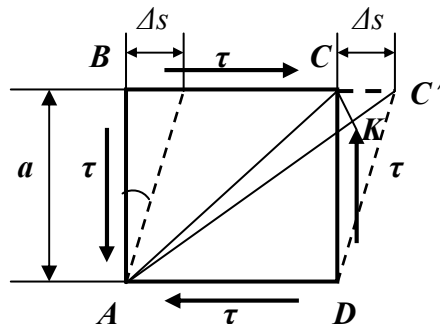


Рис.6.2. Деформації при чистому зсуві

За абсолютну деформацію при зсуві приймають величину ΔS . За відносну деформацію $\gamma \sim \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}$. Розмірність величини ΔS – одиниці довжини. Відносна деформація γ – безрозмірна величина.

Розглянемо деформацію видовження діагоналі AC цього елемента. Враховуючи, що деформації малі, маємо

$$\varepsilon = \frac{KC'}{AK};$$

$$KC' = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}; \quad AK = AC = a\sqrt{2}.$$

Тоді

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}a\sqrt{2}} = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{\gamma}{2}. \quad (6.2)$$

Враховуючи (6.1) та закон Гука (5.25), матимемо:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu\sigma_3] = \frac{\gamma}{2} \quad (6.3)$$

або
$$\frac{\tau}{E} [1 - \mu] = \frac{\gamma}{2} .$$

Звідки

$$\tau = \frac{E\gamma}{2(1 + \mu)} . \quad (6.4)$$

Позначимо

$$\boxed{\frac{E}{2(1 + \mu)} = G} . \quad (6.5)$$

Тоді (6.4) перетвориться на

або
$$\boxed{\begin{array}{c} \tau = G\gamma \\ \gamma = \frac{\tau}{G} \end{array}} . \quad (6.6)$$

Залежності (6.6) виражають *закон Гука при зсуві*. Величину G називають *модулем Юнга другого роду або модулем пружності другого роду чи модулем зсуву*. Розмірність та фізичний зміст цієї величини аналогічні модулю Юнга першого роду E (при розтягу – стиску).

Залежності (6.6) можуть бути переписані

$$\frac{\Delta S}{a} = \frac{Q}{GA}$$

або

$$\boxed{\Delta S = \frac{Qa}{GA}} , \quad (6.7)$$

де Q – сила, що зсуває площадку площею A . Величина GA має такий же фізичний зміст, що й величина EA при розтягу – стиску і називається *жорсткістю при зсуві*.

Як правило, деформація зсуву зустрічається у сукупності з іншими видами деформації. Характерний приклад – робота найпростішого заклепкового з'єднання (рис. 6.3).

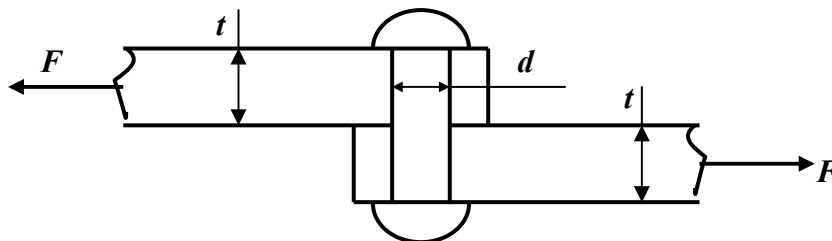


Рис.6.3. Заклепкове з'єднання

Нехай задача полягає в тому, щоб розрахувати кількість заклепок n у ряді, які з'єднують між собою дві пластини товщиною t , що розтягуються силами F . При цьому діаметр заклепки d , допустимі напруження на зріз $-\tau$, та на зминання (стиск) $-\sigma$.

Заклепка одночасно працює і в умовах зсуву (по діаметральному зрізу на границі дотикання пластин однієї до другої (рис. 6.4,а) та зминання (по площадках контакту заклепки з кожною пластиною (рис 6.4,б,в).

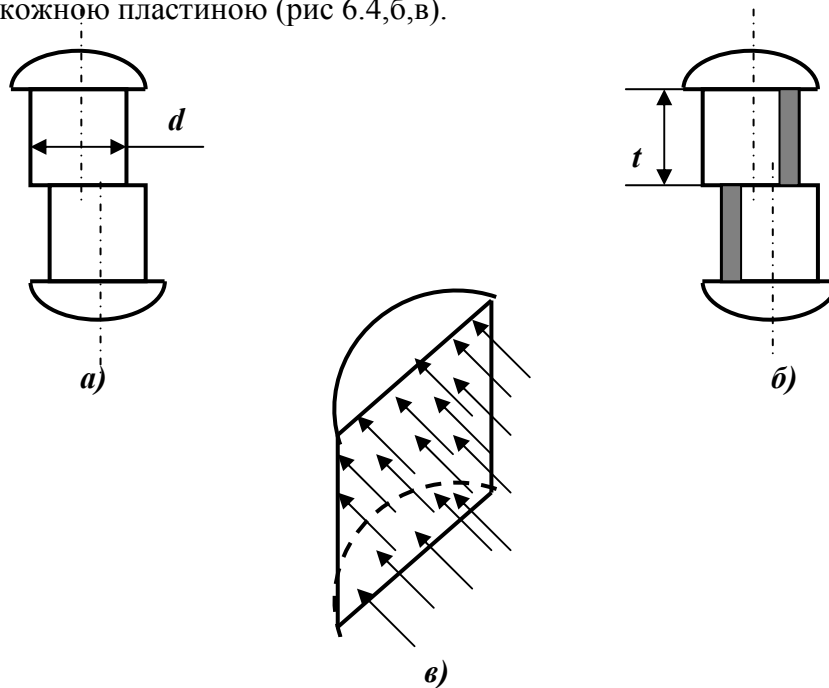


Рис.6.4. Навантаження на різні зони заклепки: а) зона зсуву, б) зона зминання, в) ефективне навантаження

Тоді розрахунком на міцність при зрізі буде :

$$\tau_{\max} = \frac{F}{n' \frac{\pi d^2}{4}} \geq [\tau],$$

де n' – кількість заклепок із розрахунку на зріз.

Звідси маємо:

$$n' \geq \frac{4F}{\pi d^2 [\tau]}. \quad (6.8)$$

Розрахунок на міцність при зминанні дасть:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{n'' td} < [\sigma],$$

де n'' – кількість заклепок з розрахунку на зминання,

тобто за умов зминання

$$n'' \geq \frac{F}{td [\sigma]} \quad (6.9)$$

Очевидно, ці розрахунки можуть дати різні значення n - n' та n'' . З цих двох значень треба буде вибрати найбільше для того, щоб задовольнялися обидві умови міцності – і на зріз, і на зминання.

7. Кручення

Кручення – це вид деформації, який виникає при прикладанні до стержня пар сил, що утворюють моменти в площинах, перпендикулярних до осі стержня.

Стержень, що працює на кручення, називають валом.

На доповнення до основних гіпотез опору матеріалів, що розглядалися раніше, введемо ще дві:

- гіпотеза плоских перерізів: *плоскі перерізи, перпендикулярні до осі вала залишаються плоскими під час деформації;*
- *відстань між цими перерізами не змінюється.*

7.1. Внутрішні силові фактори при крученні. Напруження. Критерій міцності

Оскільки кручення виникає при прикладанні пар сил у площинах, перпендикулярних до осі стержня, в довільному перерізі з шести можливих внутрішніх силових факторів виникає тільки один – *крутний момент T* (рис. 7.1).

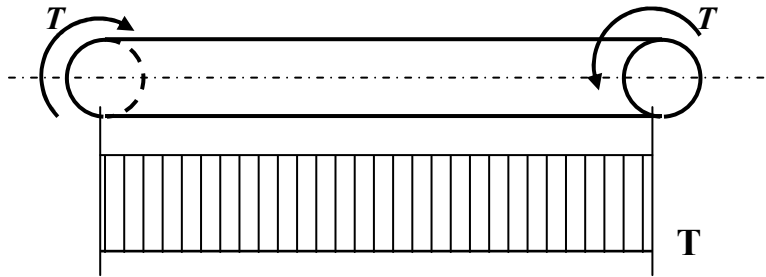


Рис. 7.1. Внутрішній силовий фактор при крученні

Розглянемо напруження, які виникають при крученні круглого вала радіуса r .

З характеру дії внутрішнього силового фактора зрозуміло, що в перерізі, перпендикулярному до осі вала, ці напруження мають дотичний характер.

Розглядаючи елемент вала довжиною dx (рис.7.2) і його переріз, перпендикулярний до осі, можна записати лише одне рівняння рівноваги, а саме:

$$T = T_{\text{вн}} = \int_A \tau_{\rho} \cdot \rho \cdot dA, \quad (7.1)$$

де ρ – відстань від центра перерізу до площадки dA , що розглядається (рис. 7.3);

τ_{ρ} – напруження на цій площадці.

Цього рівняння недостатньо, тому що є невідомим розподіл величин τ_{ρ} (а він явно не носить характер константи).

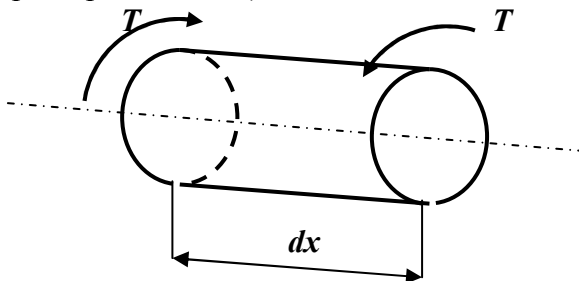


Рис. 7.2. Ділянка вала

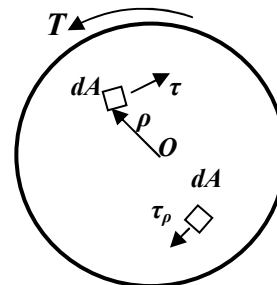


Рис. 7.3. Напруження в перерізі

Тобто система має статично невизначений характер.

Розглянемо деформації в системі (рис. 7.4).

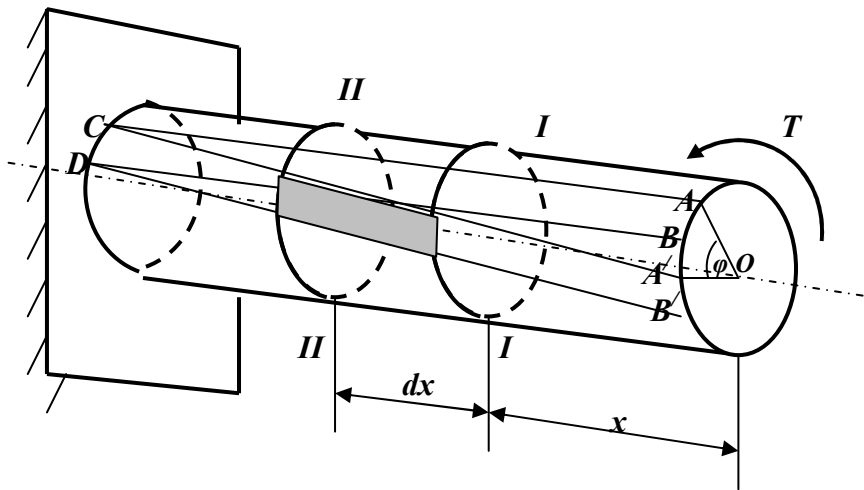


Рис. 7.4. Деформації вала

На поверхні стержня, що буде скручуватися (рис.7.4), двома суміжними утворюючими AC і BD та двома контурами суміжних перерізів $I-I$ та $II-II$ виділимо прямокутник. Після деформації вала цей елемент перекосяться (виділено сірим). “Виріжемо” цей елемент у вигляді, зображеному на рис. 7.5.

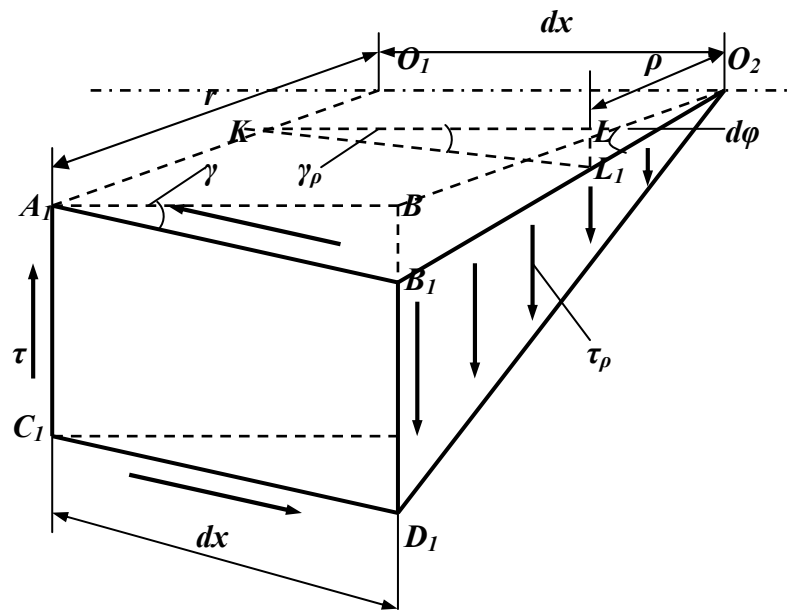


Рис. 7.5. Деформації на ділянці вала довжиною dx

Розглядаючи його, можна зробити висновки, що деформація елемента носить зсувний характер, що викликає появу дотичних напружень на його гранях.

Так абсолютний зсув в елементі $A_1B_1C_1D_1 - BB_1 = r \cdot d\varphi$, і тоді відносний зсув:

$$\gamma = \frac{BB_1}{A_1B} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}.$$

Згадуючи закон Гука - $\tau = G \cdot \gamma$, матимемо:

$$\tau_B = G \cdot \gamma = rG \frac{d\varphi}{dx}. \quad (7.2)$$

Знаходячи напруження не в поверхневих шарах (т.В), а на якійсь відстані ρ від осі, відповідно отримаємо:

$$\tau_{\rho} = \rho G \frac{d\varphi}{dx}, \quad (7.3)$$

з чого випливає, що закон розподілу напружень по перерізу є *лінійним*. Підставляючи (7.3.) в (7.1) та інтегруючи, отримуємо:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

або

$$G \frac{d\varphi}{dx} I_p = T, \quad (7.4)$$

де I_p – полярний момент інерції.

Співставляючи цей вираз з (7.3), після нескладних перетворень маємо:

$$\tau_{\rho} = \frac{T \cdot \rho}{I_p}. \quad (7.5)$$

Очевидно, що дотичні напруження досягають найбільшого значення при $\rho_{\max} = r$, тобто:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot \rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_p},$$

де W_p – полярний момент опору.

Це дає змогу записати умову міцності при крученні в такому вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (7.6)$$

Використовуючи цю умову, можна або за відомими силовими факторами, що створюють крутний момент T , знайти полярний момент опору і далі, залежно від тієї, чи іншої форми, розміри перерізу, або навпаки – знаючи розміри перерізу, обчислити найбільшу величину крутного моменту, яку можна допустити в перерізі, що, в свою чергу, дозволить знайти допустимі величини зовнішніх навантажень.

7.2. Деформації при крученні. Закон Гука. Умова жорсткості

У процесі виведення формул для напружень, при розгляді статичної невизначеності цієї задачі вже вводилося поняття деформації, за яку приймався *кут закручування* перерізу, перпендикулярного до осі вала відносно нерухомого опорного перерізу (рис.7.4; 7.5; 7.6 – кути φ та $d\varphi$).

Розглядаючи співвідношення (7.4), неважко отримати:

$$d\varphi = \frac{T \cdot dx}{GI_p} \quad (7.7)$$

або, інтегруючи

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{T dx}{GI_p} = \frac{T x}{GI_p} \quad (7.8)$$

при довжині вала (або ділянки вала) l , найбільший кут закручування буде між крайніми

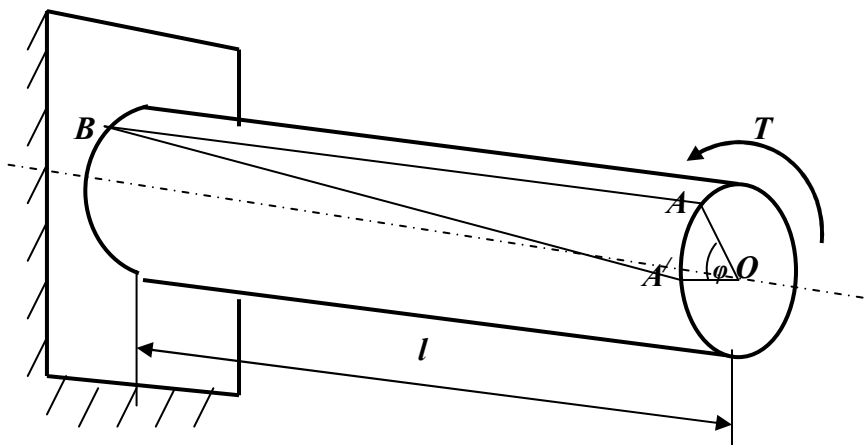


Рис. 7.6. Кут закручування вала на довжині l

перерізами і дорівнюватиме

$$\varphi(l) = \frac{Tl}{GI_p} \quad (\text{рад}) \quad (7.9)$$

У даному випадку розмірність кута φ – радіани. Для того, щоб отримати величину φ в градусах, потрібно додати множник $\frac{180^\circ}{\pi}$, тобто:

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{град}) \quad (7.10)$$

Вирази (7.9) та (7.10) являють собою закон Гука при крученні, а величину GI_p називають *жорсткістю при крученні*.

Крім абсолютної величини – кута закручування φ , в інженерній практиці часто використовують *відносний кут закручування* – θ :

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{рад/м}) \quad (7.11)$$

або

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{град/м}) \quad (7.12)$$

Тепер, коли записані вирази для деформацій, можна записати й умову жорсткості. Її можна записати в різних варіаціях – (7.13) – (7.16) (залежно від того, яка допустима величина є заданою):

$$\varphi_{\max} = \frac{Tl}{GI_p} \leq [\varphi] \quad (\text{рад}) \quad ; \quad (7.13)$$

$$\varphi_{\max} = \frac{Tl}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\varphi] \quad (\text{град}) \quad ; \quad (7.14)$$

$$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_p} \leq [\theta] \quad (\text{рад/м}) \quad ; \quad (7.15)$$

$$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_p} \cdot \frac{180^0}{\pi} \leq [\theta] \quad (\text{град/м}) \quad (7.16)$$

Використовуючи умови жорсткості, можна або за відомою картиною зовнішніх навантажень (від яких залежить величина T_{\max}) знайти розміри поперечного перерізу заданої форми, які “сховані” у величині I_p – полярному моменті інерції; або навпаки, знаючи форму та розміри поперечного перерізу, визначити допустимі величини силових навантажень на вал.

7.3. Напруження при крученні у перерізах, нахилених до осі вала

Вивчаючи напруження при скручуванні стержня круглого перерізу, ми бачили, що у перерізах, перпендикулярних до осі, в кожній точці діють дотичні напруження τ_ρ . За законом парності дотичних напружень такі ж напруження (рис. 7.7, 7.8) діятимуть і по поздовжніх гранях вирізаного нами із стержня елемента. Ці напруження будуть також найбільшими в точках біля поверхні стержня і зменшуватимуться до нуля в точках осі.

Таким чином, якщо ми проведемо переріз через вісь стержня, що скручується, діаметральною площиною (рис. 7.7), то в точках, розташованих по прямій AB , перпендикулярній до осі стержня, дотичні напруження змінюватимуться за лінійним законом. Нормальних напружень на цих площинах не буде. Вони діятимуть на похилих перерізах і досягатимуть найбільшого значення по перерізах, нахилених до осі стержня під кутом 45° .

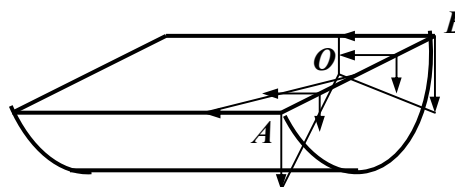


Рис. 7.7. Напруження в нахилених перерізах

Насправді, елемент $ABCD$, вирізаний на поверхні вала (рис. 7.8), по своїх бічних гранях піддається дії лише дотичних напружень. Тому пна площадках, нахилених на кут 45° до осі стержня, дотичних напружень не буде; це — головні площадки, на яких діють розтягуючі й стискаючі головні напруження σ_1 і σ_3 , які чисельно дорівнюють в кожній точці напруженням τ .

Величина їх для всіх точок перетину змінюється пропорційно відстані до центра і дорівнюють відповідним τ . Крихкі матеріали, наприклад чавун, руйнуються (рис. 7.9) при крученні від розриву по похилих перетинах BC (рис. 7.8), тобто по тих, де діють найбільші розтягуючі напруження.

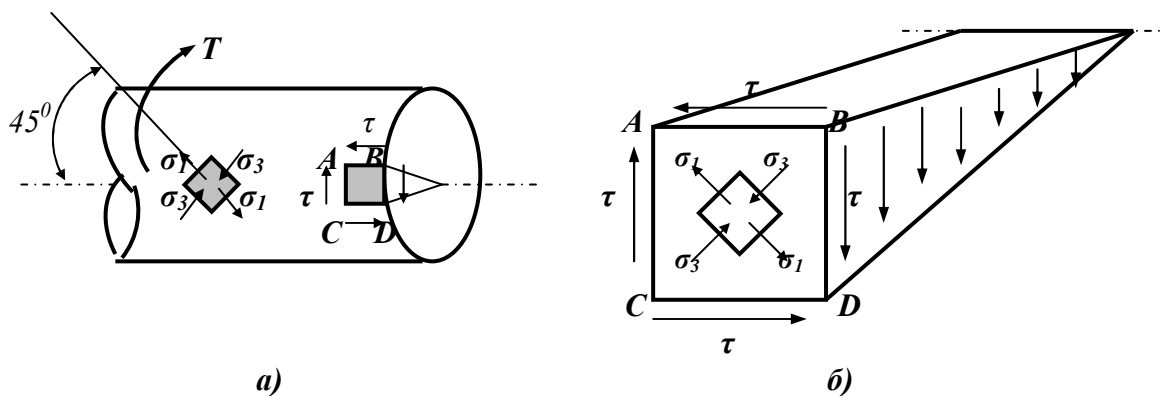


Рис. 7.8. Нормальні напруження при крученні: а) на поверхні вала, б) в елементі

Знаючи величину і напрям головних напружень у будь-якій точці, можемо знайти нормальні й дотичні напруження на якій завгодно похилій площадці з круга Мора або за формулами (5.7) і (5.8). Що стосується перевірки міцності, то, оскільки при крученні найбільші нормальні й дотичні напруження рівні за абсолютною величиною, а величини, що допускаються, для дотичних напружень менші, ніж для нормальних, то зрозуміло, що при крученні, як і взагалі при чистому зсуві, можна обмежитися перевіркою лише за дотичними напруженнями.

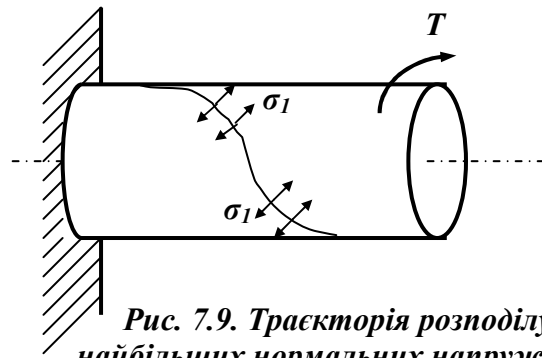


Рис. 7.9. Траєкторія розподілу найбільших нормальних напружень

7.4. Потенціальна енергія при крученні

При вивченні розтягу - стиску було показано, що при деформації пружної системи в ній накопичується потенціальна енергія деформації.

Це явище має місце і при крученні. Якщо пружний стержень у межах пружності закрутити на деякий кут, то після розвантаження він розкручуватиметься і може виконати роботу за рахунок потенціальної енергії кручення, що накопичилася в стержні. Нехтуючи певними втратами (нагрівання, внутрішнє тертя і т. п.), ми вважатимемо, що робота внутрішніх сил, яка визначається кількістю потенціальної енергії деформації U , що накопичується в матеріалі, дорівнює роботі зовнішніх сил.

Нехай є вал, закріплений одним кінцем, до вільного кінця якого прикладається пара сил із моментом, поступово зростаючим від нуля до кінцевого значення T . У міру зростання величини моменту пари сил збільшується і кут закручування φ , пов'язаний з T рівнянням (7.9):

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p} .$$

Якщо по осі абсцис відкласти кути закручення (деформацію), а по осі ординат – відповідні значення крутного моменту, то їх взаємна залежність у межах пропорційності зобразиться похилою прямою OA (рис. 7.10). Повторюючи міркування, проведені для обчислення роботи сили P при розтягу, відзначимо, що робота пари T виразиться площею трикутника AOB :

$$A = \frac{T\varphi}{2} . \quad (7.17)$$

Наявність множника $\frac{1}{2}$ у формулі (7.17) пояснюється

тим, що момент T був прикладений не відразу всією своєю величиною, а прикладався в порядку поступового, „статичного” зростання від нуля до його кінцевого значення.

Підставляючи замість φ його значення з рівняння (7.9) і приймаючи, що $U=A$, одержимо вираз для потенціальної енергії при крученні:

$$U = \frac{T^2 l}{2GJ_p} . \quad (7.18)$$

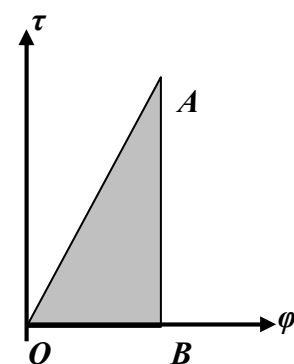


Рис. 7.10. Пружна деформація

Потенціальна енергія може бути виражена і через деформацію, якщо у формулі (7.17) замінити значення крутного моменту виразом з формули (7.9):

$$U = \frac{GJ_p}{l} \cdot \varphi^2. \quad (7.19)$$

З формул (7.18) і (7.19) бачимо, що потенціальна енергія при крученні, так само як і при розтягу - стиску, є функцією другого ступеня від силового фактора чи від деформації.

7.5. Визначення граничної вантажопідйомності стержня, який скручується

У параграфі 7.1. ми навчилися визначати необхідні розміри стержня, що скручується, виконуючи умову, щоб найбільші дотичні напруження в точках у контуру поперечного перетину не перевищили напруження, що допускається $[\tau]$. Таким чином, незважаючи на нерівномірність у розподілі напружень по перетину, ми проводили розрахунок по напруженнях, що допускаються.

Використовуючи цей спосіб розрахунку, ми не повністю використовуємо граничну вантажопідйомність стержня. У попередніх розділах ми вважали небезпечним той стан стержня, при якому лише в контурних точках перетину напруження досягнуть межі текучості матеріалу при зсуві τ_m (рис. 7.11а). Величина τ_m за енергетичною теорією міцності повинна дорівнювати $0,6\sigma_m$. Крутний момент при цьому буде дорівнювати:

$$T = \frac{\pi r^3 \tau_m}{2},$$

а кут закручування

$$\varphi_m = \frac{Tl}{GJ_p} = \frac{\pi r^3 \tau_m l}{2G \frac{\pi r^4}{2}} = \frac{\tau_m l}{Gr}.$$

Для подальшого збільшення кута закручування необхідне зростання крутного моменту, оскільки матеріал усередині стержня знаходиться ще в пружному стані.

При збільшенні деформації зростання напруження по краях перетину зупиниться (явище текучості) і при деякому $T > T_m$ розподіл напружень відповідатиме графіку, зображеному на рис. 7.11б. В середині незатемненого кола радіуса OB матеріал буде як і раніше в пружному стані.

Граничним станом, відповідним повному вичерпанню вантажопідйомності стержня, буде той розподіл напружень, коли пружна зона зникне, — по всьому перетину напруження дорівнюватимуть межі текучості τ_m (рис. 7.11в).

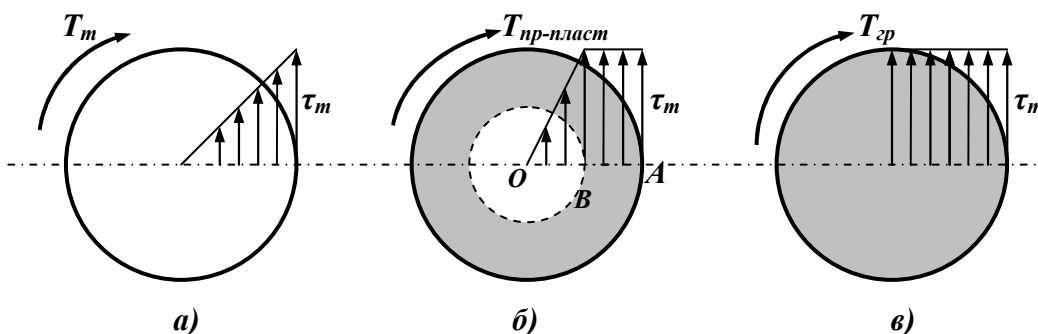


Рис. 7.11. Розподіл напружень у перерізі при:
а) $\tau_{max} = [\tau]$, б) $\tau_{max} = \tau_m$, в) $\tau = const = \tau_m$

Крутний момент T_{zp} у цьому випадку можна обчислити, складаючи суму моментів усіх внутрішніх сил щодо центра круга. Для цього розіб'ємо площу нашого перетину концентричними кругами на нескінченно малі (кільцеві) площадки (рис. 7.12).

Напруження, що діють на кожній такій площадці, в граничному стані мають постійне значення, яке дорівнює τ_m . Внутрішні зусилля, прикладені до елементарної площадки радіуса ρ , дорівнюватимуть $\tau_m \cdot dA$, а момент внутрішнього зусилля $-\tau_m \cdot dA \rho$. Підсумовуючи елементарні моменти внутрішніх сил за площею кільця, одержимо:

$$dT_{\text{вн}} = \tau_m \rho \sum dA = \tau_m \rho 2\pi d\rho.$$

Складаючи умову рівноваги зовнішніх і внутрішніх моментів, знайдемо:

$$\sum T_0 = 0; \quad T_{zp} - \int_0^r 2\pi \tau_m d\rho = 0.$$

Звідси

$$T_{zp} = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_m. \quad (7.20)$$

Крутний момент, що допускається, при коефіцієнті запасу k буде дорівнювати:

$$[T_k] = \frac{T_{zp}}{k} = \frac{2\pi}{3} r^3 \frac{\tau_m}{k} = \frac{2\pi}{3} r^3 [\tau].$$

Звідки

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{3T}{2\pi[\tau]}}. \quad (7.21)$$

Водночас, згідно з розрахунком за допустимими напруженнями, маємо:

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi[\tau]}}.$$

У результаті перехід до розрахунку за допустимими навантаженнями дозволяє зменшити діаметр вала у відношенні

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2 \cdot 2}} \approx 0,91.$$

Таким чином, унаслідок нерівномірного розподілу напружень по перерізу при пружному стані стержня перехід до методу розрахунку за навантаженнями, що допускаються, може дати економію матеріалу.

Однак слід пам'ятати, що наведений розрахунок доцільно проводити лише при статичному навантаженні, коли небезпечним є стан текучості матеріалу.

Вали ж, переважно працюють в умовах знакозмінного напруження, коли перевірку міцності треба проводити з розрахунку на можливість появи тріщин утоми. Тому використання наведеного способу до валів у більшості випадків є некоректним.

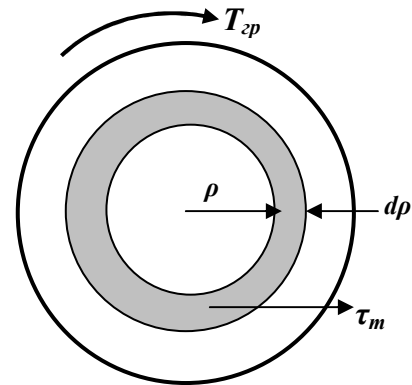


Рис. 7.12. Інтегрування напружень у випадку $\tau = \text{const} = \tau_m$

7.6. Напруження й деформації в циліндричних гвинтових пружинах з малим кроком

У ресорах вагонів, клапанах та інших деталях механізмів застосовують гвинтові пружини, що піддаються дії сил, які стискають або розтягують пружину. При проектуванні таких пружин для перевірки міцності необхідно вмiти обчислювати найбільше напруження і визначати деформацію пружини — її подовження або осідання.

Таким чином, необхідно, знаючи розміри пружини, вміти обчислити залежність між її деформацією і силою, що прикладається.

Розглянемо, на які види деформації працює матеріал пружини. Уявімо собі (рис.7.13а) циліндричну пружину, розтягнуту силами F , прикладеними по її осі. Назвемо R_0 — середній радіус гвинтової осі (витка) пружини, n —число витків, r —радіус поперечного перетину стержня пружини (відповідно діаметр $d = 2r$), G —модуль зсуву, t – крок витків пружини. Нахилом витків нехтуємо.

7.6.1. Внутрішні силові фактори та напруження в пружинах

Для обчислення напружень „розріжемо” цю пружину на дві частини перетином, що проходить через вісь циліндра, утвореного пружиною. Верхню частину відкинемо і розглянемо рівновагу нижньої частини (рис. 7.13б).

На цю частину діє зовнішня сила F і напруження по перетину стержня пружини. Щоб з’ясувати, які це напруження, в центрі ваги поперечного перерізу пружини прикладемо дві сили F_1 і F_2 , рівні за величиною F і спрямовані по вертикалі в різні боки.

Оскільки і сила F_2 , і пара сил $F - F_1$ з моментом $T = F \cdot R_0$ лежать у площині проведеного перерізу, то вони повинні врівноважитися дотичними напруженнями.

Сила F_2 зсуває відсічену частину пружини вниз і викликає появу дотичних напружень, зображених на рис. 7.14а і рівних:

$$\tau_1 = \frac{F_2}{A} = \frac{F}{\pi r^2}.$$

Момент пари $T = FR_0$ викликає скручування стержня пружини і є причиною виникнення другої групи дотичних напружень (7.5):

$$\tau_2 = \frac{T}{J_p} \rho.$$

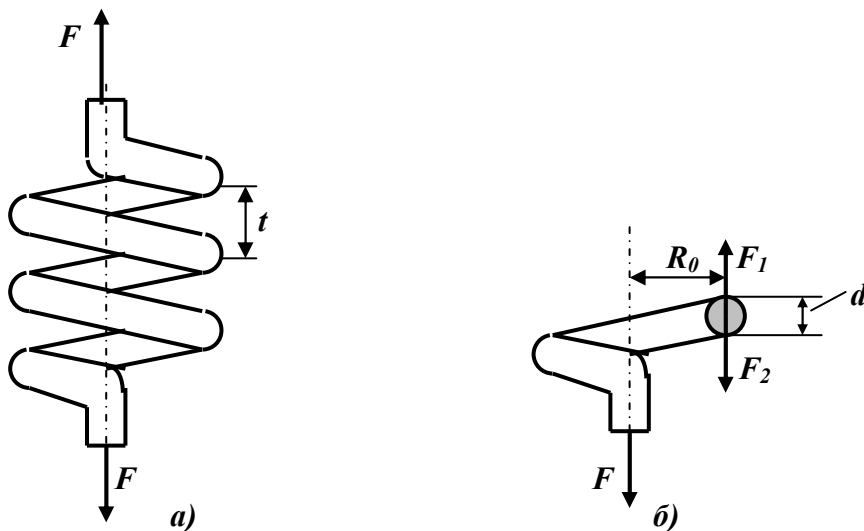


Рис. 7.13. Розподіл сил у перерізі пружини:

а) – загальний вигляд пружини, б) – зовнішні та внутрішні навантаження

Ці напруження від кручення. Їх величина змінюватиметься пропорційно відстані від центра (рис. 7.14б) і досягне найбільшого значення на площадках, розташованих біля контуру перетину:

$$\max \tau_2 = \frac{T}{W_p} = \frac{FR_0}{\frac{\pi r^3}{2}}.$$

Накладаючи одну на одну обидві групи напружень, отримаємо повний розподіл напружень по перерізу (рис. 7.14в).

Небезпечною точкою буде та з точок контуру, в якій напрями τ_1 , і τ_2 співпадуть. Такою точкою буде A – біля внутрішнього краю перетину; в ній повне дотичне напруження дорівнює :

$$\tau_{\max} = \frac{F}{\pi r^2} + \frac{2FR_0}{\pi r^3} = \frac{F}{\pi r^2} \left(1 + \frac{2R_0}{r} \right) \quad (7.22)$$

Оскільки в більшості випадків другий доданок у дужках значно більше одиниці, то, як правило, нею нехтують, і вираз (7.22) наближено можна записати так:

$$\tau_{\max} = \frac{2FR_0}{\pi r^3} \quad (7.23)$$

На практиці при розрахунку пружин у формулу (7.23) вводять поправочний коефіцієнт k , що враховує як вплив зрізу, так і ряд інших, не врахованих вище факторів (вигин стержня пружини, поздовжні деформації і т. п.). Величина цього коефіцієнта тим більша, чим більше відношення $\frac{r}{R}$, тобто чим жорсткіша в геометричному відношенні пружина.

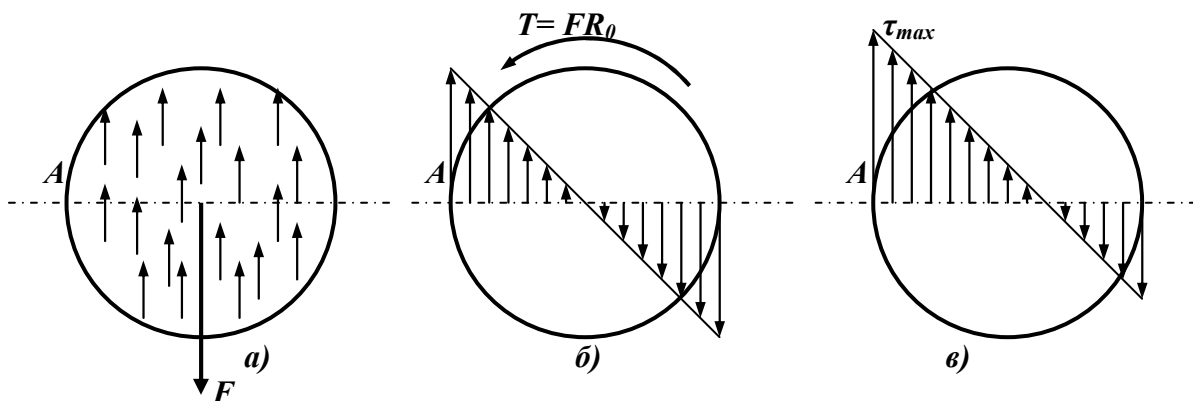


Рис. 7.14. Розподіл напружень у пружині:
а) від зсуву, б) від кручення, в) сумарні

7.6.2. Деформації в пружині

При такому спрощенні дуже легко обчислити деформацію розтягування пружини (осадження), яку ми позначимо λ .

Виділимо з пружини відрізок завдовжки ds двома суміжними перерізами – CO_1 і CO_2 , що проходять через вісь пружини (рис. 7.15). Оскільки відстань ds між перерізами дуже мала, то можна вважати, що до деформації радіуси R_0 пружини, що йдуть від осі до центрів проведених перерізів, лежать в одній площині й утворюють трикутник O_1CO_2 .

Після деформації другий переріз, внаслідок скручування ділянки стержня ds , повернеться щодо першого на кут $d\theta = \frac{Tds}{GJ_p}$. Тоді радіус O_2C розвернеться щодо радіуса O_1C теж на кут $d\theta$ і точка C переміститься в положення C_1 , що зумовить опускання кінця

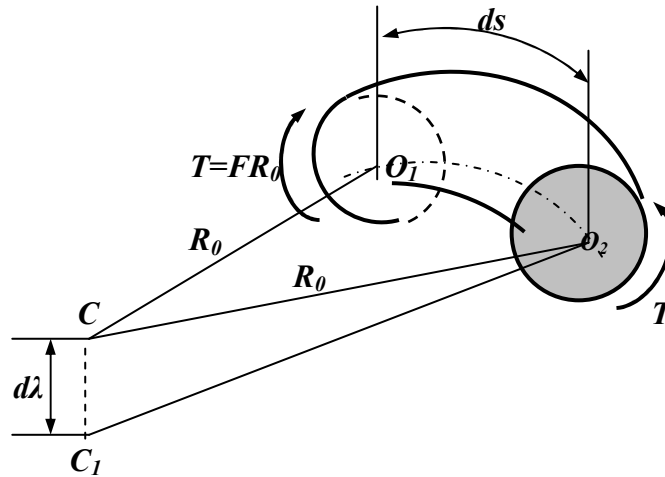


Рис. 7.15. Деформації елемента пружини

пружини на величину

$$d\lambda = R_0 d\theta = R_0 \frac{T ds}{GJ_p}$$

Якщо врахуємо, що всі елементи ds стержня пружини деформуються таким же чином, то повне переміщення нижнього кінця пружини, тобто її вкорочення (або видовження), виразиться сумою величин $d\lambda$:

$$\lambda = \sum d\lambda = \int_0^l R_0 \frac{T ds}{GJ_p} = R_0 \frac{Tl}{GJ_p} \quad (7.24)$$

Тут $l = \int_0^l ds$ — повна довжина стержня пружини, а $\frac{Tl}{GJ_p}$ — взаємний кут закручування кінців стержня пружини, визначений у припущенні, що стержень розпрямлений.

Нехтуючи нахилом витків до горизонталі й приймаючи число їх n , одержуємо, що повна довжина гвинтового стержня дорівнює:

$$l = 2\pi R_0 n,$$

тоді

$$\lambda = \frac{TR_0}{GJ_p} 2\pi n R_0 = \frac{4FR_0^3 n}{Gr^4} \quad (7.25)$$

Формули (7.22), (7.23) та (7.25) дають можливість перевірити міцність і визначити деформацію пружини.

Чим більше допустиме напруження на зріз $[\tau]$, тим гнучкішою буде пружина, тим більше осідання вона дасть при тому ж вантажі F , оскільки її можна зробити зі стержня меншого поперечного перерізу.

Оскільки ресори повинні бути достатньо гнучкими, то для них беруть загартовану сталь з дуже високою межею пружності; напруження на зріз, що допускається, досягає від 400 до 800 МПа. Для хромованадієвої сталі допускаються напруження в розтягнутих пружинах до 700 МПа при r від 3 ÷ 6 мм. Для фосфористої бронзи при $G = 44000$ МПа та r до 8 мм допускають $[\tau] = 130$ МПа.

Ці напруження можуть бути допущені при статичному навантаженні. Для навантаження, що змінюється, вони знижуються приблизно на 1/3, а для неперервно працюючих пружинах (пружини клапанів) — приблизно на 2/3. У цих випадках велику роль відіграє можливість розвитку тріщин утоми (див. главу 18). Крім того, клапанні пружини

часто працюють при високих температурах, що також вимагає зниження основних допустимих напружень.

7.6.3. Розрахунок пружин за енергією, що повинна поглинатися

При розрахунку пружин іноді заданою є не сила, що стискає або розтягує пружину, а енергія T , яка повинна поглинатися цією пружиною. Подібно тому, як це було при розтягу або стиску стержня, потенціальна енергія деформації пружини U вимірюється роботою зовнішніх сил.

Оскільки для пружини залежність між λ і F прямолінійна (7.25), потенціальна енергія деформації пружини дорівнює:

$$U = \frac{1}{2} F \lambda = \frac{2F^2 R_0^3 n}{Gr^4}. \quad (7.26)$$

З (7.23) маємо:
$$FR_0 = \frac{\tau \pi r^3}{2}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу (7.26), одержимо:

$$U = \frac{2\pi R_0 n}{4G} \pi r^2 \tau^2.$$

Оскільки $2\pi R_0 n$ — довжина стержня пружини, а πr^2 — площа перетину, то

$$U = \frac{\tau^2}{4G} V, \quad (7.27)$$

де V — об'єм пружини; з (7.27), враховуючи, що $U=T$, знаходимо:

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \quad (7.28)$$

Таким чином, задаючись граничною величиною напруження $\tau = [\tau]$, можемо обчислити об'єм пружини, необхідний для поглинання заданої величини енергії $T=U$ з тим, щоб не були перевищені напруження, що допускаються $[\tau]$. При цьому необхідно перевірити осадження пружини при напруженнях $[\tau]$; вона повинна бути такою, щоб не відбулося закриття зазорів між витками.

7.7. Кручення тонкостінних стержнів

Перед розглядом цієї теми треба зауважити, що методи розрахунку будуть залежати від того, відкритий чи замкнений профіль має їхній поперечний переріз.

Розглянемо тут замкнені профілі.

Товщину стінки стержня будемо вважати настільки малою, що дотичні напруження по ній можна прийняти однаковими, рівними напруженням посередині товщини стінки та спрямованими по дотичній до її середньої лінії (рис 7.16).

З тонкостінного замкненого стержня виріжемо елемент (рис. 7.17) двома поперечними перерізами, відстань між якими dx , та двома довільними меридіональними перерізами. Складаючи суму проєкцій на вісь x стержня всіх сил, що прикладаються до елемента, знаходимо:

$$\tau \delta ds = \tau \delta_1 = const. \quad (7.29)$$

Момент сили $\tau \delta ds$, що сприймається елементом ds відносно довільної т. O :

$$dM_{kp} = \tau \delta r ds. \quad (7.30)$$

Враховуючи, що $r ds$ — це подвоєна площа елементарного трикутника, тобто

$$r ds = 2d\omega, \quad (7.31)$$

тому $dM_{kp} = 2\tau\delta d\omega$.

Інтегруючи цей вираз по контуру з урахуванням (7.29), маємо:

$$M_{kp} = 2\tau\delta d\omega, \quad (7.32)$$

де ω – площа, що охоплюється середньою лінією тонкостінного перерізу.

З (7.32) отримаємо формулу Бредта:

$$\tau = \frac{M_k}{2\omega\delta}. \quad (7.33)$$

Якщо товщина профілю неоднакова, то максимальне напруження в тонкостінному профілі визначається формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{2\omega\delta_{\min}}. \quad (7.34)$$

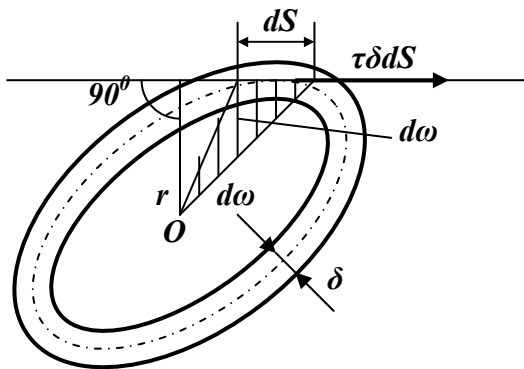


Рис. 7.16. Дотичні напруження в тонкостінному перерізі

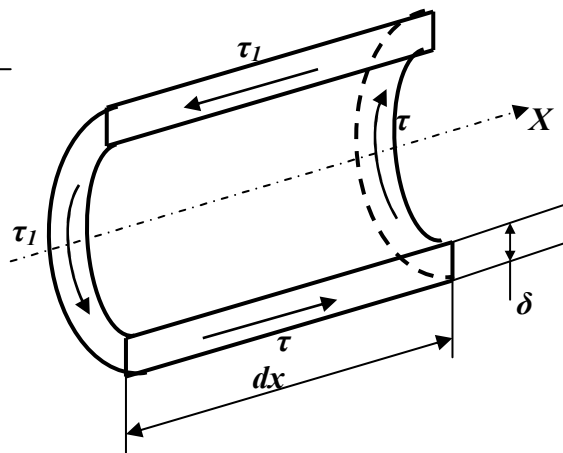


Рис. 7.17. Дотичні напруження в елементі довжиною dx

Розглянемо потенціальну енергію деформації, що накопичується в елементарному об'ємі тонкостінного стержня розмірами d, s, dx, δ .

Враховуючи, що при крученні має місце чистий зсув, запишемо:

$$du = \frac{\tau^2}{2G} \delta dx ds. \quad (7.35)$$

Тоді, інтегруючи по замкненому контуру та по довжині l , маємо:

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^l \oint \tau^2 \delta ds dx = \frac{l\tau^2\delta^2}{2G} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (7.36)$$

Враховуючи (7.32), після елементарних перетворень отримаємо вираз для відносного кута закручення:

$$\theta = \frac{M_{kp}}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (7.37)$$

При постійній товщині перерізу по довжині контуру s :

$$\theta = \frac{M_{kp}s}{4G\omega^2\delta}. \quad (7.38)$$

Розглядаючи кручення тонкостінної труби (рис. 7.18) будемо мати:

$$\omega = \pi R^2; \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta},$$

тоді

$$\tau = \frac{M_{kp}}{2\pi R^2 \delta} ; \quad (7.39)$$

$$\theta = \frac{M_{kp}}{2\pi R^3 G} . \quad (7.40)$$

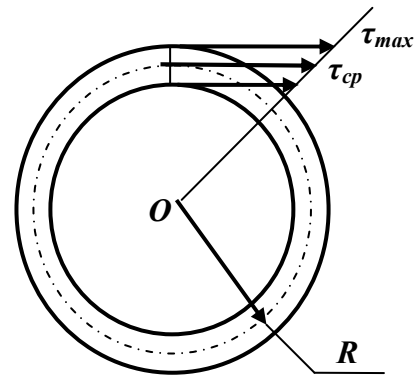


Рис. 7.18. Дотичні напруження в тонкостінному перерізі

8. Згин

Згин – це вид деформації, який виникає при прикладанні до стержня пар сил, які утворюють моменти в площинах, що проходять через вісь стержня.

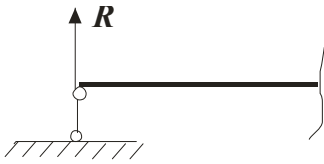
Стержень, який працює на згин, називають балкою.

Вільний, не опертий кінець балки називають консолью.

8.1. Типи опор балок

Усі існуючі опори балок можна звести до трьох типів:

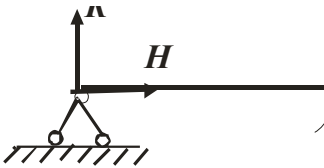
А). Шарнірно - рухома опора (рис.8.1).



Характерна тим, що на ній виникає реакція, нормальна до опори.

Рис.8.1. Шарнірно - рухома опора

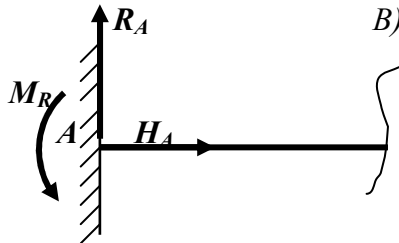
Б). Шарнірно - нерухома опора (рис.8.2).



Характерна тим, що на ній виникає реакція, яка може бути розкладена на дві складові: одна - нормальна до опори, а друга - вздовж балки.

Рис.8.2. Шарнірно - нерухома опора

В). Жорстке зацмлення (рис.8.3).



Характерне тим, що на ній, крім двох складових реакцій, може виникати ще й реактивний момент M_R .

Рис.8.3. Жорстке зацмлення

Проміжні шарніри – це елементи, які гасять і не передають згинні моменти (рис.8.4). Слід зауважити, що сума моментів відносно центра шарніра від сил, взятих із одного боку від шарніра, дорівнює 0.

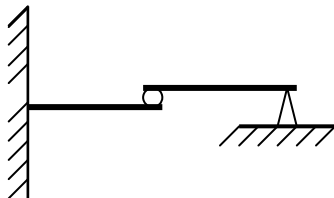


Рис.8.4. Проміжний шарнір

8.2. Внутрішні силові фактори при згині

Розглядаючи згин, введемо на додаток до основних гіпотез опору матеріалів ще деякі гіпотези, характерні для згину:

- будемо розглядати перерізи, що мають хоча б одну вісь симетрії, причому навантаження будемо проводити саме в площині симетрії;
- перерізи, нормальні до осі балки, залишаються плоскими в процесі деформації (гіпотеза плоских перерізів);
- сусідні волокна балки (уявимо її волокнистою структурою) не тиснуть одне на одне.

Розглянемо довільно навантажену в напрямі, нормальному до осі, балку (рис. 8.5).

Користуючись методом перерізів, розріжемо цю балку в довільному перерізі – „I-I” на відстані x від лівої опори та відкинемо праву, наприклад, частину (рис. 8.6).

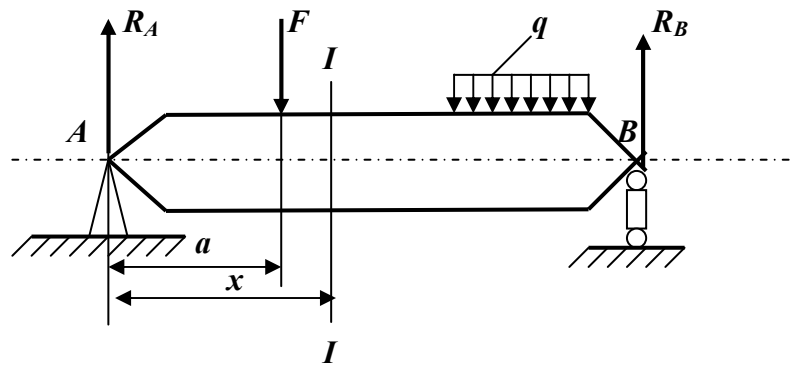


Рис.8.5. Довільно навантажена балка

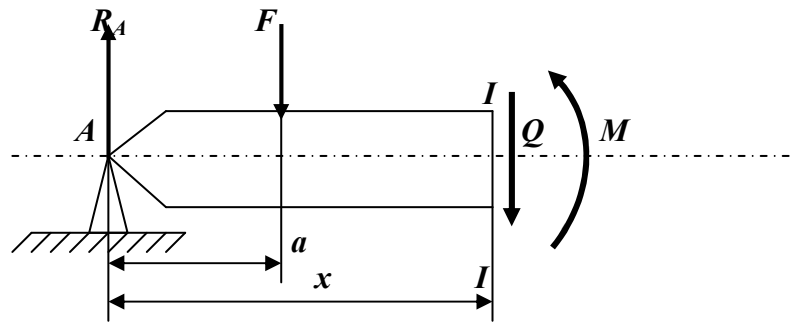


Рис.8.6. Внутрішні силові фактори при згині

Частина, що залишається, повинна знаходитися в рівновазі. Тоді сума сил і моментів, що діють відносно перерізу „I-I” повинні дорівнювати 0. Це можливо тільки в тому випадку, коли замість дії відрізаної частини у перерізі прикласти зосереджену силу Q та момент M , які будуть дорівнювати алгебраїчній сумі всіх сил і моментів відповідно, взятих зліва від перерізу. Тобто, з точки зору рівноваги можна записати:

$$\begin{cases} \sum Y = R_A - P_1 - Q = 0 \\ \sum M = R_A x - P(x - a) - M = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

звідки

$$\begin{cases} Q = R_A - P_1 \\ M = R_A x - P_1(x - a) \end{cases} \quad (8.2)$$

У даному випадку розглядаємо вже 2 внутрішніх силових фактори – *перерізуючу силу* Q (яку ще називають „поперечною силою”) та *згинаючий момент* M .

Згідно з методом перерізів, перерізуючу силу Q та згинаючий момент M *підраховують як алгебраїчні суми відповідних величин, взятих із одного боку від перерізу.*

Встановимо правила вибору знаків. Якщо підрахунок сил проводиться зліва, то сила направлена догори – додатна. Якщо справа – навпаки, достатньою буде сила, направлена вниз (рис. 8.7). Для моментів правило знаків вибирають так: якщо момент вигинає балку опуклістю вниз – він додатний, якщо навпаки – від’ємний (рис. 8.8).

За рахунок наявності в перерізі, нормальному до осі балки, зразу двох силових факторів Q та M , у ньому в загальному випадку виникають як нормальні, так і дотичні напруження.

Причому,

$$\begin{aligned} \sigma &= \varphi(M); \\ \tau &= f(Q). \end{aligned}$$

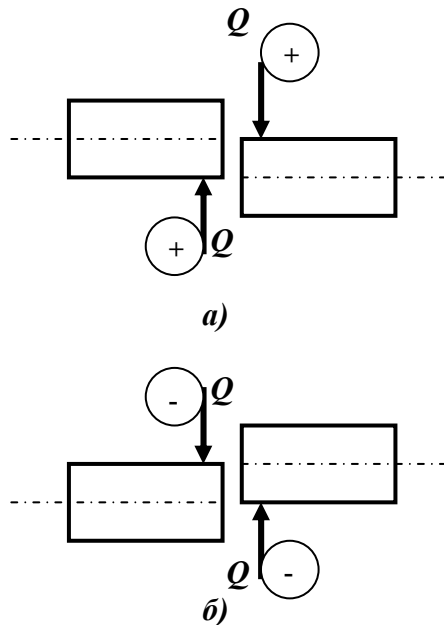


Рис.8.7. Вибір знаків для перерізуючої сили: а) додатній, б) від’ємний

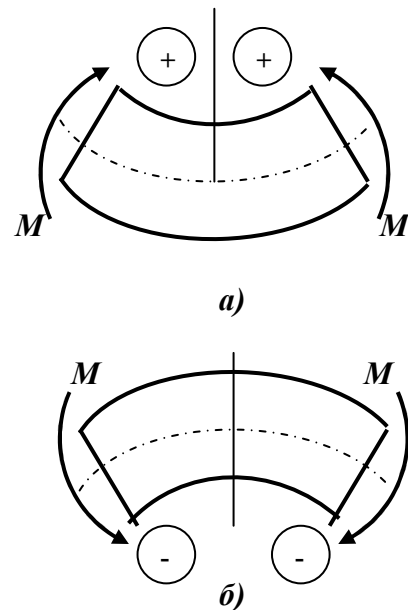


Рис.8.8. Вибір знаків для згинаючого моменту: а) додатній, б) від’ємний

Очевидно, чим більшими у перерізі будуть Q та M , тим більшими будуть і відповідні напруження (за умов, що балка має один і той же переріз по всій довжині). Тому визначення небезпечного перерізу (тобто перерізу, в якому виникають найбільші напруження) пов’язано з визначенням функцій розподілу перерізуючої сили Q та згинаючого моменту M . Це можна робити як аналітичним шляхом, так і шляхом побудови епюр розподілу цих величин. На практиці застосовують обидва шляхи. Користуючись аналітичними залежностями, проводять розрахунки, а епюри використовують для якісного оцінювання факторів згину (характер розподілу величин, орієнтація розтягнутих волокон тощо).

8.3. Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

Розглянемо довільно навантажену балку (рис.8.9). На відстані x від лівої опори розглянемо ділянку довжиною dx , вибрану таким чином, щоб на ній не була прикладена зосереджена сила або момент (рис. 8.10).

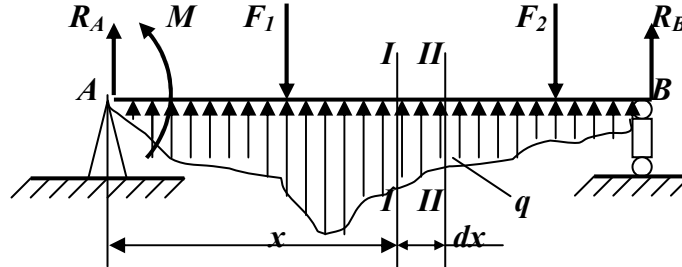


Рис. 8.9. Довільно навантажена балка

На границях цієї ділянки виникають перерізуючі сили Q_1 та Q_2 і моменти M_1 та M_2 відповідно. Причому,

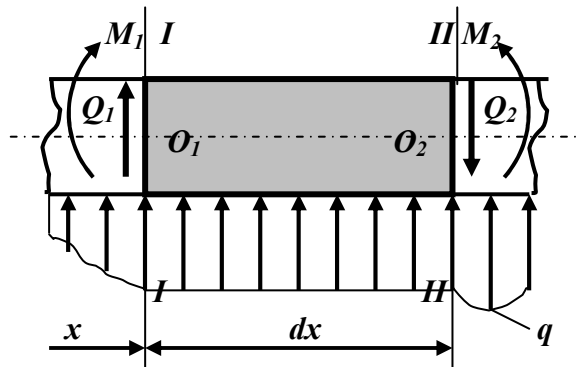


Рис. 8.10. Ділянка довжиною dx

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q; & M_1 &= M; \\ Q_2 &= Q + dQ; & M_2 &= M + dM. \end{aligned}$$

Розглянемо рівновагу виділеного елемента:

$$\sum Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0; \quad (8.3)$$

$$\sum M_{O_2} = Qdx + qdx \frac{dx}{2} + M - (M + dM) = 0.$$

Звідки з точністю до нескінченно малих величин

$$\boxed{\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)}; \quad (8.4)$$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)}.$$
 (8.5)

Продиференціювавши (8.5), отримаємо:

$$\boxed{\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)} \quad (8.6)$$

Зауваження. Якщо на ділянці, що розглядається, діє розподілений момент - m , залежність (8.5) буде мати вигляд:

$$\frac{dM}{dx} = Q + m.$$

Ці співвідношення мають велике значення при дослідженні напруженого стану балки та побудові епюр перерізуючих сил і згинаючих моментів.

8.4. Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M

Побудову епюр перерізуючих сил і згинаючих моментів, що проводиться з метою визначення небезпечних місць балки та обчислення в них напружень, можна проводити як якісно (наближено, коли інженеру невідомі всі параметри навантаження), так і кількісно (при повному чисельному розрахунку). Кількісно епюри будують за тими ж правилами, що й графіки будь-яких функцій. Тобто на відповідній ділянці записують функції $Q(x)$ та $M(x)$, підраховують їх значення у характерних точках (екстремуми, значення на границях ділянок) і будують графічні зображення у відповідних системах координат.

Що стосується якісної побудови епюр, то існує кілька основних правил для їх побудови.

8.4.1. Правила контролю та рекомендації щодо побудови епюр Q і M

1. З'ясувати систему зовнішніх сил, зокрема визначитися з реакціями опор.

Визначити, які сили треба взяти до уваги, а якими можна знехтувати. Наприклад, чи треба у випадку, що розглядається, враховувати власну вагу балки? Що стосується реакцій, то, якщо задані параметри балки та конкретні навантаження, слід також чисельно визначити і реакції опор. Якщо ж навантаження задані в загальному вигляді, то і реакції визначають тільки якісно.

2. З чого почати і чим закінчити (або що на кінцях балки)?

Епюра сил. Якщо на кінцях немає зосередженої сили (в т.ч. реакцій опор), перерізуюча сила дорівнює нулю.

Якщо йти по балці зліва, сила, що діє догори, дасть стрибок вгору, якщо йти справа, ця ж сила зумовлює стрибок вниз.

Епюра моментів. Якщо на кінцях немає моментів (або жорсткого защемлення, де виникає реактивний момент), згинаючий момент дорівнює нулю.

Якщо моменти (чи жорстке защемлення) є, то на цьому кінці на епюрі моментів спостерігається стрибок у тому напрямі, з якого боку розтягнуті волокна балки.

Зауваження. В різних підручниках з опору матеріалів автори будують епюру моментів, базуючись на різних критеріях. Одні пропонують будувати епюру моментів, відкладаючи додатні значення у верхній півплощині, а від'ємні – у нижній, інші рисують епюру з боку розтягнутих волокон, мотивуючи це тим, що розтягнуті волокна є небезпечними з точки зору розвитку тріщин (при цьому епюра моментів

виявляється дзеркально відображеною відносно моментів, зображених за першим способом, тобто додатні значення відкладаються на нижній півплощині). Ніякої принципової різниці між цими способами немає. Для подальшого викладання матеріалу домовимося **додатні значення моментів відкладати у нижчій півплощині (при цьому епюра буде нарисована з боку стиснутих волокон балки).**

3. В якому напрямку починати будувати епюру.

Епюра сил. При побудові епюри зліва направо, якщо навантаження спрямоване донизу, лінія епюри теж іде вниз. Якщо навантаження спрямоване догори, то графік теж зростає догори. При побудові епюри справа наліво все навпаки.

Епюра моментів. Моменти додатного напрямку відкладають вниз, моменти від'ємного напрямку – догори (тобто епюру будують з боку розтягнутих волокон балки).

4. Форма епюри.

Для розгляду даного питання слід добре зрозуміти та усвідомити диференціальні співвідношення між згинаючим моментом $M(x)$, перерізуючою силою $Q(x)$ та розподіленим навантаженням $q(x)$ (8.4- 8.6).

Епюра сил. Якщо на ділянці відсутнє розподілене навантаження, перерізуюча сила є постійною величиною:

- якщо на ділянці діє рівномірно розподілене навантаження, функція $Q(x)$ є лінійною;

- якщо q розподіляється по лінійній залежності, функція $Q(x)$ параболічна і т.п.

Епюра моментів. Епюру (як правило) будують після побудови епюри сил:

- якщо на ділянці $Q(x) = const$, то $M(x)$ – лінійна функція;
- якщо $Q(x)$ лінійна, то $M(x)$ – параболічна і т.д.

Варто нагадати: якщо епюра $Q(x)$ перетинає вісь (тобто $Q(x) = 0$), функція $M(x)$ в цьому перерізі має екстремальне значення.

5. Стрибки.

Епюра сил. На епюрі сил стрибки можуть бути лише в місці прикладання зосередженої сили (в т.ч. на опорах унаслідок виникнення реакцій).

Епюра моментів. На епюрі моментів стрибки можуть бути лише в місці прикладання моментів, у т.ч. у жорсткому защемленні, тому що там може виникнути реактивний момент.

8.4.2. Приклад побудови епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M

Нехай задана балка (рис. 8.11). Побудуємо для неї епюри $Q(x)$ та $M(x)$ без урахування власної ваги.

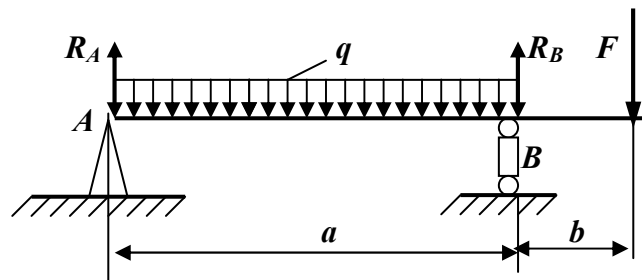


Рис. 8.11. Навантажена балка

Нехай $q = 2\text{кН/м}$; $F = 1\text{кН}$; $a = 4\text{м}$; $b = 1\text{м}$.

Спершу визначимо систему всіх зовнішніх сил, що діють на балку, підрахувавши реакції опор R_A та R_B . Для цього використаємо рівняння рівноваги – запишемо суму моментів спочатку відносно т. A , потім – відносно т. B . Ці два рівняння дадуть R_A та R_B . Для перевірки використаємо третє рівняння рівноваги $\sum Y = 0$.

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + F \cdot 5 = 0.$$

Звідки
$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 5}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5}{4} = 5,25(\text{кН});$$

$$\sum M_B = R_B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0.$$

Звідси
$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 11}{4} = 3,75(\text{кН}).$$

Перевірка:
$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 3,75 + 5,25 - 2 \cdot 4 - 1 = 0.$$

Обидві реакції вийшли додатними, що показує відповідність нарисованих стрілок R_A та R_B реальному напрямку.

Тепер можна приступати до записування функцій та побудови епюр. Розіб'ємо балку на дві ділянки. На першій ділянці будемо йти зліва, а на другій – справа.

I ділянка. $0 \leq x < 4$ (розглядаємо її, йдучи зліва).

Запишемо функцію розподілу перерізуючих сил:

$$Q(x_1) = R_A - qx_1.$$

Функція лінійна. Знайдемо її значення на кінці та початку.

$$Q(0) = R_A = 3,75(\text{кН});$$

$$Q(4) = R_A - 2 \cdot 4 = 3,75 - 8 = -4,25(\text{кН}).$$

Тепер запишемо функцію моментів:

$$M(x_1) = R_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} = R_A x - q \frac{x_1^2}{2}.$$

Функція параболічна. Знайдемо її значення на кінцях проміжку:

$$M(0) = 0;$$

$$M(4) = 3,75 \cdot 4 - 2 \frac{4^2}{2} = -1(\text{кНм}).$$

Тепер II ділянка $0 \leq x_2 < 1$ (ідемо вже справа).

Відповідно запишемо функції сил і моментів:

$$Q(x_2) = F = 1(\text{кН}) \quad - \text{функція є константою};$$

$$M(x_2) = -Fx_2 \quad - \text{лінійна функція}.$$

Знаходимо її значення на границі проміжку:

$$M(0) = 0;$$

$$M(1) = -1(\text{кНм}).$$

Очевидно, що найбільше значення функцій моментів може бути або на правій опорі (т. B), або на першій ділянці. На опорі момент відомий. Знайдемо тепер максимальний момент M_{\max} . З епюри M_{\max} спостерігається на I ділянці. Виходячи з диференціальних залежностей (8.5), можна записати для I ділянки:

$$\frac{dM(x_0)}{dx} = Q(x_0) = R_A - qx_0 = 0;$$

$$x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{3,75}{2} \approx 1,87(\text{м}).$$

Звідки й знайдемо координату перерізу x_0 , в якому виникає M_{\max} . Тобто

$$M_{\max} = M(x_0) = R_A x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = 3,75 \cdot 1,87 - 2 \frac{1,87^2}{2} \approx 3,516(\text{кНм}).$$

Робимо графічні побудови (рис. 8.11).

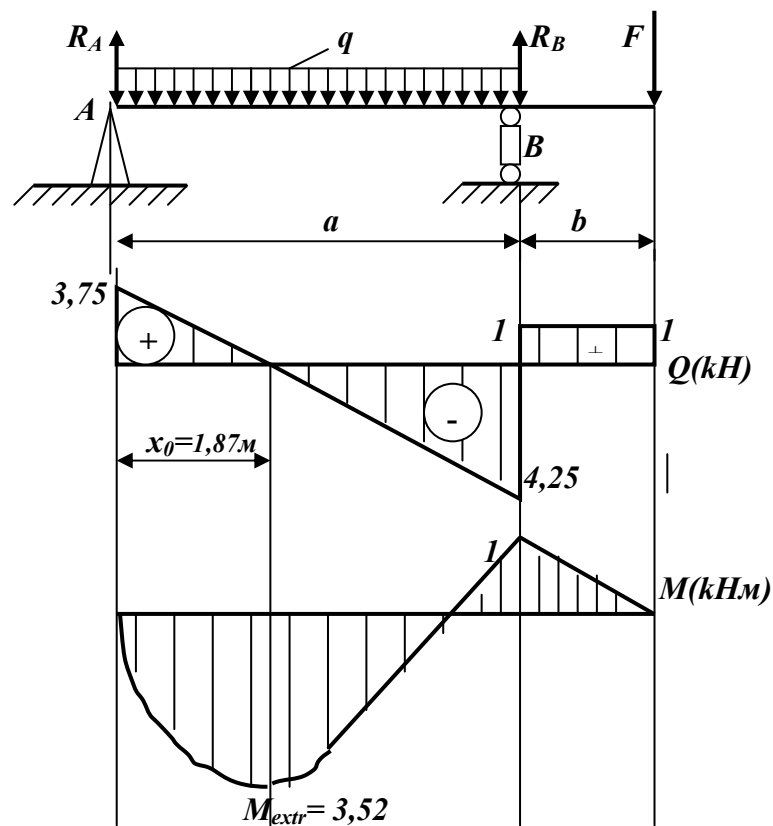


Рис. 8.11. Епюри розподілу перерізуючих сил і згинаючих моментів по довжині балки

Таким чином можна зробити висновки, що для цієї балки перерізуюча сила досягає свого максимального значення на правій опорі ($Q_{\max} = 4,25 \text{кН}$), а найбільший момент виникає на відстані $x_0 = 1,87 \text{м}$ від лівої опори ($M_{\max} = 3,52 \text{кНм}$).

8.5. Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за нормальними напруженнями

Вже відзначалося, що нормальні та дотичні напруження, які одночасно можуть виникати в нормальному до осі перерізі балки, пов'язані з моментами та перерізуючою силою відповідно.

Розглянемо випадок так званого *чистого згину*, який виникає на ділянці за умов $Q = 0$ та $M = const$. Такий випадок можна відтворити, наприклад, при навантаженнях балок, зображених на рис. 8.12,а та 8.12,б. На ділянках CD цих балок виникає чистий згин (епюри моментів $M(x)$ на цих ділянках затемнені).

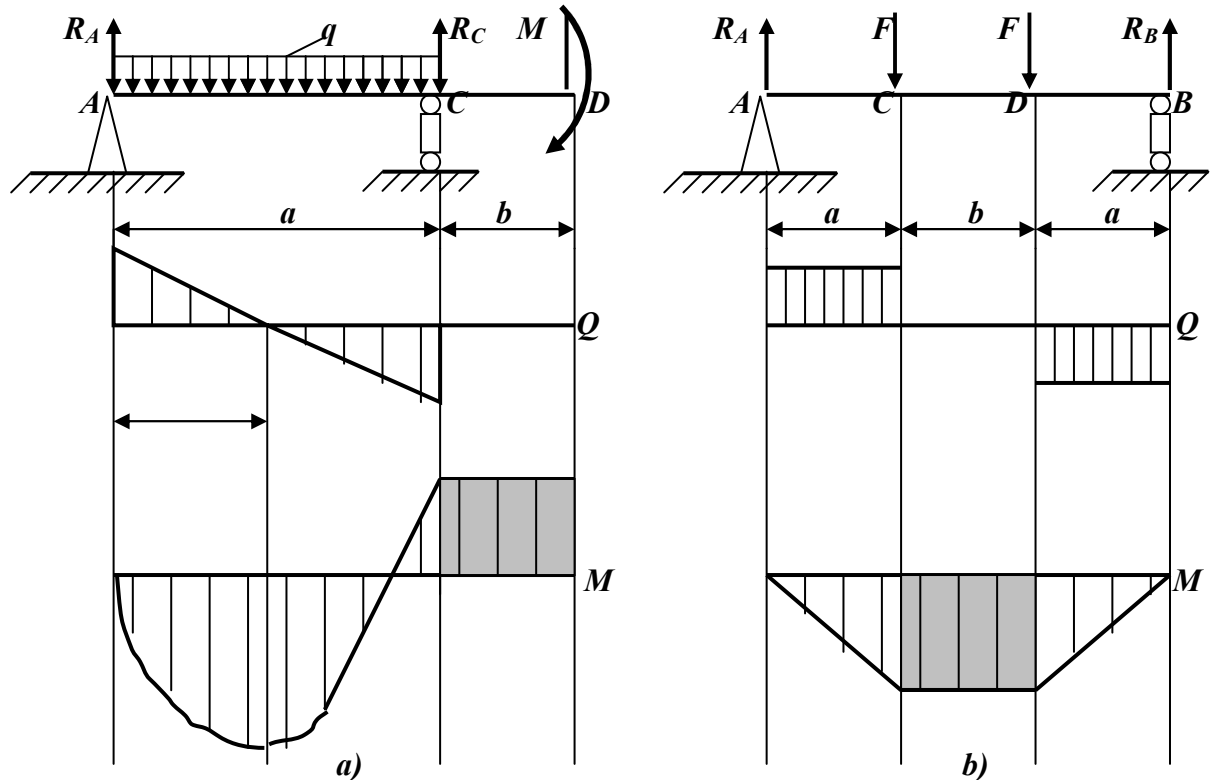


Рис.8.12. Випадки чистого згину: а) на консолі, б) для ділянки між опорами

Для виведення формул нормальних напружень при згині σ домовимося розглядати випадок чистого згину.

Розглянемо ділянку балки довжиною dx , яка знаходиться під дією чистого згину (рис. 8.13). При цьому направимо вісь x уздовж балки, вісь y пов'яжемо з шаром, який не деформується (не стискається і не розтягується). Його називають – *нейтральним шаром*. Вісь z поєднаємо з висотою перерізу.

Описуючи статику цієї ділянки, матимемо:

$$\begin{aligned} \sum X &= \int_F \sigma dF \\ \sum Y &= 0 \\ \sum Z &= 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= M - \int_F \sigma z dF = 0\end{aligned}\quad (8.9)$$

$$\sum M_z = \int_F \sigma y dF = 0. \quad (8.10)$$

Оскільки розподіл σ по висоті перерізу невідомий, задача носить статично невизначений характер. Тому слід розглянути деформацію цієї ділянки (рис. 8.14).

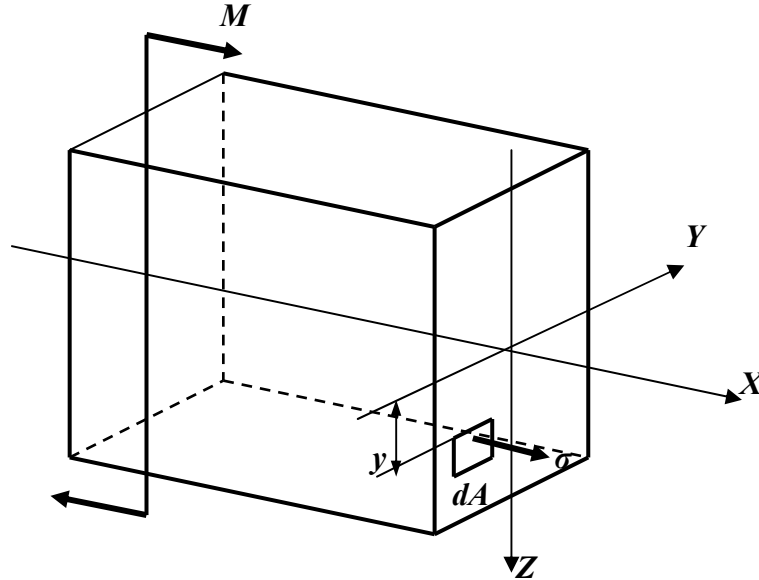


Рис.8.13. Напружений елемент балки

Визначимо деформацію волокна AB . Його початкова довжина $l_0 = dx$. Наприкінці деформації можна записати $l_k = (\rho + z)d\alpha$. При цьому довжина нормального шару не змінюється: $dx = \rho d\alpha$.

$$\text{Тоді } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{(\rho + z)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z}{\rho}; \text{ відповідно } \sigma = E\varepsilon = E \frac{z}{\rho}. \quad (8.11)$$

Звідси випливає, що нормальні напруження σ мають лінійний розподіл по висоті перерізу.

Тепер підставимо (8.11) у (8.8):

$$\int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F z dF = 0. \quad (8.12)$$

Відношення $\frac{E}{\rho}$ не дорівнює нулю, тому дорівнює нулю інтеграл $\int_F z dF$, а цей інтеграл є статичним моментом площі перерізу відносно осі $y - S_y$. Якщо S_y дорівнює нулю, то вісь y – центральна. Тобто, при згині прямого бруса нейтральна вісь (нейтральний шар) проходить через центр ваги перерізу.

Підставимо (8.11) у (8.10):

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E}{\rho} \int_F z y dF = 0 \quad (8.13)$$

Останній інтеграл у цьому виразі є відцентровим моментом перерізу відносно осей $y, z - I_{yz}$. У зв'язку з вказаними вище причинами він також дорівнює нулю, що означає: *осі y та z є головними осями*. Відносно однієї з них (у даному випадку – y) момент інерції буде \max , а відносно другої (вісь z) – \min .

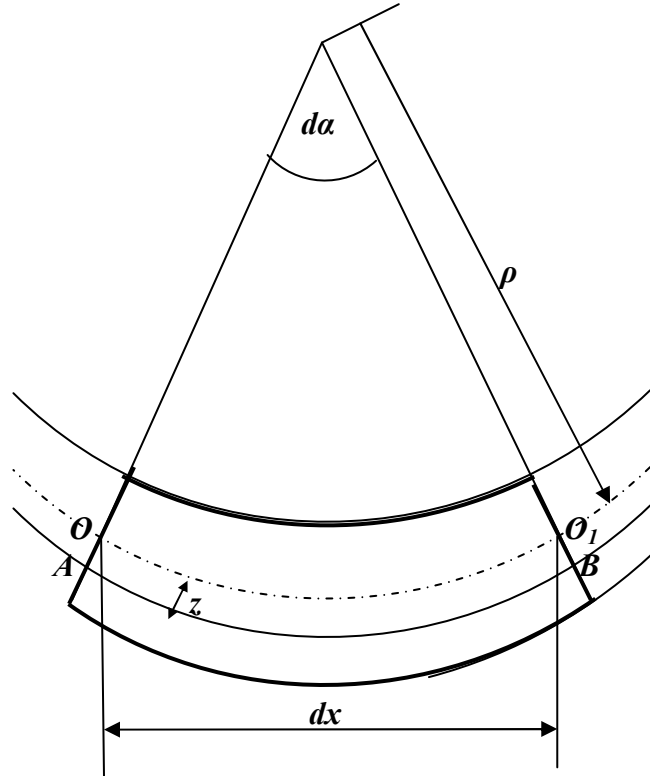


Рис.8.14. Деформація елемента довжиною dx

Тепер підставимо (8.11) у (8.9):

$$M - \frac{E}{\rho_F} \int z \cdot z dF = 0$$

або

$$M = \frac{E}{\rho_F} \int z^2 dF. \quad (8.14)$$

Останній інтеграл у цьому виразі є осевим моментом інерції відносно осі $y - I_y$.

$$M = \frac{EI_y}{\rho} \quad (8.15)$$

або, приймаючи до уваги (8.11), та помножаючи обидві частини рівняння (8.15) на z , отримаємо:

$$\boxed{\sigma = \frac{M \cdot z}{I_y}}. \quad (8.16)$$

Якщо розглянути найбільші напруження в перерізі (див. рис. 8.15), то слід відзначити, що вони виникають у найвіддаленіших від нейтральної осі шарах ($|z| = z_{\max}$).

Тобто
$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot z_{\max}}{I_y} = \frac{M}{\frac{I_y}{z_{\max}}} = \frac{M}{W_y}, \quad (8.17)$$

де W_y – момент опору перерізу відносно осі y .

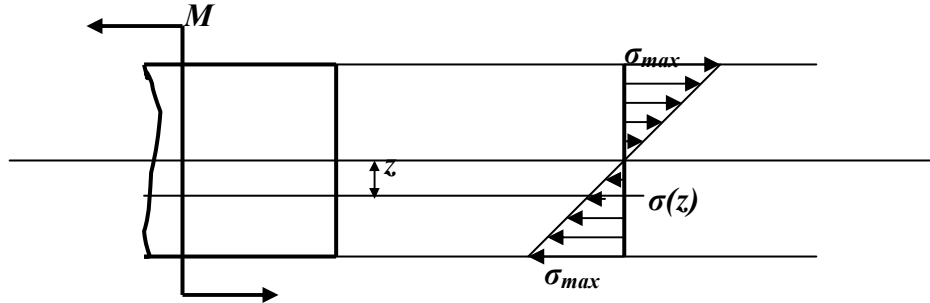


Рис.8.15. Розподіл нормальних напружень по висоті перерізу

Повертаючись до питання знаходження \max нормальних напружень σ_{\max} у балці, слід ще знати небезпечний переріз, тобто той, де $M = M_{\max}$, тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y}. \quad (8.18)$$

Використовуючи (8.18), неважко записати умову міцності за нормальними напруженнями при згині:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (8.19)$$

З цієї формули за відомими моментами M та знаючи допустимий рівень напружень $[\sigma]$, можна визначити осьовий момент опору W_y (а далі і розміри відповідного перерізу) або за відомими формою та розмірами перерізу підібрати допустимі силові фактори, якими можна навантажити балку. При цьому значення M_{\max} підбирають при побудові епюр $Q(x)$ та $M(x)$.

Практика показала, що в більшості випадків найнебезпечнішими для балок є нормальні напруження. Тому залежності (8.17 ÷ 8.19) є дуже важливими розрахунковими формулами.

Дослідження показали, що формули (8.17 ÷ 8.19) практично справедливі не тільки для випадку чистого згину, але й у тому випадку, коли на ділянці, що розглядається, перерізуюча сила Q не дорівнює нулю.

Похибка незначна і можна вважати формули (8.17 ÷ 8.19) універсальними при розгляді плоского згину прямого бруса.

Слід зауважити, що для звичайних довгих балок у більшості випадків саме нормальні напруження є найнебезпечнішими.

8.6. Дотичні напруження при згині. Формула Журавського. Умова міцності при згині за дотичними напруженнями

Зважаючи на те, що, як правило, небезпечними для балок є нормальні напруження, трапляються випадки, коли вирішальну роль при руйнуванні об'єктів відіграють дотичні напруження.

Наприклад, при будівництві знаменитої залізниці Петербург–Москва траса проходила через заболочену місцевість і через мілкі та вузькі річки треба було будувати дуже багато мостів. Ці мости представляли з себе короткі балки і при розрахунку їх за нормальними напруженнями, мали начебто колосальний запас міцності, а насправді не витримували навантажень. Цим питанням зайнявся технічний директор будівництва професор Петербурзького інституту інженерів залізничного транспорту Д. Журавський. Він встановив, що при згині коротких балок згинаючі моменти не можуть набути великих значень за рахунок малого плеча, в той час як перерізуючі сили, що зумовлюють саме дотичні напруження, можуть досягати значних величин.

Журавський Дмитро Іванович (1821–1891)

Роботи присвячені будівельній механіці та застосуванню математичних методів у будівельній справі. Спроектував і побудував металевий шпиль Петропавлівської вежі у Петербурзі. Розробив теорію дерев'яних ферм із залізними тяжами і застосував її у будівництві мостів через ріки Вереб'ю, Волгу, Волхов та ін. Вивів формулу для обчислень дотичних напружень при згині. Розробив наближений спосіб розрахунку балок. У 1887–1889 рр. був директором департаменту залізничних доріг Росії.

Професор Журавський вивів формулу для визначення дотичних напружень у прямокутних перерізах. Інженерна практика довела, що цю формулу з достатньою ступенем точності можна використовувати і для інших типів перерізів.

Наведемо виведення формули для обчислення дотичних напружень при згині. Для цього прийемо ще дві гіпотези:

- Дотичні напруження τ скрізь паралельні перерізуючій силі Q .
- Дотичні напруження постійні по ширині балки і залежать від відстані відповідного шару до нейтральної осі.

Розглянемо навантажену балку прямокутного перерізу (рис. 8.16а,б). Виділимо коротку ділянку довжиною dx (рис. 8.17), причому домовимось, що $b \ll h$.

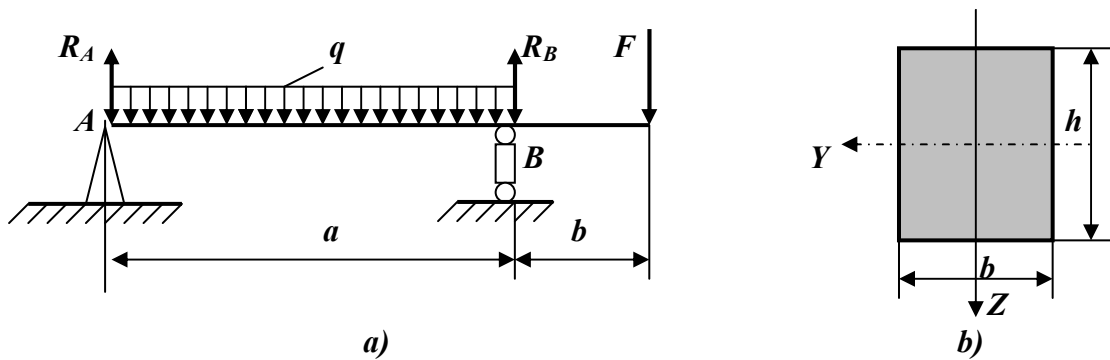


Рис. 8.16. а) навантажена балка, б) прямокутний переріз

На цій ділянці і справа і зліва виникають нормальні напруження σ' та σ'' відповідно (рис. 8.18).

Причому
$$\sigma' = \frac{M \cdot z}{I_y}; \quad \sigma'' = \frac{M + dM}{I_y}.$$

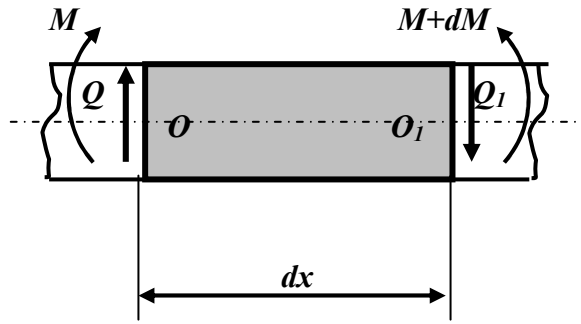


Рис. 8.17. Навантажена ділянка довжиною dx

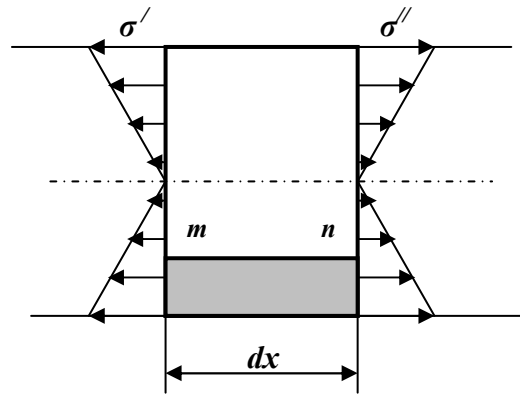


Рис.8.18. Розподіл нормальних напружень по висоті елемента

Відсічемо частину елемента балки, провівши горизонтальну площину mn на відстані z від нейтральної осі. В перерізі на відстані ξ від нейтральної осі відокремимо елементарну площадку dA шириною $d\xi$ (рис. 8.19).

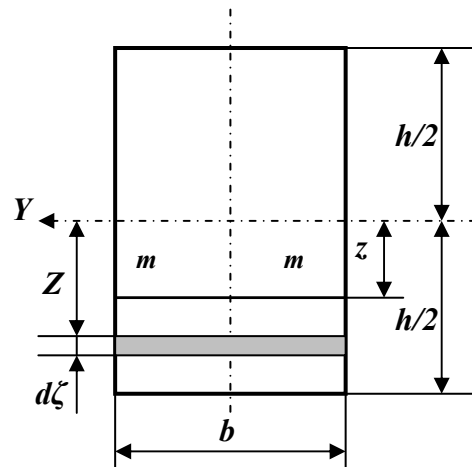


Рис.8.19. Елементарна площадки шириною $d\xi$ в перерізі

Розглянемо сили, що діють на відокремлений елемент (рис. 8.20).

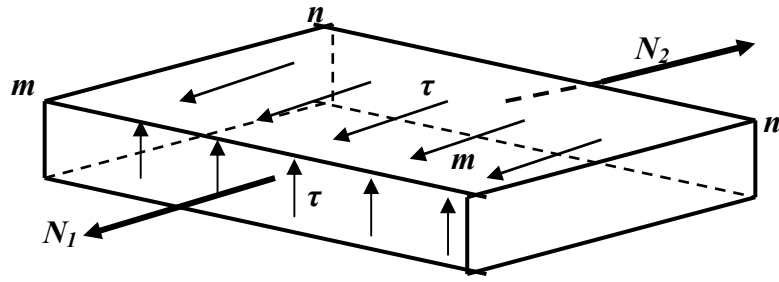


Рис.8.20. Навантаження відокремленого елемента

По елементу dA діє сила

$$dN = \sigma' dA = \frac{M_{(x)} \xi}{I_y} dA .$$

Тоді

$$N_1 = \int_{F_1} \sigma' dA = \frac{M_{(x)}}{I_y} A . \quad (8.20)$$

Останній інтеграл є статичним моментом „відрізаної” площадки (затемнена на рис. 8.18) – $S_{\text{відр}}$,

тобто

$$N_1 = \frac{M_{(x)}}{I_y} S_{\text{відр}} . \quad (8.21)$$

Цілком аналогічно

$$N_2 = \frac{M_{(x)} dM}{I_y} S_{\text{відр}} . \quad (8.22)$$

Дотичні напруження, що діють на грані nm (рис. 8.20), виникають за рахунок різниці сил N_1 та N_2 . Тобто

$$T = \tau \cdot b dx ; \quad (8.23)$$

$$T = N_2 - N_1 . \quad (8.24)$$

Звідки, враховуючи (8.21) та (8.22), будемо мати :

$$\tau \cdot b dx = \frac{dM}{I_y} S_{\text{відр}} \quad (8.25)$$

або

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_{\text{відр}}}{I_y b} . \quad (8.26)$$

Використовуючи (8.5), остаточно

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{\text{відр}}}{b \cdot I_y} . \quad (8.27)$$

Цей вираз називають формулою Журавського.

Цікаво подивитися на розподіл τ по висоті перерізу.

Для прямокутного перерізу (рис. 8.21) знайдемо τ на відстані z від нейтральної осі y .

Для цього випадку

$$I_y = \frac{bh^3}{12} ;$$

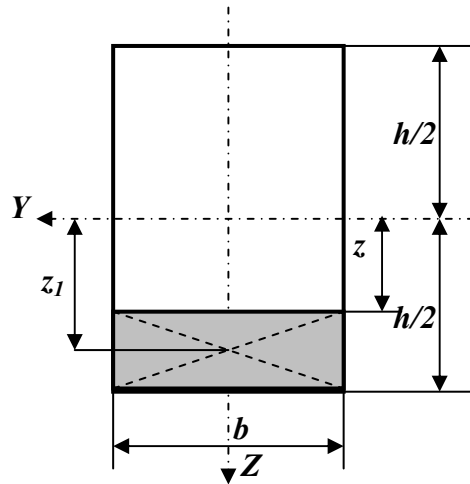


Рис.8.21. „Відрізана” частина перерізу

$$S_{\text{вiдр}} = F_1 \cdot z_1 = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

або

$$S_{\text{вiдр}} = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{2z^2}{h^2} \right).$$

Тоді

$$\tau = \frac{Q \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (8.28)$$

Цей вираз вказує на параболічний характер зміни дотичних напружень по висоті перерізу. Неважко помітити, що $\tau = 0$ при $z = \pm \frac{h}{2}$ на верхньому та нижньому шарах балки, тобто в тій зоні, де нормальні напруження σ досягають max значень. І навпаки,

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \quad (8.29)$$

при $z = 0$. Тобто на нейтральній осі, де нормальні напруження σ дорівнюють нулю. Розподіл по висоті перерізу величин σ і τ зображено на рис. 8.22.

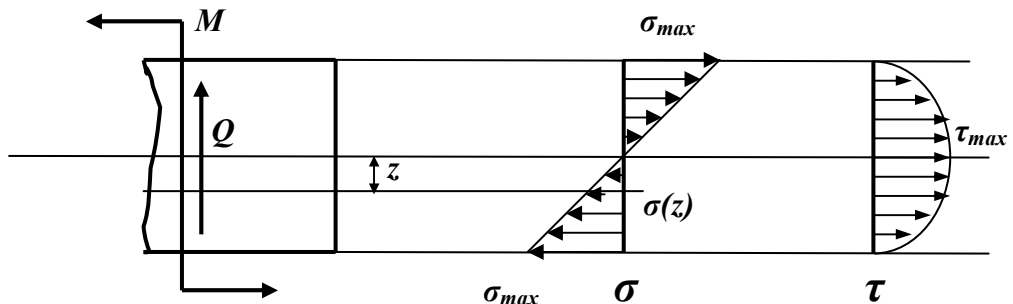


Рис.8.22. Розподіл нормальних та дотичних напружень по висоті перерізу

З (8.29) очевидно, що максимальне значення τ більше від того, що було б отримане за розрахунками на звичайний зсув в 1,5 раза.

Тепер можна записати умову міцності для дотичних напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\text{відр max}}}{b_{\min} I_y} \leq [\tau] . \quad (8.30)$$

Для підбирання розмірів перерізу одразу за дотичними напруженнями треба було б одночасно визначити три величини, пов'язані між собою – b ; I_y та $S_{\text{відр max}}$, що є неможливим. Тому на практиці спочатку підбирають розміри перерізу з умови міцності за нормальними напруженнями, а далі перевіряють їх за формулою (8.30). Якщо результати розрахунків задовольняють (8.30), розрахунок закінчують. Якщо ні, то збільшують переріз (вибирають більший розмір сортаменту) і так до тих пір, доки умова не буде виконана. Зрозуміло, що умова міцності за нормальними напруженнями при цьому буде виконуватися автоматично.

8.7. Повна перевірка балки на міцність

Як правило, при звичайних інженерних розрахунках можна обмежитися використанням умови міцності за нормальними напруженнями (8.19) та перевіркою міцності за дотичними напруженнями (8.30). Але при розрахунках відповідальних елементів конструкції слід ретельніше дослідити напружений стан, що виникає в балці.

Розглянемо елементи, які знаходяться на різних рівнях перерізу навантаженої балки (рис. 8.23).

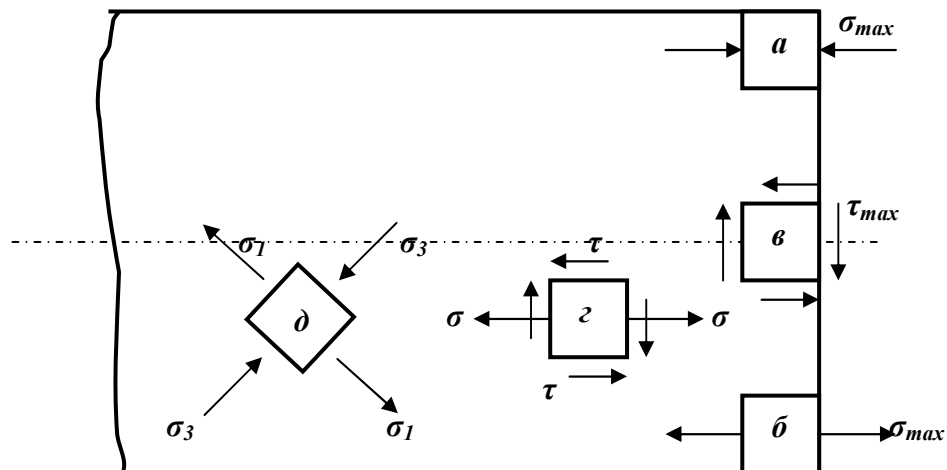


Рис.8.23. Складний напружений стан при згині

Елементи „а” та „б”, вирізані у крайніх шарах балки, знаходяться під впливом максимальних нормальних напружень, а дотичні напруження по їх гранях дорівнюють нулю. Елемент „в” розташований на нейтральній осі навпаки знаходиться під дією τ , а нормальні напруження відсутні. Розглядаючи елемент „г”, можна стверджувати, що на його гранях будуть діяти і нормальні, і дотичні напруження, причому, якщо на цьому шарі вирізати елемент за головними площадками, то він буде орієнтований як елемент „д”.

Виходячи з вищенаведеного, можна зробити висновок, що матеріал балки знаходиться у неоднорідному складному напруженому стані. Можна стверджувати, що, перевіряючи на міцність зони, найвіддаленіші від нейтральної осі, треба використовувати критерій міцності за нормальними напруженнями. Розглядаючи нейтральний шар, перевірку треба здійснювати за дотичними напруженнями, а при вивченні напруженого стану проміжних шарів треба використовувати певні теорії міцності.

Взагалі задачу розрахунку на міцність при цьому розбивають на декілька стадій:

1. Знаходять небезпечний переріз (може статися, що треба буде перевірити кілька перерізів, в яких виникають M_{\max} або Q_{\max} , або і M і Q приймають одночасно досить великі значення).

2. У перерізі знаходять небезпечні точки (шари), в яких приймають великі значення σ , τ або обидва цих напруження (таких точок теж може бути кілька).

Головні напруження в кожній точці перерізу в даному випадку визначаються

за формулами:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \\ \sigma_2 = 0; \\ \sigma_3 = \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \end{cases} \quad (8.31)$$

Підставляючи ці вирази у критерій міцності відповідних теорій міцності, отримуємо розрахункові напруження для I, II, III, IV теорій:

$$\sigma_{qI} = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma] \quad (8.32)$$

$$\sigma_{qII} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.33)$$

$$\sigma_{qIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.34)$$

$$\sigma_{qIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.35)$$

Аналогічно запишемо вираз для критерію Мора:

$$\sigma_{qM} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.36)$$

де $m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}$.

Практика показала, що для розрахунку балок із пластичних матеріалів доцільно використовувати III та IV теорію міцності.

Цікавим є не тільки визначення величин головних напружень, але й їх орієнтації в різних шарах балки. Це потрібно, наприклад, при розгляді питання про конструювання залізобетонних балок.

Розглянемо напрямки головних напружень у різних точках якогось перерізу (рис. 8.24). Тонкими лініями показано напрямок σ_1 , товстими – σ_3 .

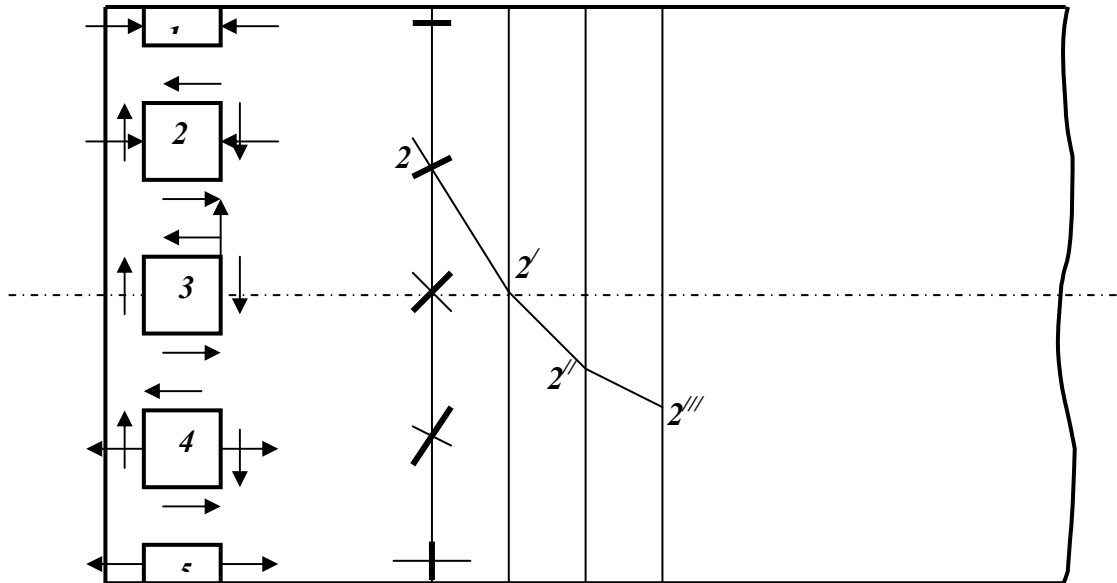
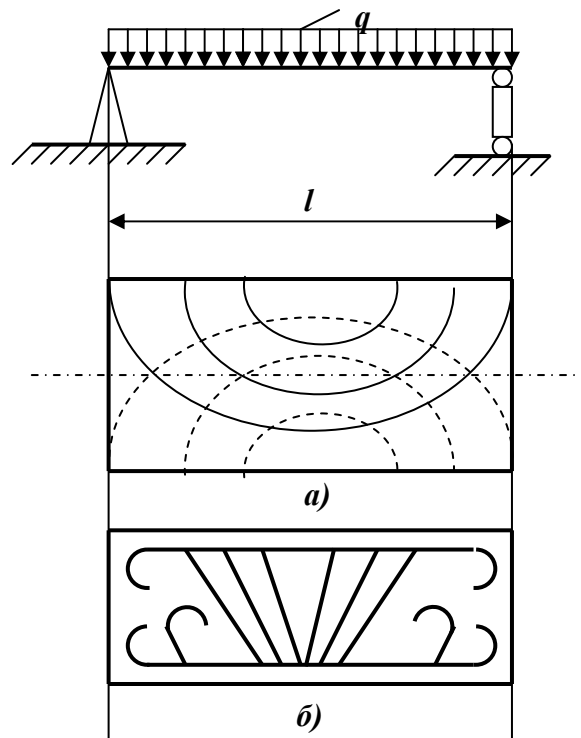


Рис.8.24. Траєкторії головних напружень



**Рис.8.25. Принцип армування залізобетонних балок:
а) картина ізолат, б) розташування арматури**

Траєкторії головних напружень (ізолати) можна побудувати, проводячи з точки, де відомі напрямки σ_1 та σ_3 , відрізок до перетину з наступним перерізом за напрямом того напруження, траєкторію якого будемо. З отриманої точки знов треба

провести відрізок до перетину із наступним перерізом, орієнтуючи цей відрізок за напрямком напруження вже в даній точці й т.д. При досить малій відстані між перерізами ця ламана лінія перетвориться у криву, яку називають ізостатою або траєкторією головного напруження. В залізобетонних балках арматуру потрібно розташовувати за напрямом траєкторії головних розтягуючих напружень (рис. 8.25).

8.8. Згин тонкостінних стержнів

Ми вже розглядали питання про дотичні напруження, що виникають при згині. Слід відзначити, що за умови врахування дотичних напружень при згині, треба відкинути гіпотезу плоских перерізів.

Якщо тонкостінний переріз завантажується у площині симетрії, для нього діють формули, виведені у гл.8..

Розглянемо питання про розподіл дотичних напружень у випадку навантаження перерізу не у площині симетрії. Покажемо існування осі, паралельної до осі стержня, коли сили, які діють у будь-якій площині, що проходить через цю вісь, не викликають кручення. Точку перетину цієї осі з площиною перерізу (т. C на рис. 8.26) назвемо *центром згину*.

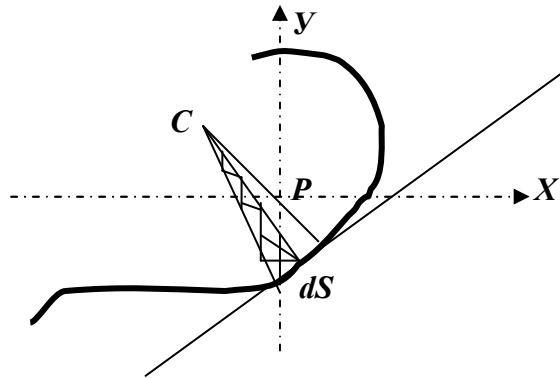


Рис. 8.26. Центр згину

Якщо це так, то сума моментів усіх дотичних сил у перерізі відносно т. C дорівнює 0.

На елемент ds з координатами x, y діє сила $\tau \delta ds$ (δ – товщина стержня). Тоді її момент відносно т. C буде:

$\tau \cdot \delta \cdot ds \cdot p$ (p – довжина перпендикуляра, опущеного з т. C на дотичну). Якщо C є центром згину, то:

$$\int_0^h \tau \delta p ds = 0 .$$

$p \cdot ds$ – це подвоєна площа трикутника з основою ds та вершиною в т. C . Нехай $p ds = d\omega$,

тоді:

$$\int_0^h \tau \delta \frac{d\omega}{ds} ds = 0 .$$

9. Деформації та переміщення при згині

Під деформаціями (а точніше переміщеннями) при згині розуміють *прогин та кут повороту перерізу* (рис. 9.1).

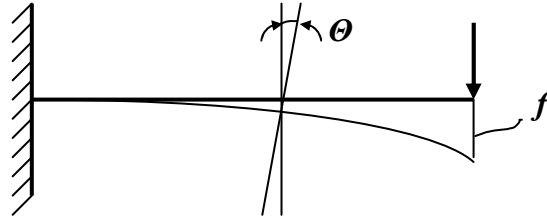


Рис.9.1. Прогин - f та кут повороту - θ при згині

Позначимо прогин – f , а кут повороту – θ . Через те, що кут θ дуже малий, можна записати:

$$\operatorname{tg}\theta = \theta = \frac{dy}{dx} , \quad (9.1)$$

тобто *функція кутів повороту θ є першою похідною від функції прогинів по довжині балки.*

Існують різні теоретичні методи визначення переміщень при згині:

- аналітичні, що базуються на інтегруванні наближеного диференціального рівняння зігнутої осі балки;
- графічні й графоаналітичні, які засновані на зв'язку аналітичних виразів та графічних зображень – епюр внутрішніх силових факторів;
- енергетичні, що створені при розгляді зв'язку деформацій та рівнем потенціальної енергії, яка при цьому накопичується в об'єкті й т.п.

9.1. Аналітичні методи визначення деформацій та переміщень при згині. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Нехтуючи впливом на кривизну балки перерізуючої сили Q , можна записати:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI(x)} , \quad (9.2)$$

де $\rho(x)$ – радіус кривизни шару.

З курсу математики відомо

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} . \quad (9.3)$$

Порівняємо праві частини формул (9.2) та (9.3). Вважаючи, що при додатному моменті M додатною є й кривизна, а при від'ємному – кривизна теж буде від'ємною, у формулі можна залишити тільки знак „+”:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (9.4)$$

(якби вісь y була направлена вниз, частини рівняння були б протилежні за знаком). Це рівняння зігнутої осі балки. Враховуючи, що маємо справу з малими деформаціями і величина $\frac{dy}{dx}$ значно менша від 1, можна записати *наближене диференціальне рівняння зігнутої осі*:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (9.5)$$

або

$$EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (9.6)$$

Використовуючи ці співвідношення, а також (9.1), можна визначити прогини та кути повороту перерізів балки.

Інтегруючи (9.4) один раз, матимемо:

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + C \quad (9.7)$$

Інтегруючи цей вираз ще раз, отримаємо:

$$y(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + Cx + D \quad (9.8)$$

Вирази (9.7) та (9.8) мають дві константи інтегрування C та D , які знаходимо з граничних умов.

При цьому зрозуміло, що

- D – не що інше, як збільшений в EI разів прогин на початку координат, тобто $D = EI \cdot y(0)$;
- C – не що інше, як збільшений в EI разів кут повороту на початку координат, тобто $C = EI \cdot \theta(0)$.

9.2. Приклади інтегрування наближеного рівняння зігнутої осі балки

1. Розглянемо балку, навантажену зосередженою силою, як зображено на рис.9.2., та знайдемо прогин та кут повороту перерізу на кінці консолі в т.В. Виберемо початок правосторонньої декартової системи координат у жорсткому защемленні (т.А) і будемо вважати жорсткість балки EI величиною постійною.

Тоді, записуючи вираз $M(x)$ справа від перерізу, матимемо:

$$M(x) = -F(l-x)$$

і наближене рівняння зігнутої осі балки буде мати вигляд:

$$EIy''(x) = -F \cdot (l-x).$$

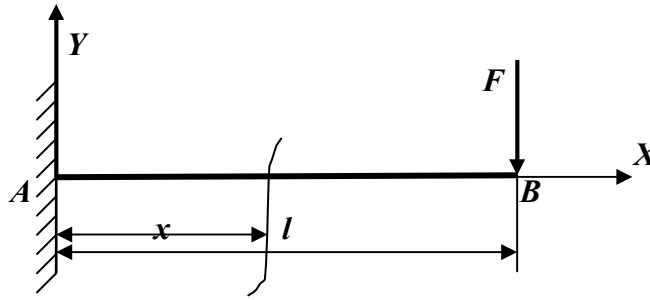


Рис.9.2. Консольна балка, навантажена на вільному кінці зосередженою силою

Відповідно після інтегрування матимемо:

$$EIy'(x) = \theta(x) = -Flx + \frac{Fx^2}{2} + C ;$$

$$EIy(x) = -Fl \frac{x^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} + Cx + D .$$

Визначимо константи інтегрування C та D з граничних умов. У даному випадку вони будуть виглядати так:

$$y(0)=0 \quad \text{та} \quad \theta(0)=0 ,$$

звідки стає зрозумілим, що
Тоді

$$C=D=0 .$$

$$EIy'(x) = \theta(x) = -Flx + \frac{Fx^2}{2}$$

і відповідно

$$EIy(x) = -Fl \frac{x^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} .$$

Тоді кут повороту і прогин в т.В будуть відповідно дорівнювати:

$$\theta_B = \theta(l) = \frac{1}{EI} \left(-Fl^2 + \frac{1}{2} Fl^2 \right) = -\frac{Fl^2}{2EI} ;$$

$$y_B = y(l) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} Fl^3 + \frac{1}{6} Fl^3 \right) = -\frac{Fl^3}{3EI} ;$$

(9.9)

Знаки “ - “ у відповідях вказують на орієнтацію переміщень у вибраній правосторонній системі координат – прогин спрямований донизу, а кут повороту – за годинниковою стрілкою.

2. Розглянемо балку, навантажену рівномірно розподіленим навантаженням, як зображено на рис.9.3, та знайдемо прогин і кут повороту перерізу на кінці консолі в т.В. Але цього разу виберемо вже лівосторонню систему координат із початком на кінці консолі в т.В.

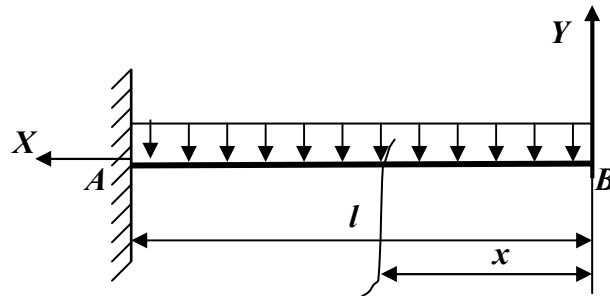


Рис.9.2. Консольна балка, навантажена розподіленим навантаженням

Тоді, записуючи вираз $M(x)$ справа від перерізу, матимемо:

$$M(x) = -qx^2/2$$

і наближене рівняння зігнутої осі балки буде мати вигляд:

$$EIy''(x) = -\frac{qx^2}{2}.$$

Відповідно після інтегрування, матимемо:

$$EIy'(x) = \theta(x) = -\frac{qx^3}{6} + C ;$$

$$EIy(x) = -\frac{qx^4}{24} + Cx + D .$$

Визначимо константи інтегрування C та D з граничних умов. В даному випадку вони будуть виглядати так:

$$y(l) = 0 \quad \text{та} \quad \theta(l) = 0 ,$$

звідки стає зрозумілим, що $C = \frac{ql^3}{6}$ та $D = -\frac{ql^4}{8}$.

Тоді

$$EIy'(x) = \theta(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{6}$$

і відповідно

$$EIy(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3}{6}x - \frac{ql^4}{8} .$$

Тоді кут повороту і прогин в т.В будуть відповідно дорівнювати:

$$\theta_B = \theta(0) = \frac{ql^3}{6EI} \quad \text{та} \quad y_B = y(0) = -\frac{ql^4}{8EI} . \quad (9.10)$$

Знак “ - “ у відповіді для прогину вказує на орієнтацію переміщень у вибраній лівосторонній системі координат – прогин спрямований донизу, а кут повороту – додатний і орієнтований за годинниковою стрілкою.

9.3. Метод прирівнювання постійних інтегрування

Введемо певні обмеження щодо інтегрування наближеного рівняння зігнутої осі балки:

- 1) початок координат домовимося завжди вибирати на кінці балки (немає різниці, опертому чи консольному);
- 2) початок координат будемо вибирати одним і тим же для всіх ділянок;
- 3) інтегрування будемо проводити, не розкриваючи дужок ($d(x-a) = dx$);
- 4) якщо до балки прикладене розподілене навантаження і воно не розповсюджується до кінця (відповідно вибраної системи координат), то його слід дотягнути до кінця балки, а для того, щоб система залишилась статично-еквівалентною, на цій же ділянці слід прикласти таке ж саме розподілене навантаження, тільки протилежного знака (рис 9.3а,б);
- 5) вирази моментів від відповідних навантажень у наближене рівняння зігнутої осі балки домовимося записувати в такому вигляді:

$$M(x-a)^0; F(x-b)^1; \frac{q(x-c)^2}{2}.$$

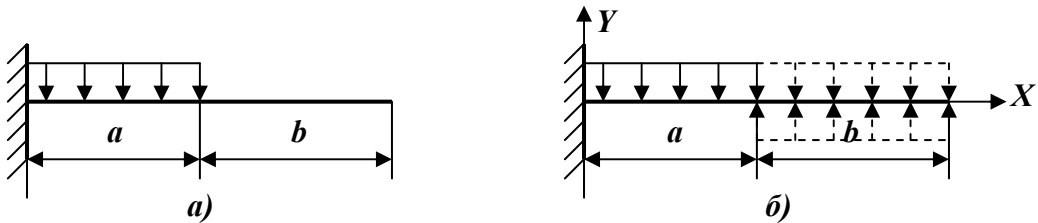


Рис.9.3. Випадок, коли розподілене навантаження не розповсюджується до кінця балки: а) початкове навантаження, б) перетворене навантаження

Якщо виконати ці умови, то при інтегруванні відповідні члени у виразі для кутів повороту будуть мати вигляд:

$$M \frac{(x-a)^1}{1!}; F \frac{(x-b)^2}{2!}; \frac{q(x-c)^3}{3!},$$

а у виразах для прогинів:

$$M \frac{(x-a)^2}{2!}; F \frac{(x-b)^3}{3!}; \frac{q(x-c)^4}{4!}.$$

Крім того те, що система координат для всіх ділянок є одною й тією ж, і те, що зроблено з розподіленим навантаженням, яке не розповсюджується до кінця балки (див.п.4. та рис. 9.3а,б), на кожній наступній ділянці буде повторюватися попередній вираз із додаванням членів за рахунок навантаження цієї ділянки. Порівняння значень функцій на границях ділянок дає можливість встановити, що за вищезазначених умов постійні інтегрування на попередній ділянці будуть дорівнювати аналогічним постійним для наступної ділянки. Тобто:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_i ; \\ D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D_i .$$

Таким чином цей метод замість багатьох констант інтегрування дозволяє знаходити тільки дві, використовуючи відповідні граничні умови.

9.4. Метод початкових параметрів

Усе викладене вище дає змогу перейти до більш універсального методу, так званого *методу початкових параметрів*.

Виконуючи умови, передбачені методом прирівнювання постійних інтегрування, та враховуючи, як вже було раніше встановлено, що $C_i = EI \cdot \theta_0$ й, аналогічно $D_i = EI \cdot y_0$, вираз для кутів повороту можна записати в такому вигляді:

$$EI \cdot \theta(x) = EI \cdot \theta_0 + \sum_{i=1} M_i \frac{(x-a_i)^1}{1!} + \sum_{j=1} F_j \frac{(x-b_j)^2}{2!} + \sum_{k=1} \frac{q_k (x-c_k)^3}{3!} \quad (9.11)$$

і вираз для прогинів відповідно:

$$EI \cdot y(x) = EI \cdot y_0 + EI \cdot \theta_0 \cdot x + \sum_{i=1} M_i \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{j=1} F_j \frac{(x-b_j)^3}{3!} + \sum_{k=1} \frac{q_k (x-c_k)^4}{4!}, \quad (9.12)$$

де y_0 та θ_0 – так звані початкові параметри – прогин та кут повороту, відповідно, на початку координат, що визначаються з граничних умов;
 M_i ; F_j та q_k – зовнішні навантаження, прикладені на ділянках балки;
 a_i ; b_j та c_k – координати прикладання відповідних навантажень;
 x – координата перерізу, в якому знаходиться переміщення;
 EI – жорсткість балки.

При обчисленні початкових параметрів треба розглянути три варіанти:

1. Початок координат вибраний у жорсткому защемленні (рис.9.4).

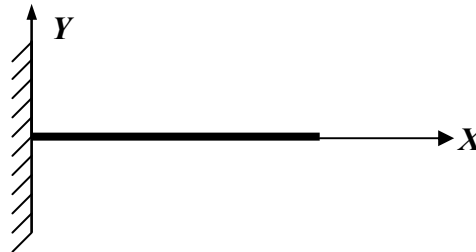


Рис.9.4. Випадок вибору початку координат у жорсткому защемленні

Зрозуміло, що в цьому випадку $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$.

2. Випадок, коли початок координат вибирають на кінцевій шарнірній опорі (рис. 9.5) у т.А.

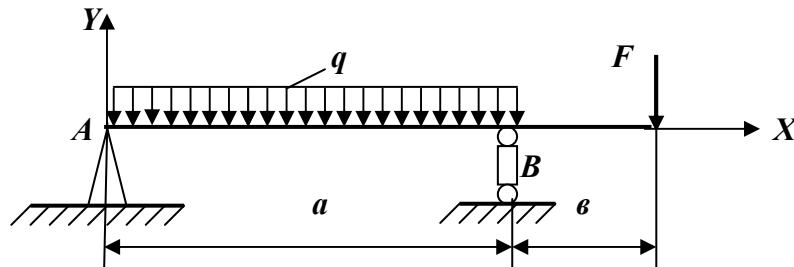


Рис. 9.5. Випадок вибору початку координат на шарнірній кінцевій опорі

В цьому випадку $y_0 = y_A = 0$, але $\theta_0 = \theta_A \neq 0$.

Для того, щоб обчислити величину θ_0 , треба записати вираз для прогину в т.В (на другій опорі) й прирівняти його до нуля. В цьому рівнянні буде тільки одне невідоме - θ_0 , звідки його й можна обчислити.

3. Випадок, коли початок координат вибирають на неопертому кінці балки (рис. 9.6) у т.С.

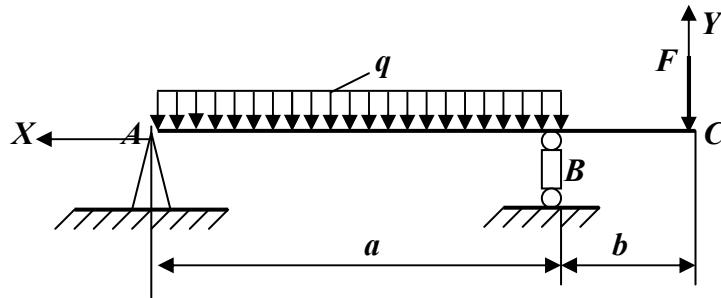


Рис. 9.6. Випадок вибору початку координат на неопертому кінці балки

У цьому випадку

$$y_0 = y_C \neq 0, \text{ і } \theta_0 = \theta_C \neq 0.$$

Для того, щоб обчислити величини початкових параметрів y_0 і θ_0 в цьому випадку, треба записати вирази для прогину в опорних т. А та т.В і прирівняти їх до нуля. В цих рівняннях буде по два невідомих - y_0 та θ_0 . Розв'язуючи їх, отримаємо величини початкових параметрів.

9.5. Енергетичні методи визначення деформацій та переміщень

Ще при вивченні теми „Механічні характеристики конструкційних матеріалів” ми розглядали зв'язок сил і деформацій з потенціальною енергією, що накопичується в тілі за рахунок зробленої роботи по деформації цього тіла. На цих ідеях, у принципі, й базується створення енергетичних методів визначення деформацій та переміщень, зокрема при згині. Методи, що розглядатимуться, будуть справедливі й для інших простих видів деформації, але для них ми розглянули й інші методи. Практика показала, що ці методи і залежності, є простішими і придатнішими для практичного застосування. Тому при розгляді цієї теми в більшості випадків ми будемо мати на увазі саме згин – найскладніший з простих видів деформацій.

Розглянемо деякі загальні поняття та теореми опору матеріалів.

9.6. Узагальнені поняття та теореми опору матеріалів

9.6.1. Узагальнена сила та узагальнене переміщення

Часто в опорі матеріалів вводять так звані узагальнені поняття.

Узагальнена сила (далі просто – сила) – це сукупність будь-яких силових факторів – і сила, і момент сили, і розподілене навантаження.

Узагальнене переміщення (далі просто – переміщення) – це будь-яке переміщення (формально – це множник при узагальненій силі у виразі роботи). Для моменту переміщенням є кут повороту, так як робота моменту є $M \cdot \varphi$. Рівномірно розподілене навантаження, прикладене до балки, прогин якої є $v(z)$, виконує в системі роботу

$$A_C = \int qv(z)dz = q \int vdz = q\omega .$$

Тут узагальнене переміщення – це ω , тобто площа, заключена між первісною віссю балки та її зігнутим положенням.

Домовимось надалі вирази „сила” та „переміщення” вважати саме узагальненими поняттями.

9.6.2. Лінійна пружна система. Теорема Клапейрона

Лінійні пружні системи – це системи, елементи яких працюють у межах закону Гука, з'єднання реалізовані без тертя і деформації в яких настільки малі, що це дозволяє скласти рівняння статyki, описуючи недеформований стан.

За цих умов переміщення і сили пов'язані лінійною залежністю.

Розглянемо вирази для визначення потенціальної енергії при різних видах деформації. Розглядаючи розтяг – стиск, матимемо:

$$U = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{\Delta l^2 EA}{2l} . \quad (9.13)$$

Аналогічні співвідношення для зсуву і кручення відповідно запишемо:

$$U = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta s = \frac{Q^2 a}{2GA} = \frac{\Delta s^2 GA}{2a} ; \quad (9.14)$$

$$U = \frac{1}{2} T \cdot \varphi = \frac{T^2 l}{2GI_p} = \frac{\varphi^2 GI_p}{2l} . \quad (9.15)$$

Враховуючи, що при чистому згині кінцеві перерізи балки (рис. 9.7) повернуться на кут

$\theta = \frac{\varphi}{2}$, де φ – центральний кут дуги балки з радіусом кривизни ρ , можна записати:

$$U = \frac{1}{2} M \cdot \varphi = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{\varphi^2 EI}{2l} . \quad (9.16)$$

Узагальнюючи формули (9.13) ÷ (9.16), отримаємо вираз, що відображає *теорему Клапейрона*:

$$\boxed{U = \frac{F \cdot \delta}{2}} . \quad (9.17)$$

Клапейрон Бенуа Поль Еміль (1799 – 1864) – французький інженер, фізик і механік. У 1820–1830рр. – професор Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення. Роботи в галузі механіки присвячені теорії пружності та будівельній механіці. Ввів у термодинаміку графічний метод. Вказав на існування для газів універсальної функції температури. Спільно з Г. Ламе дослідив стійкість арок і аналітичним шляхом знайшов положення січення зламу для кругової арки. Сформулював метод рівнянь 3-х моментів. Розробив новий метод обчислень напружень у нерозрізних балках.

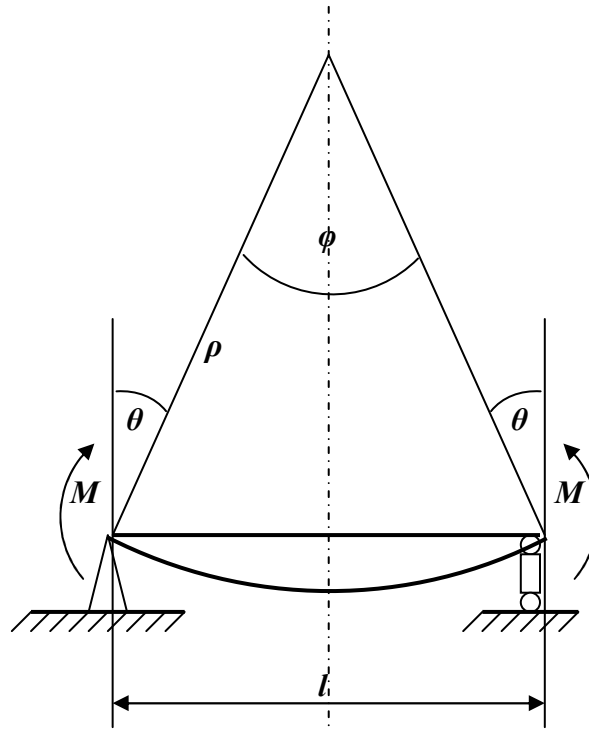


Рис. 9.7. Кути повороту перерізів при чистому згині

Неважко пригадати, що розгляд виразу потенціальної енергії для складного напруженого деформованого стану (5.29) підтверджує ці висновки.

9.6.3. Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті)

Ця теорема може бути сформульована так:

Робота сил першої системи на переміщеннях від дії сил другої системи дорівнює роботі сил другої системи на переміщеннях від першої системи сил.

Розглянемо лінійну пружну систему у вигляді, наприклад, консольної балки (рис.9.8а).

Нехай перша система сил F_1 , а друга – F_2 . Нехай прикладені вони відповідно в точках 1 та 2.

Розглянемо 2 варіанти навантаження, використавши принцип суперпозиції.

Перший (див. рис. 9.8б). Спочатку прикладаємо систему сил F_1 . Вона викликає переміщення в т. 1 і виконує роботу $A_{C11} = \frac{F_1 \cdot \delta_{11}}{2}$, де δ_{11} – переміщення в т. 1 від сил системи F_1 . Далі прикладаємо систему сил F_2 . Вона зумовлює переміщення в т. 2 і тим самим здійснює роботу $A_{C22} = \frac{F_2 \cdot \delta_{22}}{2}$, де δ_{22} – переміщення в т. 2 від сил системи F_2 . Але при цьому система сил F_1 також отримує переміщення δ_{12} і здійснює роботу $A_{C12} = F_1 \cdot \delta_{12}$. Тому повна робота, проведена силами обох систем в цьому випадку:

$$A'_C = \frac{F_1 \cdot \delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \cdot \delta_{22}}{2} + F_1 \cdot \delta_{12}. \quad (9.18)$$

Другий (див. рис. 9.8в). Тепер спочатку прикладаємо систему сил F_2 . Вона викликає переміщення в т. 2. і виконує роботу $A_{C22} = \frac{F_2 \cdot \delta_{22}}{2}$. Далі прикладаємо

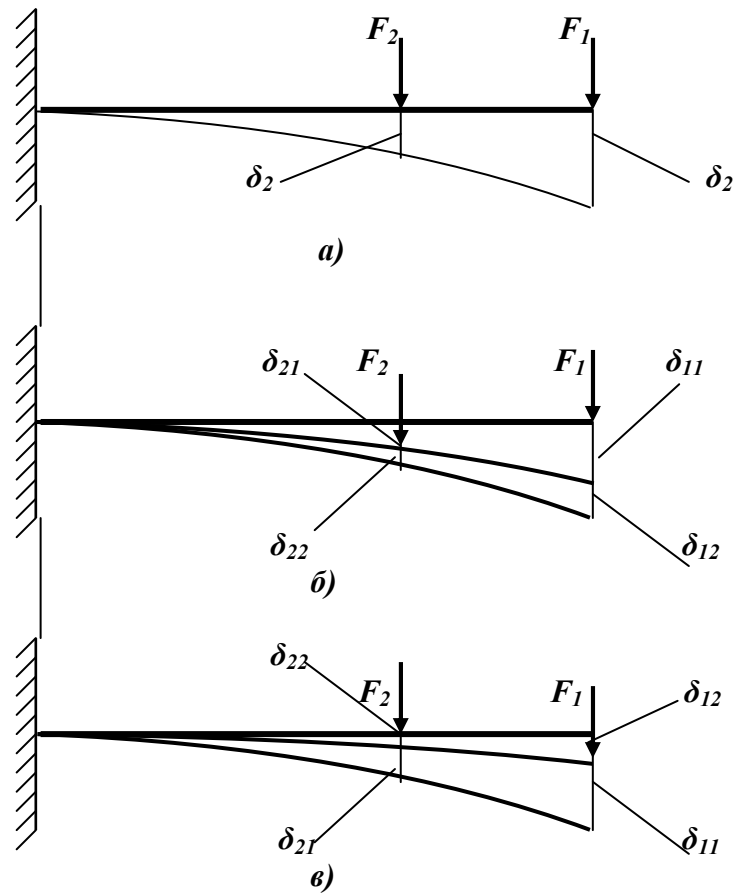


Рис. 9.8. а) Балка навантажена одночасно двома системами сил F_1 та F_2 ;
 б) балка навантажена спочатку системою сил F_1 , а потім системою F_2 ;
 в) балка навантажена спочатку системою сил F_2 , а потім системою F_1

систему сил F_1 . Вона зумовлює переміщення в т. 1 і тим самим здійснює роботу $A_{C11} = \frac{F_1 \cdot \delta_{11}}{2}$. Але при цьому система сил F_2 також отримує переміщення δ_{21} і здійснює роботу $A_{C21} = F_2 \cdot \delta_{21}$. Тому повна робота, проведена силами обох систем в цьому випадку:

$$A_C'' = \frac{F_2 \cdot \delta_{22}}{2} + \frac{F_1 \cdot \delta_{11}}{2} + F_2 \cdot \delta_{21}. \quad (9.19)$$

Розглядаючи ці обидва випадки, можна зробити висновок, що роботу з деформації пружної лінійної системи і в першому і в другому випадку проведено однакою, тобто $A_C' = A_C''$. Тоді з порівнянь залежностей (9.18) і (9.19) випливає, що

$$\boxed{F_1 \cdot \delta_{12} = F_2 \cdot \delta_{21}}, \quad (9.20)$$

а це і доводить теорему Бетті.

9.7. Теорема Максвелла – Мора. Інтеграл переміщень

Відомий англійський фізик Максвелл, займаючись проблемами перерозподілу і перетворення різних видів енергії, створив передумови для розгляду зв'язку між силами, деформаціями та переміщеннями і потенціальною енергією, що накопичується в тілі при деформації.

Максвелл Джеймс Клерк (13.VI.1831 – 5.XI.1879)

Член Лондонського королівського товариства, закінчив два університети – в Единбурзі та Кембриджі, працював в Абердинському, Лондонському та Кембріджському університетах. Основні дослідження – в галузі математичної фізики, механіки. Ввів у фізику математичні методи, розвинув математичну теорію електромагнітного поля. Заснував метод фотопружності. Багато фундаментальних робіт присвятив механіці деформівного твердого тіла. Займався питаннями небесної механіки, зокрема розглянув задачу про стійкість кілець Сатурна. Створив математичну модель дзиги. Багато робіт присвятив популяризації науки.

9.7.1. Виведення теореми

Є різні способи виведення теореми Максвелла – Мора, зокрема через теореми Лагранжа та Кастіліано. Наведемо тут виведення результату теореми – так званого *інтеграла переміщень* або *інтеграла Мора*, використовуючи теорему Бетті.

Нехай перша система сил в теоремі Бетті є одиничною – $F_1=I$ (тобто $F_1=I$; $M_1=I$; $T_1=I$; $N_1=I$; $Q_1=I$), причому ці одиничні сили є величинами безрозмірними. Тоді

$$\delta_{12} = F_2 \cdot \delta_{21} \quad (9.21)$$

і, якщо говорити про узагальнене поняття сил і переміщень, то:

- по-перше, у випадку одиничної узагальненої сили, що являє собою зосереджену силу $F_1 = I$, матимемо δ_{21} як лінійне переміщення, а у випадку одиничної узагальненої сили, що являє собою згинний момент $M_1 = I$, – δ_{21} є кутом повороту перерізу;

- по-друге, враховуючи, що друга система сил може включати різні внутрішні силові фактори, переміщення, наприклад при згині, можна записати так:

$$\delta_{21} = \sum_i \int_{l_i} M(s) d\varphi + \sum_i \int_{l_i} N(s) \Delta ds + \sum_i \int_{l_i} Q(s) \gamma ds$$

або

$$\delta = \sum_i \int_{l_i} \left(\frac{M_i(s) \cdot M'_i(s)}{EI} + \frac{N_i(s) \cdot N'_i(s)}{EA} + k \frac{Q_i(s) \cdot Q'_i(s)}{GA} \right) ds, \quad (9.22)$$

де $M(s)_i$, $N(s)_i$, $Q_i(s)$ – функції згинаючих моментів, нормальних і перерізуючих сил від зовнішніх сил на i -й ділянці балки;
 $M'(s)_i$, $N'(s)_i$, $Q'_i(s)$ – функції згинаючих моментів, нормальних і перерізуючих сил від одиничного навантаження на i -й ділянці балки;
 k – поправочний коефіцієнт, що залежить від форми перерізу;
 ds – елемент довжини дуги (у випадку прямої балки $ds = dx$);

EI, EA, GA – відповідні жорсткості.

Це δ є інтеграл переміщень, який ще називають інтегралом Мора.

Практика довела, що домінуючим у цій формулі є перший член, а іншими в переважній більшості можна нехтувати. Тому спрощений інтеграл Мора, записують так:

$$\delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_i(s) \cdot M_i'(s)}{EI} ds \quad (9.23)$$

9.7.2. Порядок використання спрощеної формули інтеграла Мора

Для того, щоб обчислити переміщення за допомогою спрощеного інтеграла Мора, потрібно:

1. З'ясувати число „ i ” – кількість ділянок інтегрування. Якщо переміщення знаходиться на межі ділянок балки, „ i ” дорівнює кількості ділянок балки; якщо ж переміщення шукають у перерізі, який знаходиться на проміжку, то цей проміжок ділять на дві окремі ділянки, тобто „ i ” збільшується на одиницю.

2. Записати функції $M_i(x)$ на кожній ділянці інтегрування.

3. Побудувати допоміжну балку (таку ж, як основна, тільки не навантажену) і навантажити її в перерізі, де знаходиться прогин, одиничною силою $F_I = I$ у напрямку, в якому знаходиться переміщення (якщо знаходиться кут повороту перерізу, то замість сили $F = I$ треба прикласти одиничний момент $M = I$).

4. Записати функції моментів $M_i'(x)$ від одиничного навантаження на всіх ділянках інтегрування в тих же системах координат, що і для ділянок на основній балці.

5. Підставити вирази $M_i(x)$ та $M_i'(x)$ у формулу спрощеного інтеграла Мора та провести інтегрування.

Якщо в результаті обчислень буде отримано величину переміщення зі знаком „-”, це означатиме, що реальне переміщення орієнтоване у напрямку, протилежному до напрямку одиничного навантаження на допоміжній балці.

9.7.3. Графоаналітичний спосіб розрахунку інтеграла переміщень (спосіб Верещакіна)

Обчислення інтеграла Мора можна суттєво спростити у випадку, коли епюра $M(x)$ являє собою сукупність простих геометричних фігур, для яких просто обчислити площі та місцезнаходження центрів ваги і балка має постійну жорсткість ($EI = const$) по довжині.

Розглянемо фрагмент епюр для якоїсь довільної балки (рис. 9.9).

Тоді інтеграл $\int_{l_i} \frac{M_i(s)M_i'(s)}{EI} ds$ можна розглядати таким чином. Вираз $M(s)ds$

являє собою диференціал площі епюри $M(s) - d\omega$. Тобто

$$M(s)ds = d\omega.$$

Водночас, в зв'язку з прямолінійністю епюри від одиничних силових факторів $M'(s)$,

$$M'(s) = s \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Тоді

$$\int_{l_i} \frac{M(s)M'(s)}{EI} ds = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_{l_i} s d\omega.$$

Останній інтеграл виражає статичний момент площі ω відповідно осі, перпендикулярної до осі s , тому можна записати, що:

$$\int_{l_i} s d\omega = \omega s_c$$

або:

$$\int_{l_i} \frac{M_i(s)M'_i(s)}{EI} ds = \frac{\text{tg}\alpha \cdot s_c \cdot \omega}{EI},$$

де s_c – координата центра ваги площі епюри ω .

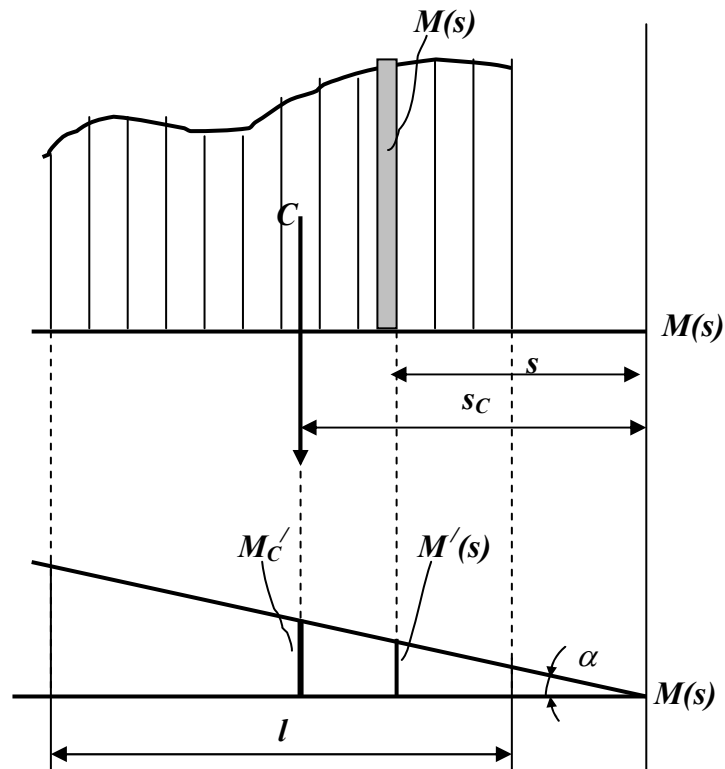


Рис. 9.9. Графічне зображення для виведення формули Верещагіна

Після нескладних перетворень будемо мати $\frac{\omega M'_C}{EI}$, де M'_C – значення моменту на епюрі моментів від одиничних навантажень на тій координаті, де знаходиться центр ваги площ епюри ω . Тоді інтеграл Мора можна записати у такому вигляді:

$$\delta = \sum_i \frac{\omega_i M'_{Ci}}{EI} \quad (9.24)$$

Цей спосіб обчислення інтеграла Мора називають *способом Верещагіна*.

10. Складний опір

У попередніх розділах ми ознайомилися з розрахунками на міцність і визначенням деформацій при розгляді 4-х видів простої деформації: розтягу – стиску, зсуву, кручення та згину. Але в інженерній практиці найчастіше зустрічаються випадки дії навантажень, при яких в об'єкті одночасно виникають кілька видів простої деформації. Наприклад вали, як правило, працюють не тільки на кручення, але й на згин, стовпи ліхтарів на вулицях працюють на стиск за рахунок власної ваги і на згин за рахунок зміщення навантаження від осі. Таких прикладів можна навести безліч.

Розглянемо принципи розрахунків на міцність і визначення деформацій при виникненні таких ситуацій.

10.1. Складний згин. Косий згин

Складним згином називають випадок, коли балку навантажують у різних площинах, які, проходячи через центральну вісь, не співпадають з головними площинами інерції. Частковий випадок складного згину – це косий згин – випадок складного, коли навантаження прикладають в одній площині, яка, проходячи через центральну вісь, не співпадає з жодною із головних площин інерції.

10.1.1. Визначення напружень при косому згині. Умова міцності

Розглянемо, наприклад, консольну балку (рис.10.1а), навантажену на вільному кінці силою, лінія дії якої, проходячи через центр ваги перерізу (для визначеності виберемо його прямокутним), відхиляється від вертикальної головної осі на кут φ (рис.10.1,б).

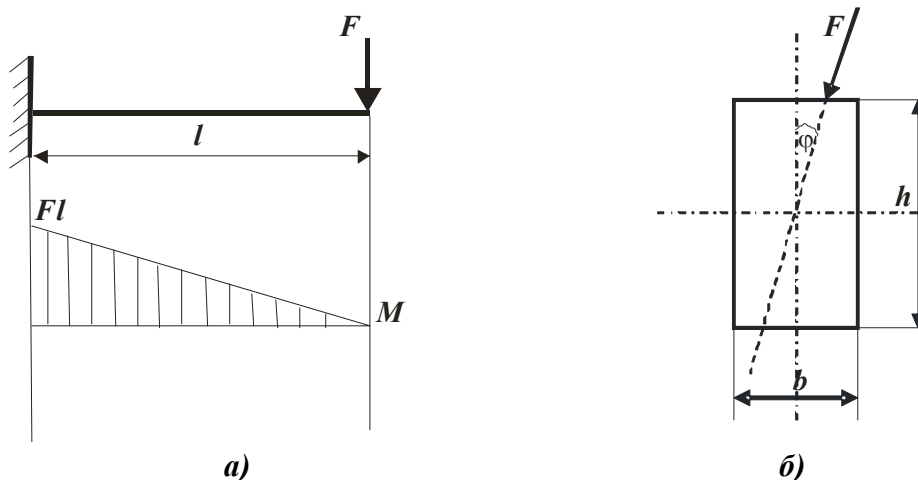


Рис.10.1. Косий згин: а) – загальний вид навантаження; б) – орієнтація навантаження в перерізі

Для того, щоб з'ясувати, з якими простими деформаціями маємо справу, розглянемо рис. 10.2.

Розклавши силу F на горизонтальну $F_{гор}$ та вертикальну $F_{верт}$ складові, запишемо:

$$F_{гор} = F \cdot \sin \varphi \quad \text{та} \quad F_{верт} = F \cdot \cos \varphi.$$

Тепер неважко помітити, що сила $F_{гор}$ викликає згин у горизонтальній площині, а сила $F_{верт}$ – відповідно згин у вертикальній площині. Згинальні моменти відповідно:

$$M_{гор} = -F \cdot \sin \varphi \cdot x \quad \text{та} \quad F_{гор} = -F \cdot \cos \varphi \cdot x.$$

Від цих обох згинів у площині перерізу виникають нормальні напруження і тому їх можна просто алгебраїчно скласти. В силу того, що в більшості випадків дотичні

напруження не відіграють суттєвої ролі, при розгляді косоного згину ми їх розглядати не будемо. І тоді

$$\sigma(x, y, z) = \sigma_{зоп} + \sigma_{верт} = -\frac{M_{зоп} \cdot y}{I_z} - \frac{M_{верт} \cdot z}{I_y} = -\frac{F \cdot \sin \varphi \cdot x \cdot y}{I_z} - \frac{F \cdot \cos \varphi \cdot x \cdot z}{I_y}$$

або, перетворюючи

$$\sigma(x, y, z) = -F \cdot x \cdot \left(\frac{\sin \varphi \cdot y}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z}{I_y} \right). \quad (10.1)$$

Зауважимо, що ця формула записана для балки, що розглядається у вибраній нами системі координат і не носить узагальненого змісту.

На рис. 10.3 зображено епюри напружень у перерізі балки „а” – при прямому згині і „б” – при косому.

Для того, щоб знайти точки, в яких виникатимуть найбільші напруження, треба визначити положення нейтральної осі. Для цього прирівняємо вираз нормальних напружень до нуля.

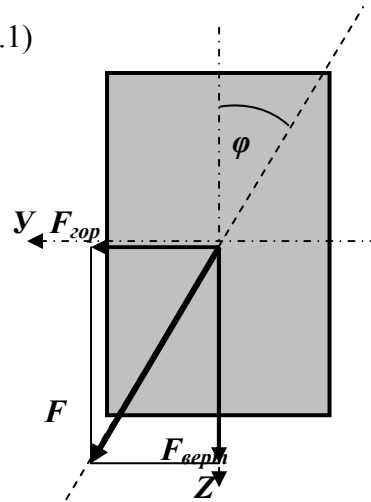


Рис.10.2. Складові сили в перерізі

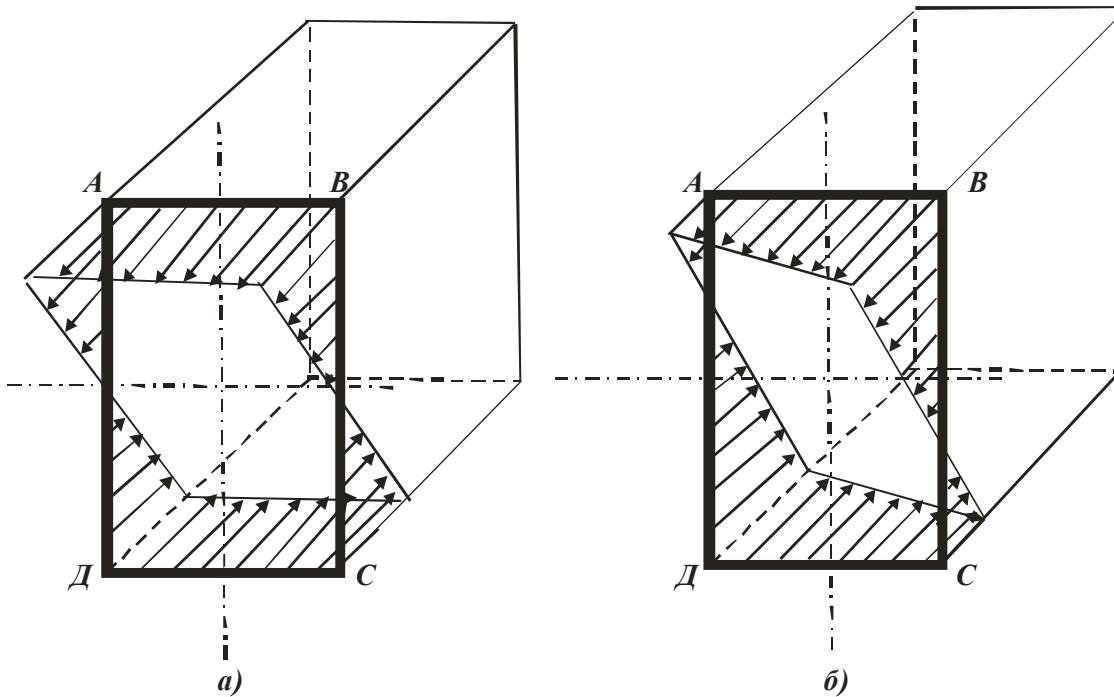


Рис. 10.3. Епюри розподілу напружень у перерізі:
а) – при прямому згині, б) – при косому згині

У зв'язку з тим, що добуток Fx не дорівнює нулю, прирівняємо до нуля тільки вираз у дужках:

$$\left(\frac{\sin \varphi \cdot y_0}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z_0}{I_y} \right) = 0, \quad (10.2)$$

де $y_0; z_0$ – координати точок нейтральної осі.

Розглядаючи вираз, бачимо, що:

- нейтральна вісь дійсно є прямою лінією, між координатами $y_0; z_0$ спостерігається лінійна залежність;
- нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу, якщо $y_0=0$, то і $z_0=0$;
- нейтральна вісь розвертається на певний кут α відносно горизонтальної головної осі інерції (рис.10.4):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{I_y}{I_z}, \text{ або } \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{I_y}{I_z} \quad (10.3)$$

З формули (10.3) випливає, що чим більшою є різниця між головними осьовими моментами інерції, тим більшою вона буде між кутом відхилення нейтральної осі та кутом відхилення площини, в якій діють навантаження, від головної площини інерції – тобто можливі випадки, за яких $\alpha \gg \varphi$. З точки зору інженерної практики – це означає, що невеликі кутові зміщення площини дії сил можуть призвести до значних відхилень площини деформацій.

З даного співвідношення бачимо, якщо головні моменти інерції однакові (у випадку кола та правильних многокутників), косою згину не відбувається.

Тепер, коли з'ясовано положення нейтральної осі, стає очевидним положення точок B і D , в яких виникатимуть найбільші розтягуючі та стискаючі нормальні напруження (рис.10.4).

Якщо конструкція виготовлена з пластичного матеріалу, для якого

будуть однаковими рівні допустимих напружень на розтяг $[\sigma_p]$ та стиск $[\sigma_{ст}]$, то умову міцності можна записати:

$$\sigma_{\max}(x, y, z) = -F \cdot l \cdot \left(\frac{\sin \varphi \cdot y_{\max}}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z_{\max}}{I_y} \right) \leq [\sigma]$$

або

$$\sigma_{\max}(x, y, z) = -F \cdot l \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{W_z} + \frac{\cos \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma] \quad (10.4)$$

З цієї умови, як і у випадку прямого згину знаючи розміри поперечного перерізу, можна визначити допустимі сили, або, знаючи їх, визначити розміри поперечного перерізу. Слід зауважити, що для визначення цих розмірів слід наперед задати їх співвідношення - $\frac{b}{h} = k$, тому що з одної нерівності не можна однозначно визначити два невідомих.

10.1.2. Визначення переміщень при косому згині

Переміщення при косому згині розраховують як геометричну суму переміщень, орієнтованих уздовж головних осей інерції:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}, \quad (10.5)$$

а для випадку, який розглядаємо, відповідно

$$f_y = \frac{F \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_z} \quad \text{та} \quad f_z = \frac{F \cdot \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_y},$$

обчислюючи результуючу, отримуємо:

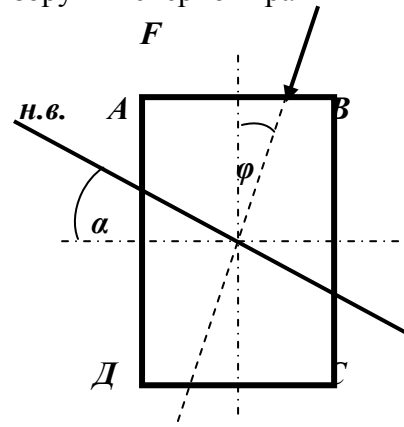


Рис.10.4. Положення нейтральної осі при косому згині

$$f = \sqrt{\left(\frac{F \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_z}\right)^2 + \left(\frac{F \cdot \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_y}\right)^2} = \frac{Fl^3}{3E} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{I_z} + \frac{\cos^2 \varphi}{I_y}}$$

10.2. Позацентричний стиск (розтяг)

10.2.1. Напруження при позацентричному стиску(розтягу).

Розрахунок на міцність

Спробуємо дати відповідь на запитання: - як це так може бути, щоб до стержня приклали стискаюче навантаження, а він руйнувався від розтягуючих напружень? Або чому не такі вже й рідкісні випадки, коли стіни споруд та колони руйнуються внаслідок утворення тріщин в основі (причому ці тріщини стають все ширшими, „розкриваються”, що вказує на наявність розтягуючих напружень)? Відповіді на ці запитання можна дати, розглянувши такий вид деформації як позацентричний стиск (розтяг) .

Позацентричний стиск (розтяг) – це випадок навантаження стержня, коли поздовжні сили діють по лінії, яка паралельна осі стержня та віддалена від неї на відстань e , яку називають ексцентриситетом (рис. 10.5 та 10.6).

З точки зору сукупності простих деформацій – це сумісна дія стиску (розтягу) та двох згинів відносно головних площин інерції (рис 10.6).

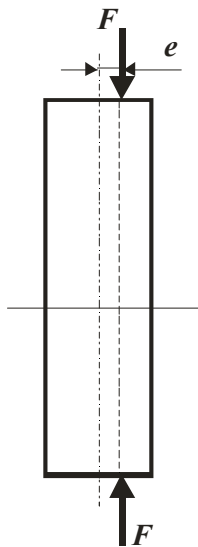


Рис.10.5. Позацентричний стиск

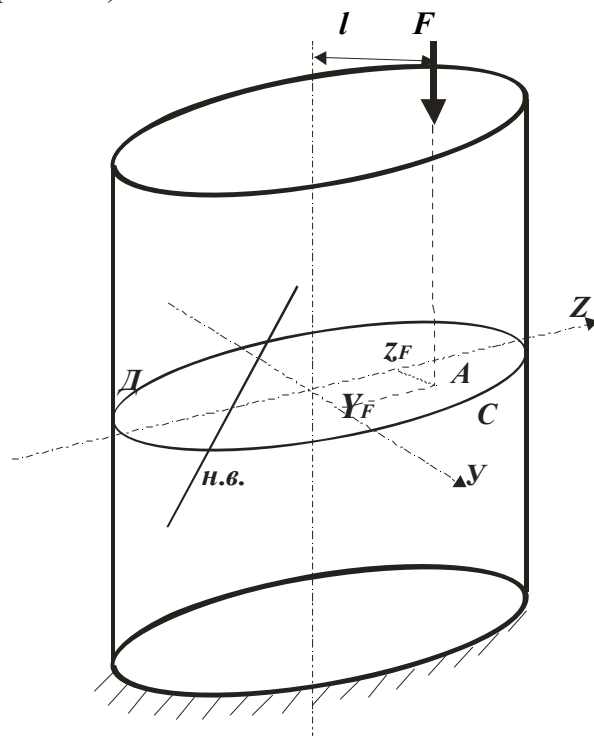


Рис.10.6. Позацентричний стиск.
Розгляд перерізу стержня

Зауваження: домовимось обирати напрямки головних осей Y та Z таким чином, щоб проекція точки прикладання сили опинилася в I квадранті.

Розглянемо, вказаний на рис. 10.5 та 10.6 переріз. Сила F не тільки стискає стержень, але й викликає згин через створення силою моментів відносно осей Y та Z – відповідно $M_y = F \cdot z_F$ та $M_z = F \cdot y_F$.

Тоді напруження нормального характеру в довільній точці з координатами $Y;Z$ запишемо так:

$$\sigma(y, z) = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z}{I_y} - \frac{F \cdot y}{I_z}$$

або, перетворюючи, винести за дужки член $-\frac{F}{A}$ і отримаємо остаточний вираз для напруження:

$$\sigma(y, z) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} \right) \quad (10.6)$$

Перед тим, як записати умову міцності, слід розглянути питання: в яких же точках перерізу виникають найбільші напруження. Для цього знайдемо положення нейтральної осі, в точках якої нормальні напруження дорівнюють нулю.

$$\sigma(y_0, z_0) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} \right) = 0,$$

де y_0 та z_0 – координати точок нейтральної осі;
 i_x та i_y – радіуси інерції відносно осей X та Y .

За умови, що множник $\frac{F}{A}$ не дорівнює нулю, можна записати рівняння нейтральної осі так:

$$\left(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} \right) = 0. \quad (10.7)$$

Розглядаючи це рівняння, можна зробити висновки:

- нейтральна вісь є прямою лінією – адже y_0 та z_0 пов'язані між собою лінійною залежністю;
- ця пряма не проходить через центр ваги перерізу – адже виконуються умови:
- якщо $y_0 = 0$, то $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_F}$;
- якщо $z_0 = 0$, то $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_F}$.

Це можна розглядати як координати двох точок, розташованих на осях Y та Z відповідно. Знак „-“, показує, що нейтральна вісь не проходить через квадрант, у якому знаходиться проекція точки прикладання сили F .

Тепер знайдемо небезпечні точки. Нейтральна вісь розділяє переріз на дві частини – на одній діятимуть стискаючі напруження, на другій – розтягуючі. В точках, які найвіддаленіші від нейтральної осі (рис. 10.6 – точки C та D) будуть діяти відповідно найбільші стискаючі та розтягуючі напруження. У випадку, коли важко на око визначити найвіддаленіші точки, проводять лінії, паралельні до нейтральної осі, й таким чином визначають ці точки.

Якщо матеріал по різному чинить опір розтягу та стиску (тобто $[\sigma_{розт.}] \neq [\sigma_{ст.}]$), слід записати дві умови міцності:

$$\sigma_{\max cm.} = \sigma_C = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_C}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_C}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{cm.}] \quad (10.7)$$

$$\sigma_{\max розт.} = \sigma_D = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_D}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_D}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{розт.}] \quad (10.8)$$

Якщо визначаємо, наприклад силу F , то потрібно взяти за кінцевий результат, мінімальне значення F , отримане з двох даних розрахунків.

10.2.2. Ядро перерізу

Важливим є питання про визначення зони навколо центра ваги перерізу, прикладання в якій сили, викличе по всьому перерізу напруження тільки одного знака – так званого *ядра перерізу*. Розглянемо деякі випадки.

1. Наприклад, круглий переріз радіуса r (рис. 10.7).

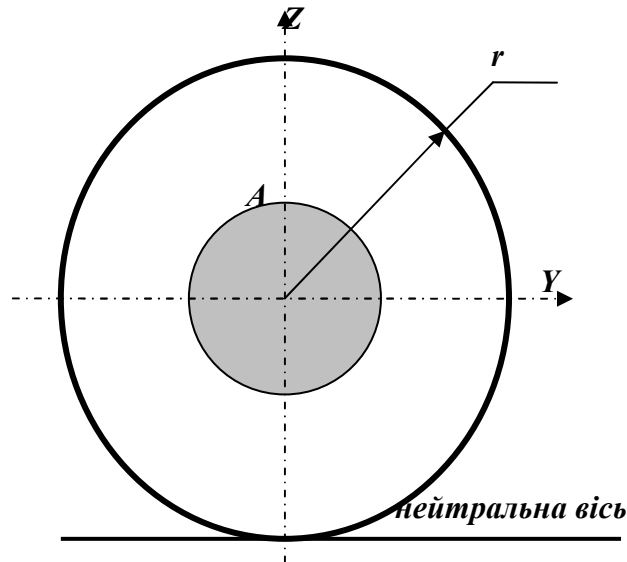


Рис.10.7. Ядро для круглого перерізу

Граничне положення точки прикладання сили F (т. А), обумовлюватиме положення нейтральної осі, як прямої, дотичної до кола з протилежного боку. Тобто:

$$y_0 = 0; \quad z_0 = -r$$

$$y_F = 0; \quad z_F \text{ — потрібно визначити.}$$

Якщо $y_0 = 0$, і $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_F}$, то $z_F = -\frac{i_y^2}{z_0}$.

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4}, \quad \text{тоді} \quad z_F = -\frac{\frac{r^2}{4}}{-r} = \frac{r}{4}.$$

Аналогічно можна провести розрахунки для інших напрямків і з'ясувати, що для круглого поперечного перерізу ядром буде також круг із радіусом $\frac{r}{4}$ та центром, що співпадає з центром перерізу.

2. Розглянемо прямокутний переріз за принципом, аналогічним попередньому.

а) Нейтральна вісь проходить по нижній межі перерізу

$$z_0 = -\frac{h}{2}, \quad z_F = -\frac{i_y^2}{z_0}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{h^2}{12}, \quad \text{тоді} \quad z_F = -\frac{h^2}{12(-\frac{h}{2})} = \frac{h}{6}.$$

Тобто координати точки, яку ми шукаємо: $A(0; \frac{h}{6})$.

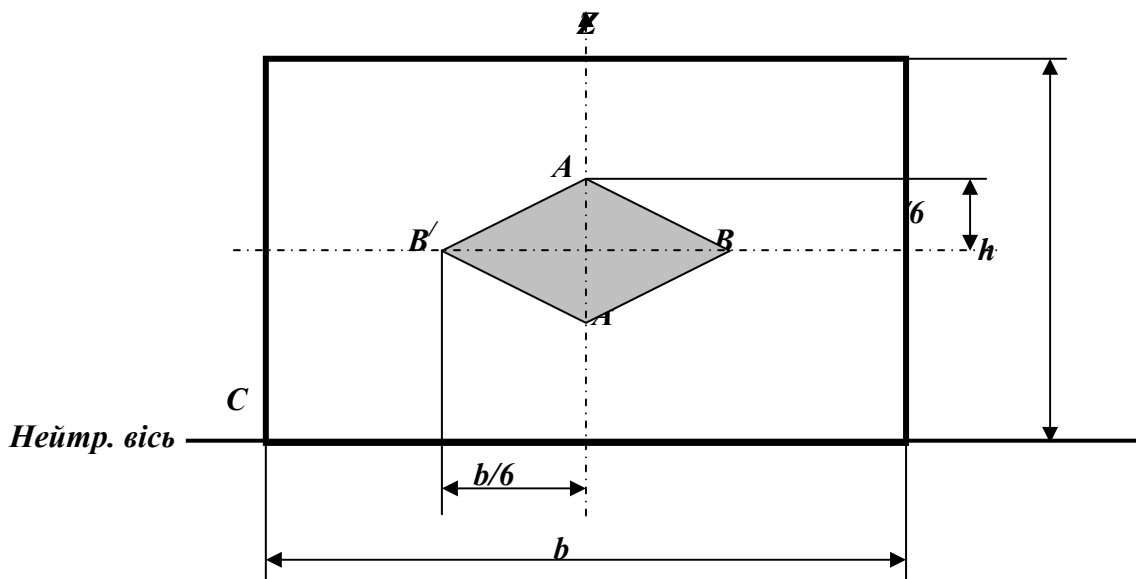


Рис. 10.8. Ядро для прямокутного перерізу

Аналогічно знайдемо координати т. A' , симетричної до т. A відносно осі Y , та точок B і B' .

б) Тепер розглянемо як їх з'єднати. Наприклад т. A і B . Для цього розглянемо як нейтральна вісь буде повертатись навколо т. $C(-\frac{e}{2}; -\frac{h}{2})$. Використаємо рівняння нейтральної осі

$$(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2}) = 0.$$

y_0 та z_0 – в даному випадку y_C ; z_C – є константами, тоді z_F та y_F пов'язані лінійною залежністю, тобто т. A та т. B , і, як наслідок – т. B та A' ; т. A' та т. B' і т. B' та A з'єднуються прямими лініями. Тобто ядром перерізу в даному випадку є ромб з діагоналями $\frac{b}{3}$ та $\frac{h}{3}$.

10.3. Сумісна дія згину та кручення

Інженерна практика показує, що вали, як правило, працюють не тільки на кручення, але й в умовах згину за рахунок власної ваги та радіальних зусиль, що виникають при передаванні валом потужностей. Питання оцінювання напружено-деформованого стану в цьому випадку ускладнюється такими факторами:

- радіальні зусилля можуть виникати в різних напрямках, що викликає появу згинальних моментів у різних площинах;
- виникнення в одному й тому ж перерізі, перпендикулярному до осі вала, не тільки дотичних напружень від кручення, але й нормальних напружень від згинів у різних площинах (одночасно зауважимо, що дотичними напруженнями, які виникають від згину, можна нехтувати, тому що вони є значно меншими ніж дотичні напруження від кручення).

Перше питання вирішується порівняно просто – всі моменти розбиваються на складові відносно, наприклад, горизонтальної та вертикальної площин. Далі будуються епюри згинальних моментів у цих площинах і за допомогою геометричного складання по перерізах (10.9) з'ясовується положення перерізу, в якому виникає максимальний згинальний момент і його значення цього моменту.

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_{\text{гор.}}^2 + M_{\text{верт.}}^2}; \quad (10.9)$$

При цьому слід зауважити, що епюри сумарних моментів взагалі можуть мати нелінійний характер, але опуклість графіків буде спрямована у бік осі абсцис. Тобто максимальних значень цей момент може досягати тільки на межах ділянок, що легко обчислюється. Щодо орієнтації площин, в яких діятимуть сумарні згинальні моменти в різних перерізах, то це в більшості випадків не суттєво. Як правило, поперечним перерізом валів вибирають перерізи, для будь-яка центральна вісь є головною (круг, кільце, правильний багатокутник).

Що стосується другого зауваження, то, по-перше, є зрозумілим той факт, що небезпечною зоною в перерізі буде зона перетину поверхневого шару вала з площиною, в якій виникає згинальний момент в цьому перерізі, тому що в ній виникають як найбільші нормальні напруження від згину, так і найбільші дотичні від кручення. По-друге, питання про знаходження найнебезпечнішого перерізу та обчислення моменту в ньому, вирішується за допомогою теорій міцності (зазвичай III-ої теорії, теорії Мора або IV-ої – енергетичної теорії міцності).

У зв'язку з тим, що розглядається питання сумісної дії нормальних і дотичних напружень, можна зробити висновок, що цей процес відобразиться тими ж залежностями, що й при аналізі складного напруженого стану за повної перевірки на міцність при згині.

Наприклад, розглянемо формулу (8.36) для критерію Мора:

$$\sigma_{\text{чМ}} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

$$\text{де } m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

$$\text{Тоді } \sigma_{\text{чМ}} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{\sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2}}{W_o} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\frac{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2}{W_o^2} + \frac{T^2}{W_p^2}} \leq [\sigma],$$

враховуючи, що $W_p = 2W_o$,

$$\sigma_{\text{чМ}} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{\sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2}}{W_o} + \frac{1+m}{2} \frac{\sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2 + T^2}}{W_o} \leq [\sigma].$$

Розглядаючи чисельник, можна записати вираз для розрахункового моменту при використанні теорії Мора:

$$M_{\text{чМ}} = \frac{1-m}{2} \cdot \sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2 + T^2}. \quad (10.10)$$

Тоді для III-ої теорії міцності розрахунковий момент запишемо так:

$$M_{\text{чIII}} = \sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2 + T^2}, \quad (10.11)$$

або

$$M_{\text{чIII}} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + T^2}. \quad (10.12)$$

Розглядаючи вираз для розрахункових напружень при застосуванні IV-ої (енергетичної) теорії міцності (8.35)

$$\sigma_{\text{чIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

та застосовуючи аналогічні перетворення, отримаємо вираз для розрахункового моменту:

$$M_{\text{III}} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75 \cdot T^2} \quad (10.13)$$

Дослідження показують, що тепер умови міцності для різних теорій міцності, що розглядалися нами раніше (8.32) ÷ (8.36), можна записати так:

$$\sigma_{\text{max},r} = \frac{M_{\text{max},r}}{W_o} \leq [\sigma] \quad (10.14)$$

Далі розрахунок на міцність не відрізняється від такого ж розрахунку за нормальними напруженнями при звичайному прямому згині.

11. Розрахунок статично-невизначених систем, що працюють на згин

11.1. Основи методу сил

Для визначення ступеня статичної невизначеності плоских систем можна використати формулу

$$S = 3k - u,$$

де S – ступінь статичної невизначеності;

k – кількість замкнених контурів (за умов повної відсутності шарнірів);

u – кількість шарнірів у перерахунку на одиничні.

Можна виділити такі етапи розв'язку статично – невизначеної системи.

1. Встановлюємо ступінь статичної невизначеності (тобто з'ясуємо кількість "зайвих" невідомих).

2. Відкидаємо „зайві” зв'язки та замінюємо задану систему на основну систему (ту, що отримуємо при відкиданні „зайвих” зв'язків).

3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням та „зайвими” невідомими силами, що замінюють дію відкинутих зв'язків. Така система носить назву *еквівалентної*.

4. При цьому невідомі сили повинні бути підібрані таким чином, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації заданої нам статично невизначеної системи. Для цього можна прирівняти до нуля переміщення точок, в яких прикладаються „зайві” невідомі за напрямком їх дії. Розв'язуючи ці рівняння, отримують значення „зайвих” невідомих.

Приведена система розв'язку носить назву *метода сил*.

11.2. Канонічні рівняння методу сил

Допоміжні рівняння переміщень, які виражають рівність нулю переміщень за напрямком зайвих невідомих краще складати у так званій канонічній формі. Для прикладу розглянемо систему, зображену на рис 11.1,а.

За „зайвий” зв'язок виберемо шарнірно-рухомому опору в т. B .

Тоді, навантаживши основну систему заданим навантаженням та „зайвою” невідомою X_1 в т. B , прирівнюємо до нуля повне переміщення точки B основної системи за напрямком дії X_1

$$\Delta_1 = \Delta_1(F, X_1) = 0. \quad (11.1)$$

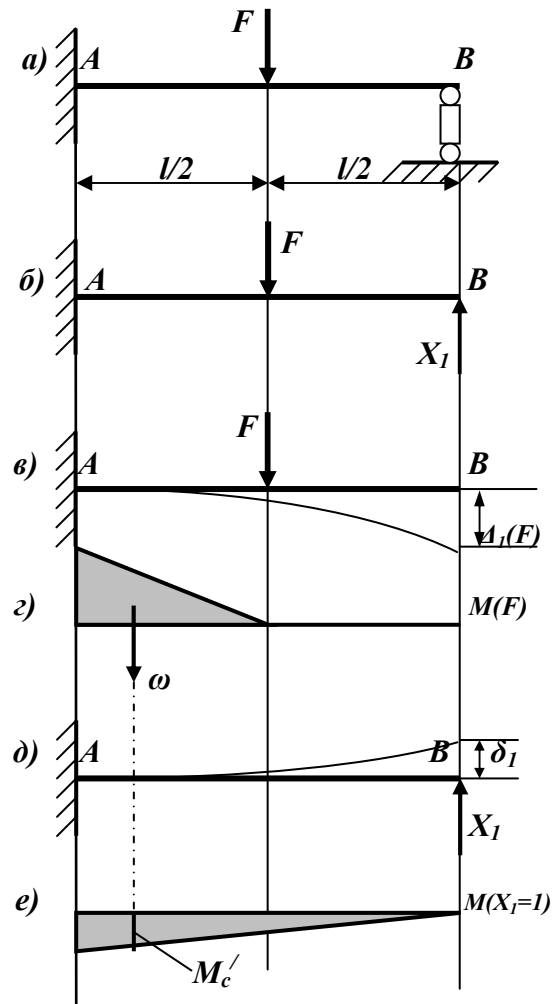


Рис.11.1. Приклад використання методу сил (ступінь статичної невизначеності -1)

Застосувавши принцип незалежності дії сил, матимемо:

$$\Delta_1 = \Delta_1(F) + \Delta(X_1) .$$

Якщо позначити δ_1 переміщення за напрямком X_1 , від сили $X_1 = 1$ (рис 11.1,д), то:

$$\Delta(X_1) = \delta_1 \cdot X_1 .$$

Тоді рівняння (11.1) набуває виразу:

$$\delta_1 \cdot X_1 + \Delta_1(F) = 0 . \quad (11.2)$$

Звідки:

$$X_1 = -\frac{\Delta_1(F)}{\delta_1} . \quad (11.3)$$

Для системи з двома „зайвими” зв’язками (рис 11.2,а) допоміжні рівняння переміщень перерізу A основної системи (рис 11.2,б) мають вигляд:

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0 ,$$

де $\Delta_1 = \Delta_1(F; X_1; X_2)$ – повне переміщення точки A за напрямком X_1 ;

$\Delta_2 = \Delta_2(F; X_1; X_2)$ – повне переміщення точки A за напрямком X_2 .

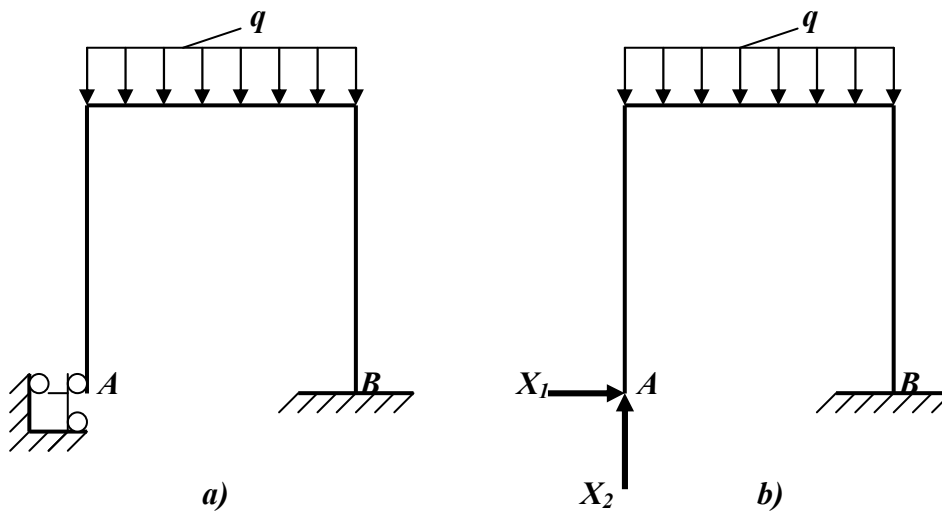


Рис. 11.2. Приклад використання методу сил (ступінь статичної невизначеності – 2)

Аналогічно з попереднім:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_1(X_1) + \Delta_1(X_2) + \Delta_1(F) = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_2(X_1) + \Delta_2(X_2) + \Delta_2(F) = 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Повне переміщення Δ_{ik} (в даному випадку $i=1;2, k=1;2$) можна записати як добуток питомого переміщення δ_{ik} від одиничної сили на величину відповідної узагальненої сили. Тобто

$$\Delta_1(X_1) = \delta_{11} X_1; \quad \Delta_1(X_2) = \delta_{12} X_2 \dots \dots \dots \Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k .$$

Таким чином (11.5) можна записати як:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_1(F) &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_2(F) &= 0, \end{aligned} \quad (11.5)$$

де δ_{11} – переміщення в т. прикладання X_1 , за напрямком X_1 , від сили $X_1 = 1$;

δ_{12} — переміщення в т. прикладання X_1 , за напрямком X_1 , від сили $X_2 = 1$;

δ_{21} — переміщення в т. прикладання X_2 , за напрямком X_2 , від сили $X_1 = 1$;

δ_{22} — переміщення в т. прикладання X_2 , за напрямком X_2 , від сили $X_2 = 1$;

$\Delta_1(F)$ – переміщення в т. прикладання X_1 , за напрямком X_1 , на основній системі від зовнішніх сил;

$\Delta_2(F)$ – переміщення в т. прикладання X_2 , за напрямком X_2 , на основній системі від зовнішніх сил.

Причому $\delta_{12} = \delta_{21}$ (і взагалі – $\delta_{ik} = \delta_{ki}$) – в силу теореми Бетті (тут обидві системи сил є одиничними).

Це й є система канонічних рівнянь для двічі статично невизначеної системи.

Аналогічні рівняння можна записати і для n - разів статично невизначеної системи.

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_1(F) &= 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_2(F) &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_n(F) &= 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Переміщення $\Delta_i(F)$ та δ_{ik} , що входять у канонічні рівняння частіше за все визначають, використовуючи спрощений інтеграл Мора або спосіб Верещагіна.

12. Криві стержні

12.1. Загальні поняття

Окрім стержнів із прямою віссю, в конструкціях часто зустрічаються елементи, в яких вісь, тобто лінія, що проходить через центри ваги поперечних перерізів, є кривою. До них відносять ланки ланцюгів, проушини, гаки, арки, станини підйомних кранів і т.п. На практиці строго прямих стержнів не зустрічається; всі стержні, що розраховуються нами як прямі, мають невелику кривизну. Тому вивчення впливу кривизни осі стержня на розподіл напружень дозволить нам, з одного боку, перевіряти міцність явно кривих стержнів, а з іншого — оцінити вплив невеликих відступів від прямолінійної форми на міцність прямих стержнів.

При перевірці міцності таких стержнів введемо такі обмеження:

- а) *перерізи стержня мають вісь симетрії;*
- б) *вісь стержня буде плоскою кривою, яка лежатиме у площині симетрії;*
- в) *зовнішні сили лежатимуть у тій же площині.*

Внаслідок симетрії, і деформація осі стержня відбуватиметься в тій же площині; вісь стержня залишиться плоскою кривою, що лежить в площині зовнішніх сил; і ми матимемо випадок, аналогічний плоскому згину балки.

Приймаючи при розрахунку вказані вище обмеження, ми охопимо майже всі випадки роботи кривих стержнів, що зустрічаються на практиці. Нашим завданням буде відшукати найбільші напруження, перевірити міцність і обчислити деформації кривих стержнів. Виконання цих дій проведемо аналогічно подібним дослідженням у випадку прямої балки.

12.2. Обчислення згинаючих моментів, нормальних і поперечних сил

Уявімо кривий стержень (рис.12.1), навантажений зовнішніми силами F_1, F_2, F_3, F_4 і т.д., розташованими в площині симетрії поперечних перерізів. У тій же площині лежатимуть і опорні реакції стержня. Для з'ясування напружень по перерізах, перпендикулярних до осі стержня, проведемо один з таких перерізів mn , поділяючи стержень на дві частини I і II. Відкинемо одну з них, наприклад II, і розглянемо рівновагу залишеної. На неї діятимуть зовнішні сили F_1, F_2, F_3 , а по перерізу mn передаватимуться напруження σ і τ .

Систему зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини, можна замінити однією результуючою силою. Розглянемо загальний випадок (рис.12.2).

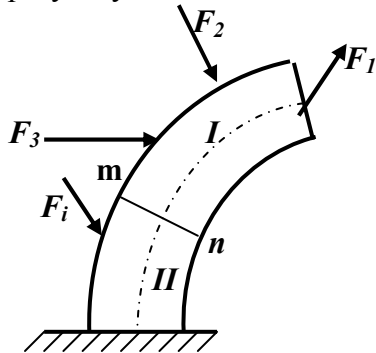


Рис. 12.1. Навантажений кривий стержень

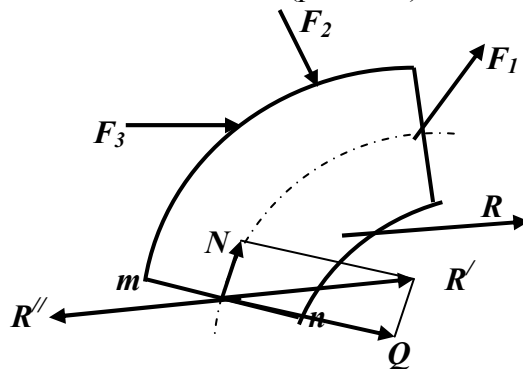


Рис. 12.2. Сили в перерізі mn

Замінімо сили F_1, F_2, F_3 їх рівнодіючою R потім прикладемо в центрі ваги перерізу mn дві протилежні сили R' і R'' , які дорівнюють R . Сили R і R'' утворюють пару з моментом M ; силу R' розкладемо на нормальну до перерізу N , і таку, що лежить у площині перерізу Q . Таким чином, систему зовнішніх сил F_1, F_2, F_3 , що діє на залишену частину стержня замінено статично еквівалентною системою з пари сил M (згинаючого моменту), нормальної сили N і поперечної сили Q .

Разом ці три величини замінюють дію зовнішніх сил прикладених до залишеної частини стержня. В окремому випадку, коли вони приводяться до пари, сили N і Q перетворюються в нуль. Величини сил M, N і Q визначаються з умови статичної еквівалентності цієї системи $-F_1, F_2, F_3$; моменти відносно будь-якої точки і проєкції на будь-яку вісь обох систем сил рівні між собою.

Складаючи суми моментів сил обох систем відносно центра ваги проведеного перерізу, отримаємо, що згинаючий момент M дорівнює сумі моментів всіх сил, прикладених до залишеної частини стержня:

$$M = \sum m(F_1, F_2, F_3)_0 \quad (12.1)$$

Проектуючи сили обох систем на напрямки N і Q , одержуємо, що нормальна і поперечна сили дорівнюють сумам проєкцій усіх сил, прикладених до залишеної частини стержня, відповідно на напрям нормалі до перерізу і на його площину:

$$N = \sum_{np} (F_1, F_2, F_3)_N, \quad (12.2)$$

$$Q = \sum_{np} (F_1, F_2, F_3)_Q. \quad (12.3)$$

Згинаючий момент вважаємо додатним, якщо, він збільшує кривизну осі стержня.

Нормальну силу вважаємо додатною, якщо вона намагається відірвати залишену частину стержня від відкинutoї.

Поперечну силу рахуємо додатною, коли вона виходить із позитивного напрямку нормальної сили поворотом за годинниковою стрілкою на 90° (рис.12.3).

Як і для прямої балки, при обчисленні величин M, N і Q можна розглядати як ліву, так і праву частину стержня, розділені проведеним січенням; вибір тієї або іншої частини визначається умовою більшої простоти обчислень.

Наведені правила знаків для згинаючого моменту, нормальної та поперечної сил не залежать від того, яку з частин стержня ми залишимо для їх обчислення.

Розглянемо приклад обчислення M, N і Q . Візьмемо стержень, який є четвертою частиною кола радіуса R_0 , затиснений одним кінцем і навантажений на іншому силою F (рис.12.4). Проведемо будь-який переріз із центром ваги O .

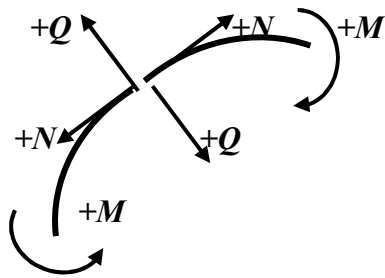


Рис. 12.3. Вибір знаків для N, Q і M

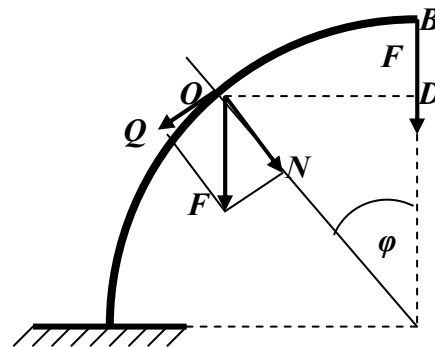


Рис. 12.4. Сили в довільному перерізі

Положення перерізу визначимо кутом φ , складеним ним з вертикаллю. Для обчислення M, N і Q розглянемо праву частину стержня. Цим ми позбавимося від обчислення реакцій у перерізі C .

Згинаючий момент буде рівний моменту сили F відносно точки O :

$$M = +F \cdot \overline{OD} = +FR_0 \sin \varphi .$$

Проектуючи силу F на нормаль до перерізу і на сам переріз, одержуємо:

$$N = -F \sin \varphi; \quad Q = +F \cos \varphi .$$

Таким чином, найбільший згинаючий момент і нормальна сила будуть при $\lambda = 90^\circ$, тобто в опорному перерізі.

На рис. 12.5 (а, б, в). Зображено епюри M, N і Q . За нульову лінію прийнята вісь стержня. Ординати відкладено по радіусах кривизни стержня.

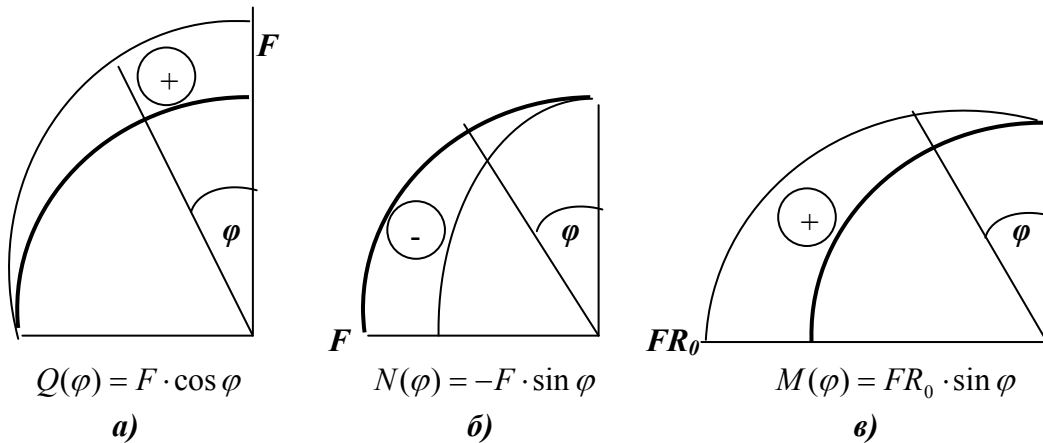


Рис.12.5. Епюри: а) перерізуючих сил Q , б) нормальних сил N , в) згинаючих моментів M

12.3.Обчислення напружень від сил Q і N

Напруження σ і τ по проведеному перерізу mn врівноважують систему зовнішніх сил (F_1, F_2, F_3), прикладених до залишеної частини, або ж систему сил $M N$ і Q (рис.12.1 і 12.2).

Сила Q , що лежить у площині перерізу, обумовлює дотичні напруження τ , а нормальна сила N і згинаючий момент M , прикладені до залишеної частини, — нормальні.

Умови рівноваги залишеної частини дозволяють знайти лише сумарні внутрішні зусилля, що передаються від відкинutoї частини на залишену. Розподіл напружень по перерізу залишається невідомим, — ми маємо справу зі статично невизначною задачею, для вирішення якої необхідно розглянути деформацію стержня.

Проте напруження, зумовлені силами Q і N , можна одержати простіше. Теоретичні дослідження показують, що розподіл дотичних напружень у кривих стержнях близький до того, який ми маємо для прямих. Тому й для кривих стержнів можливо використовувати формули, виведені для прямих балок, тобто (8.27):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{eior}}{b \cdot I_y}$$

Це не зовсім точно. Застосовуючи ті ж методи, що і при обчисленні дотичних напружень у балках, можна вивести і для кривих стержнів більш точні формули для обчислення τ . Проте практично цілком допустиме використання формули (8.27).

Умова міцності відносно дотичних напружень для кривих стержнів має вигляд (8.30):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\text{відр max}}}{b_{\min} I_y} \leq [\tau]$$

Тепер визначимо напруження, що викликає нормальна сила N . Розглядаючи елемент кривого стержня завдовжки ds під дією зусиль N (рис.12.6), бачимо, що сили, які прикладено в центрах ваги поперечних перерізів, відповідають простому осьовому розтягу або стиску виділеного елемента.

Тому і відповідні напруження будуть нормальними до перерізу й рівномірно розподіленими за його площею A :

$$\sigma = \frac{N}{A} .$$

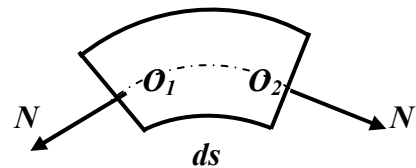


Рис.12.6. Дія нормальних сил N

Знак напруження визначиться знаком сили N .

12.4. Обчислення напружень від згинаючого моменту

Згинаючий момент M може бути врівноважений, як і в прямій балці, тільки нормальними напруженнями, які приводяться до пари, розташованої в площині дії зовнішніх сил, зворотної за напрямом, і рівної за величиною моменту M . Задача знаходження закону розподілу напружень по перерізу та формули для їх обчислень є статично невизначеною, що обумовлює, як це було і при вивченні згину прямої балки, крім складання і розв'язування рівнянь статки, ще й розглядання сумісності відповідних деформацій і складання додаткових рівнянь. При визначенні напружень від сил Q і N обійшлося без подібних обчислень, бо ми скористалися вже готовими розв'язками. Проте для нормальних напружень, які врівноважують згинаючий момент M , виконаємо весь хід обчислень, який було зроблено для визначення нормальних напружень у прямих балках.

Розглянемо умови рівноваги залишеної частини стержня AB (рис.12.7) під дією згинаючого моменту й системи напружень, які передаються через проведений переріз.

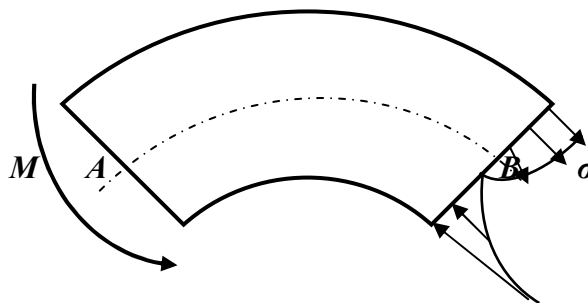


Рис. 12.7. Розподіл нормальних напружень від згинаючого моменту по висоті перерізу

Зобразимо (рис.12.8) залишену частину з діючими на неї силами. Положення нейтрального шару по висоті перерізу поки що є невідомим і його слід визначити. Початок координат візьмемо в точці C , розташованій на нейтральній осі Y та поза центрами ваги перерізу O . При цьому відстань OC невідома. Вісь Z є віссю симетрії, а X спрямована перпендикулярно до площини перерізу.

Запишемо 6 рівнянь статки для цієї просторової системи. На вісь X зовнішні сили дають проекцію, яка дорівнює нулю; сума ж проекцій сил $\sigma \cdot dA$ виразиться інтегралом, що охоплює всю площу поперечного перерізу:

$$\sum X = 0, \quad \int_A \sigma \cdot dA = 0. \quad (12.4)$$

Рівняння проекцій усіх сил на осі Y і Z :

$$\sum Y = 0, \quad \sum Z = 0 -$$

перетворюються в тотожність, оскільки напруження σ перпендикулярні до осей Y і Z , а також у тотожність перетворюються і рівняння моментів відносно осі X :

$$\sum M_x = 0,$$

оскільки не дають моменту ні сили $\sigma \cdot dA$, паралельні осі X , ні пара M , що лежить у площині XCZ .

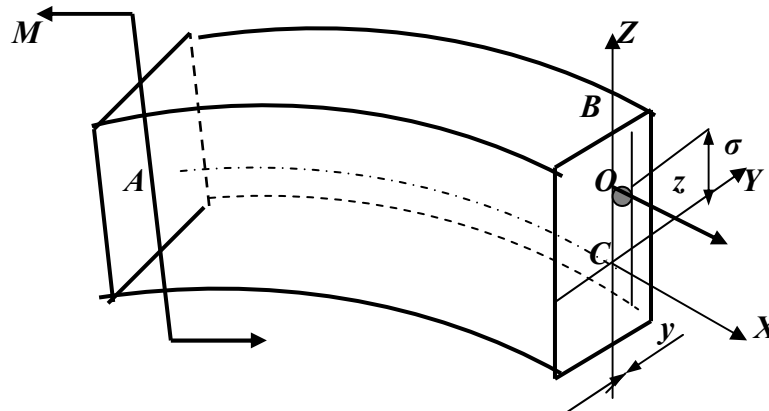


Рис. 12.8. Статика елемента кривого бруса

З цієї ж причини момент пари M відносно осі Z теж дорівнює нулю, що ж до сил $\sigma \cdot dA$, то їх момент відносно цієї осі дорівнює інтегралу $\int_A \sigma \cdot dAy$.

П'яте рівняння рівноваги, отже:

$$\sum M_z = 0 \quad \int_A \sigma dAy = 0 \quad (12.5)$$

але цей інтеграл дорівнює нулю внаслідок симетрії перерізу відносно осі Z .

Залишається прирівняти до нуля суму моментів усіх сил відносно осі Y . Це рівняння запишемо так:

$$\sum M_y = 0, \quad M - \int_A \sigma dAz = 0. \quad (12.6)$$

Отже, умови статки вимагають розглядання двох рівнянь (12.4) та (12.6):

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0,$$

$$M - \int_A \sigma \cdot dAz = 0.$$

Закон зміни нормальних напружень по висоті перерізу залишився поки що невідомим. Тому переходимо до розглядання деформацій.

Як і у випадку згину прямого стержня, використовуємо гіпотезу плоских перерізів, яка підтверджується дослідами й для кривих стержнів. Припустимо, що при дії згинаючого моменту перерізи, перпендикулярні до осі, залишаються *плоскими* і лише повертаються один відносно іншого (рис. 12.9). Оскільки при зроблених раніше припущеннях вісь бруса залишається при деформації у тій же площині, в якій вона лежала до деформації, то повороти відбуватимуться навколо *нейтральних осей* C_1C_1' і C_2C_2' , перпендикулярних до площини зовнішніх сил, що містить у собі і вісь стержня.

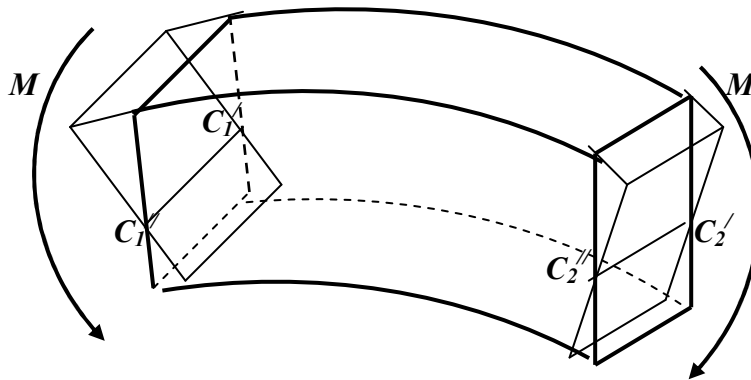


Рис. 12.9. Гіпотеза плоских перерізів

Тоді подовження і вкорочення, а отже і напруження для волокон, рівновіддалених від нейтральної осі, будуть по ширині перерізу однаковими. Встановимо залежність між кутом відносного повороту двох суміжних перерізів і деформаціями волокон. Виділимо з кривого стержня, який піддається дії тільки згинаючих моментів (рис. 12.10.), елемент, обмежений двома дуже близькими перерізами, що становлять кут $d\varphi$.

Цей елемент зображено на рис.12.11.

$O_1 - O_2$ — вісь стержня; $C_1 - C_2$ — нейтральний шар.

Нормальні напруження, які діють по проведених перерізах, утворюють пари; під їх дією кут між суміжними перерізами $1-1$ і $2-2$ зміниться на величину $\delta d\varphi$ унаслідок відносного повороту цих перерізів навколо нейтральних осей C_1 і C_2 .

Знайдемо нормальні напруження σ , які діють по перерізах у точках A_1 і A_2 на відстані z від нейтральних осей. Позитивний напрям осі z оберемо у бік зовнішніх волокон. Волокно A_1A_2 одержить подовження A_2D_2 , відповідне напруження σ дорівнюватиме:

$$\sigma = \varepsilon E,$$

де ε — відносне видовження волокна A_1A_2 . Воно дорівнює відношенню абсолютного видовження A_2D_2 до первинної довжини волокна A_1A_2 :

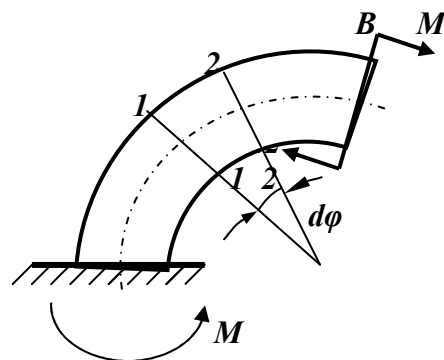


Рис. 12.10. Вибір перерізів

$$\varepsilon = \frac{A_2 D_2}{A_1 A_2},$$

називаючи буквою ρ радіус кривизни волокна $A_1 A_2$, маємо:

$$\begin{aligned} A_2 D_2 &= z \partial d\varphi, & A_1 A_2 &= \rho d\varphi, \\ \varepsilon &= \frac{z \partial d\varphi}{\rho d\varphi}, & \sigma &= \frac{z \partial d\varphi}{\rho d\varphi} E. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Формула (12.7) дає закон розподілу по висоті перерізу нормальних напружень, викликаних згинаючим моментом M .

Оскільки для кожного перерізу величини $\frac{\partial d\varphi}{d\varphi}$ і E – постійні, то зміна σ залежить лише від зміни координати z і радіусу кривизни ρ волокна $A_1 A_2$, причому $\rho = r + z$, де r – радіус кривизни нейтрального шару.

Тоді як для прямої балки ми мали лінійний закон розподілу напруження, то для кривого стержня напруження σ змінюються за гіперболічним законом (рис.12.12). З формули (12.7) видно, що в зовнішніх від нейтрального шару волокнах напруження зростають *повільніше ніж* z ; на внутрішніх, завдяки зміні знаку z з позитивного на негативний, вони зростають *швидше, ніж* z . Таким чином, в кривому стержні нормальне напруження у внутрішньому крайньому волокні *більше*, а в зовнішньому *менше* ніж у тих же волокнах прямого стержня того ж перерізу. Це зрозуміло: початкова довжина внутрішнього волокна у кривому стержні значно менша ніж зовнішнього, в прямому ж стержні ці довжини рівні. Тому й виходить вказана вище різниця у відносних деформаціях, а отже, і в напруженнях для цих волокон.

Перейдемо до розв'язку рівнянь статки (12.4) і (12.6) з урахуванням залежності, одержаної з розглядання деформацій (12.7). У рівняння (12.4) підставимо (12.7):

$$\int_A \sigma dA = \int_A E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} dA = 0.$$

Виносячи постійні для даного перерізу величини за знак інтеграла і скорочуючи їх, одержуємо:

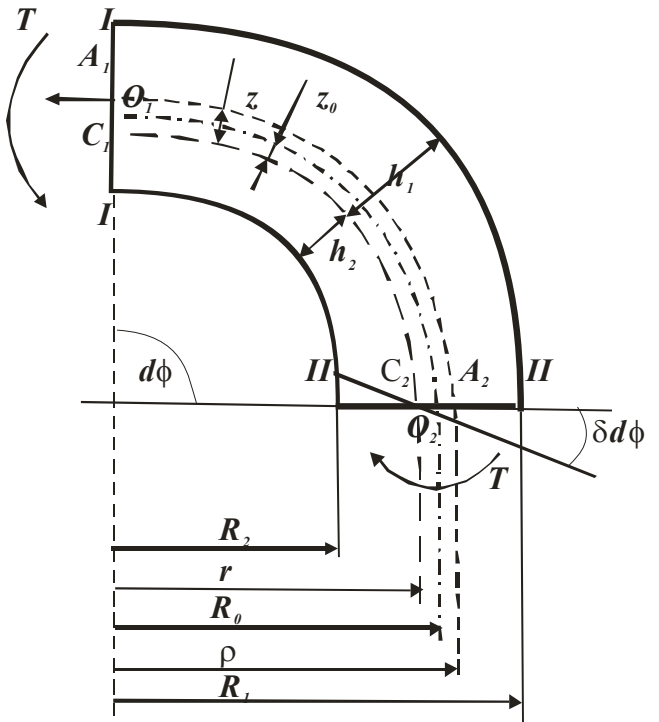


Рис. 12.11. Характерні шари кривого бруса

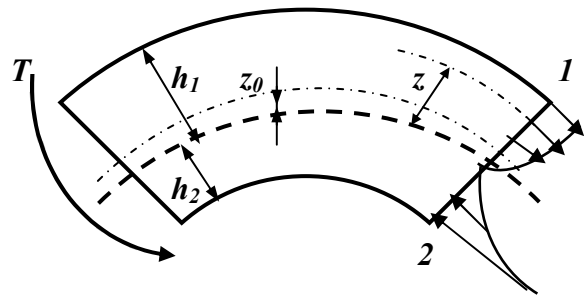


Рис. 12.12. Розподіл нормальних напружень у кривому брусі

$$\int_A \frac{z}{\rho} dA = 0. \quad (12.8)$$

Це рівняння дозволяє знайти положення нейтральної осі.

З рівності (12.8) ясно, що рівний нулю не інтеграл $\int_A z dA$, який є статичним моментом перерізу відносно нейтральної осі, як це було для прямого стержня, а інший інтеграл. Це показує, що *при вигині кривого стержня нейтральна вісь дійсно не проходить через центр ваги перерізу*. Замінюючи в (12.8) $z = \rho - r$ (рис.12.11), знаходимо:

$$\int_A \frac{\rho - r}{\rho} dA = \int_A dA - r \int_A \frac{dA}{\rho} = 0,$$

звідки впливає вираз для знаходження радіуса нейтрального шару:

$$\boxed{r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}}}. \quad (12.9)$$

Хід обчислень величини r для кожного окремого виду поперечного перерізу буде різний. Підставивши тепер залежність (12.7) у рівняння (12.6), одержимо:

$$M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \frac{z^2}{\rho} dA = 0, \quad (12.10)$$

де M — згинаючий момент, а інтегрування охоплює всю площу поперечного перерізу. Перетворимо інтеграл, що входить у це рівняння, таким чином:

$$\int_A \frac{z^2}{\rho} dA = \int_A \frac{\rho - r}{\rho} z dA = \int_A z dA - r \int_A \frac{z}{\rho} dA.$$

Тоді останній з одержаних двох інтегралів дорівнює нулю на підставі (12.8), а перший є статичним моментом S площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі. Ця величина може бути обчислена як добуток площі перерізу A на відстань її центра ваги до нейтральної осі, тобто на z_0 (рис.12.12):

$$S = Az_0. \quad (12.11)$$

Таким чином, рівняння (12.10) матиме вигляд:

$$M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} S = 0, \quad (12.12)$$

звідси

$$\frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{ES} \quad (12.13)$$

і формулу для нормальних напружень, які обумовлені згинаючим моментом, запишемо так:

$$\sigma = \frac{M}{S} \cdot \frac{z}{\rho}. \quad (12.14)$$

У рівнянні (12.12) ми знаходимо підтвердження того, що *статичний момент S площі перерізу відносно нейтральної осі не дорівнює нулю, тобто нейтральна вісь при вигині кривого стержня не проходить через центр ваги перерізу, а дещо (на величину z_0) зміщена*. На рис 12.12 ми зобразили цей зсув убік до центра кривизни стержня. Результати

визначення величини r із рівняння (12.9) для різних перерізів показують, що нейтральна вісь дійсно зміщується у вказаному напрямі.

Цей зсув пов'язаний з умовою рівності між собою сум стискаючих і розтягуючих напружень, що діють по перерізу. Оскільки напруження від згинаючого моменту біля зовнішнього краю перерізу менше, а біля внутрішнього — більше, ніж у відповідних волокнах прямого стержня того ж перерізу (рис.12.12), то для рівності вказаних сум нейтральна вісь повинна зміститися від центру ваги перерізу у бік внутрішніх волокон. Додаючи до одержаних напружень знайдені в попередньому параграфі напруження від нормальної сили, одержуємо формулу для обчислення повних нормальних напружень у кривому стержні:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{S} \cdot \frac{z}{\rho} \quad (12.15)$$

Найбільші за абсолютною величиною розтягуючі і стискаючі напруження матимуть місце в крайніх волокнах 1 і 2 (рис.12.12).

12.5. Визначення радіуса кривизни нейтрального шару для різних перерізів

Для визначення величини r використовують вираз:

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}}$$

Розглянемо цей вираз для різних, найбільш поширених перерізів.

12.5.1. Прямокутний переріз

$$r = \frac{bh}{\int_A \frac{bd\rho}{\rho}} = \frac{h}{\int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{\rho} d\rho},$$

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (12.16)$$

Тоді
$$z_0 = R_0 - \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (12.17)$$

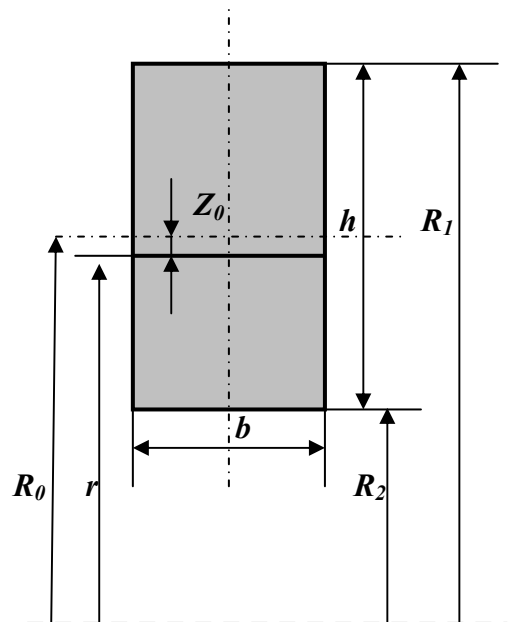


Рис. 12.12. Прямокутний переріз

12.5.2 Круговий переріз

Виразимо dA та ρ через функцію φ .
Попередньо обчислюємо:

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2} \sin \varphi; dA = b_z d\rho;$$

$$b_z = d \cdot \cos \varphi; d\rho = \frac{d}{2} \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Тоді

$$\int_A \frac{dA}{\rho} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{2R_0 + d \cdot \sin \varphi}.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$d^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \cdot d\varphi}{2R_0 + d \cdot \sin \varphi} = \pi(2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}),$$

звідки, враховуючи, що

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ знаходимо:}$$

$$r = \frac{d^2}{4[2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}]} \quad (12.18)$$

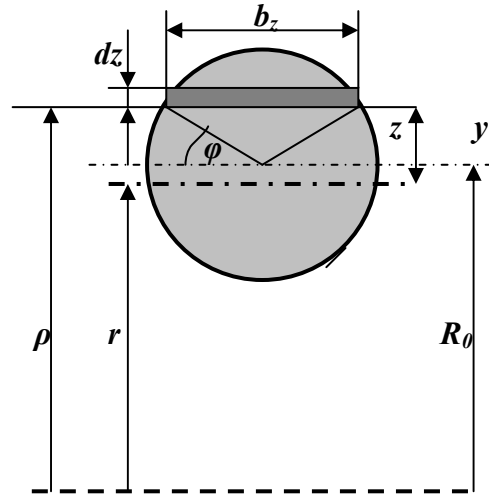


Рис.12.14. Круговий переріз

12.5.3. Трапецевидний та трикутний перерізи

Площа трапеції $A = \frac{b_1 + b_2}{2} h$, ширина перерізу трапеції на відстані ρ від центра кривизни

$$b(\rho) = b_1 + (b_2 - b_1) \frac{R_1 - \rho}{R_1 - R_2};$$

$$dA = b(\rho) d\rho.$$

Інтеграл (12.9), опускаючи проміжні викладки, можна записати в такому вигляді:

$$\int_A \frac{dA}{\rho} = [b_1 + R_1 \frac{(b_2 - b_1)}{h}] \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)$$

Тоді

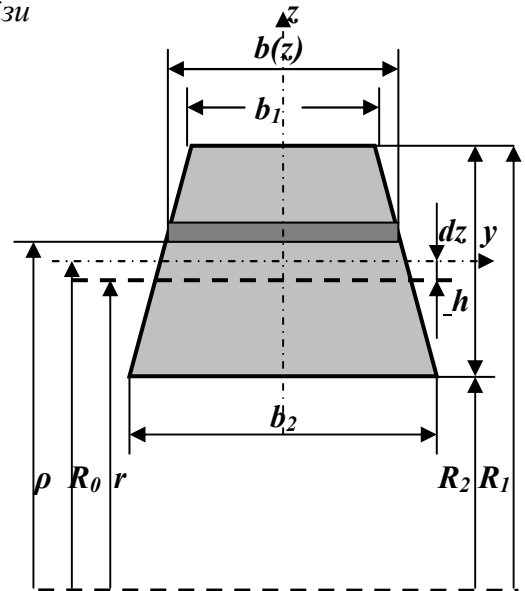


Рис. 12.15. Трапецевидний переріз

$$r = \frac{h \frac{b_1 + b_2}{2}}{[b_1 + R_1 \frac{(b_2 - b_1)}{h}] \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)} \quad (12.19)$$

Якщо $b_1 = 0$, отримаємо формулу для радіуса нейтрального шару трикутного поперечного перерізу:

$$r = \frac{hb}{2(R_1 \frac{b}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - b)} \quad (12.20)$$

12.6. Аналіз формули нормальних напружень у кривому стержні

Підставляючи у формулу нормальних напружень (12.15) координати найвіддаленіших точок перерізу (рис.12.12):

точки $1 \dots z_1$ і R_1 (зовнішні волокна),

точки $2 \dots z_2$ і R_2 (внутрішні волокна), можемо записати умову міцності кривого стержня

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{A} + \frac{M}{S} \cdot \frac{z_1}{R_1} \leq [\sigma] \\ \sigma_2 &= \frac{N}{A} - \frac{M}{S} \cdot \frac{z_2}{R_2} \leq [\sigma] \end{aligned} \quad (12.21)$$

Якщо матеріал неоднаково чинить опір розтягу і стиску, величини допустимих напружень матимуть різні значення. Що ж до відшукування небезпечного перерізу, то завдяки наявності двох силових факторів, що викликають нормальні напруження – M і N , це питання складніше, ніж для прямого стержня. В деяких випадках M до N досягають найбільшої величини в одному і тому ж перерізі, тоді воно й буде небезпечним. Якщо ж це не має місця, то доводиться перевіряти міцність матеріалу в ряді перерізів, відшукуючи обчисленням найбільш напружених.

Якщо значення радіуса кривизни стержня R_0 велике в порівнянні з висотою перерізу h (а саме $R_0 > 5h$), то відношення z/ρ , або z_1/R_1 , або z_2/R_2 стають незначними, і нормальні напруження, які залежать від згинаючого моменту, будуть мало чим відрізнятися від напружень, що визначатимуться за формулами для прямого бруса. Це легко встановити за допомогою даних. Візьмемо, наприклад, рівняння (12.10) і (12.7).

Виключаючи з них $E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi}$ і замінюючи ρ через $r + z$, одержуємо

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{(r+z) \int_A \frac{z^2}{r+z} dA} = \frac{M \cdot z}{\left(1 + \frac{z}{r}\right) \int_A \frac{z^2 dA}{1 + \frac{z}{r}}} \quad (12.22)$$

Якщо нехтувати величиною $\frac{z}{r}$, то формула (12.22) звернеться у формулу напружень для прямого стержня:

$$\sigma = \frac{Mz}{J}$$

Визначимо, якою буде похибка при обчисленні найбільших нормальних напружень від згинаючого моменту за формулою для прямого стержня при значенні $R_0 = 5h$ на прикладі стержня прямокутного перерізу. Радіус кривизни нейтрального шару в цьому випадку дорівнює:

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_0 + 0,5h}{R_0 - 0,5h}} = \frac{h}{\ln \frac{5,5}{4,5}} = \frac{h}{0,20067} = 4,9833h.$$

Тоді

$$z_0 = R_0 - r = 0,0167h \quad \text{і} \quad z_0 = 0,00334R_0,$$

т. е. нейтральна вісь відстоїть всього на $1/60$ висоти від центра ваги перерізу.

Напруження *згину* за формулами для кривого стержня складають:

$$\sigma_1 = \frac{M}{S} \cdot \frac{z_1}{R_1} = \frac{M \cdot 0,5167h}{bh \cdot 0,0167h \cdot 5,5h} = \frac{0,5167 \cdot M \cdot 6}{0,5511bh^2} = 0,935 \frac{M}{W},$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{S} \cdot \frac{z_2}{R_2} = \frac{M \cdot 0,4833h}{bh \cdot 0,0167h \cdot 4,5h} = \frac{0,4833 \cdot M \cdot 6}{0,4509bh^2} = 1,071 \frac{M}{W},$$

тобто величина напруження в цьому випадку відрізняється від величини, що визначається за формулою для прямого стержня на $\pm 7\%$.

Ця обставина є причиною того, що для перевірки міцності криві стержні часто поділяють на дві категорії.

До першої відносять стержні *великої кривизни* з $\frac{R_0}{h} \leq 5$, для яких розрахунок нормальних напружень слід робити за формулою:

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{S} \cdot \frac{z_{1,2}}{R_{1,2}} \leq [\sigma]. \quad (12.23)$$

На практиці її можна використовувати для розрахунків крюків, ланок ланцюгів, кілець і т.д. До другої категорії відносять стержні *малої кривизни*, для яких радіус осі великий у порівнянні з розмірами перерізу, тобто $\frac{R_0}{h} > 5$ – для таких стержнів при обчисленні напружень від вигину можна користуватися формулою для прямого стержня

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_{1,2}} \leq [\sigma]. \quad (12.24)$$

Ця категорія зазвичай включає криві стержні, які зустрічаються в різних інженерних спорудах — арки, кільця і т.п.

12.7. Деформації кривих стержнів

При розв'язуванні статично невизначених задач із розрахунку конструкцій, куди входять криві стержні (арки, ланки ланцюга, кільця тощо), необхідно вміти обчислювати деформації кривих стержнів. Досвід і розрахунки показують, що при визначенні напружень для стержнів великої кривизни необхідно враховувати вплив цієї кривизни, а при обчисленні деформацій у переважній більшості випадків цим впливом можна нехтувати.

Практика показує, що для обчислення деформацій кривого стержня зручно використовувати метод Мора.

Візьмемо кривий стержень, який є четвертою частиною кола (рис.12.16), затиснений кінцем у точці А. Радіус осі назвемо R_0 . Навантажимо цей стержень вертикальною силою F на вільному кінці й знайдемо вертикальне переміщення точки B .

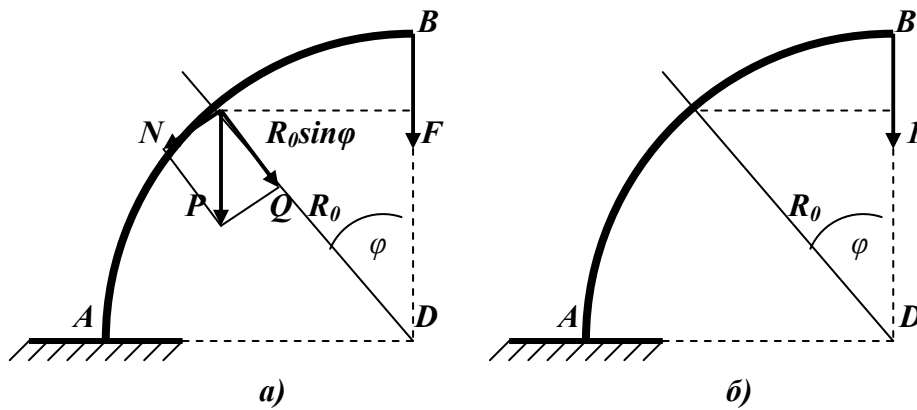


Рис. 12.16. Розглядання внутрішніх силових факторів у перерізі:
а) при завантаженні заданим навантаженням;
б) при завантаженні одиничною силою

Потрібно зобразити стержень у двох станах:

а) при завантаженні заданим навантаженням, б) при завантаженні одиничною силою, прикладеною в тому перерізі, де визначається переміщення.

Так, для визначення вертикальної складової переміщення кінця стержня B (рис.12.16, а) потрібно прикласти в цьому перерізі одиничну вертикальну силу $F^0 = 1$ (рис.12.16, б).

Для визначення вертикального переміщення запишемо:

$$f = \int_s \frac{M(x)M^0 ds}{EJ} + \int_s \frac{N(x)N^0 ds}{EA} . \quad (12.25)$$

Обчислимо $M(x), M^0, N(x), N^0$:

$$M = +FR_0 \sin \varphi; \quad M^0 = R_0 \sin \varphi;$$

$$N = -F \sin \varphi; \quad N^0 = -\sin \varphi;$$

$$ds = R_0 d\varphi.$$

Підставляючи одержані величини у формулу (12.25), одержуємо:

$$f = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \sin^2 \varphi R_0^3 d\varphi + \frac{1}{EA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \sin^2 \varphi R_0 d\varphi = \left[\frac{FR_0^3}{EJ} + \frac{FR_0}{EA} \right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \left[\frac{FR_0^3}{EJ} + \frac{FR_0}{EA} \right] \frac{\pi}{4} = \frac{\pi FR_0^3}{4EJ} \left[1 + \frac{J}{AR_0^2} \right] = \frac{\pi FR_0^3}{4EJ} \left[1 + \frac{i^2}{R_0^2} \right],$$

де i — радіус інерції перерізу.

Перший доданок у дужках відображає вплив на прогин згинаючого моменту, другий — нормальної сили. Оскільки в більшості випадках відношення $\frac{i^2}{R_0^2}$ — мала величина, то роль нормальної сили при деформації кривих стержнів у ряді випадків є порівняно невеликою.

Якби ми знаходили горизонтальне переміщення точки В, то слід було б прикласти в цій точці горизонтальну силу $F^0 = 1$. При розрахунку кута повороту цього перерізу замість одиничної сили слід було б ввести $M^0 = 1$.

Якщо при обчисленні M та N доводиться розбивати стержень на ділянки, то відповідно й кожен з інтегралів у формулах (12.25) розпадається на суму інтегралів із відповідно вибраними межами.

12.8. Приклад розрахунку кривих стержнів

Розрахуємо кругове кільце, яке знаходиться під дією двох сил F (рис. 12.17). Радіус осі кільця назвемо R_0 . Знайдемо напруження в будь-якому перерізі кільця mn , нахиленому під кутом φ до горизонту; для цього розріжемо стержень у цьому перерізі. Цей розріз не поділяє кільце на дві незалежні частини, як це було, наприклад, у випадку розтягнутого стержня. Про величину напруження тільки з умов статичної рівноваги нічого взяти неможливо, — задача, як то кажуть, *внутрішньо статично невизначна*, хоча зовнішні сили, які діють на кільце, відомі.

З іншого боку, якщо ми знайдемо напруження, які діють у довільному перерізі, наприклад A , що в загальному випадку складаються в пару M_a , нормальну і дотичну сили N_a і Q_a , то для кожного іншого перерізу mn ми зможемо обчислити згинаючий момент M , нормальну і поперечну сили N і Q і потім знайти напруження. Для цього потрібно виділити з кільця частину між перерізами A і mn (рис. 12.18) і зрівноважити діючі на неї по перерізу A сили M_a, N_a і Q_a та системою M, N і Q для перерізу mn .

Вважаючи M_a, N_a і Q_a додатними і позначаючи кут між перерізами A і mn через φ , одержимо:

$$\left. \begin{aligned} M &= +M_a + N_a R_0 (1 - \cos \varphi) + Q_a R_0 \sin \varphi, \\ N &= N_a \cos \varphi - Q_a \sin \varphi, \\ Q &= Q_a \cos \varphi - N_a \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

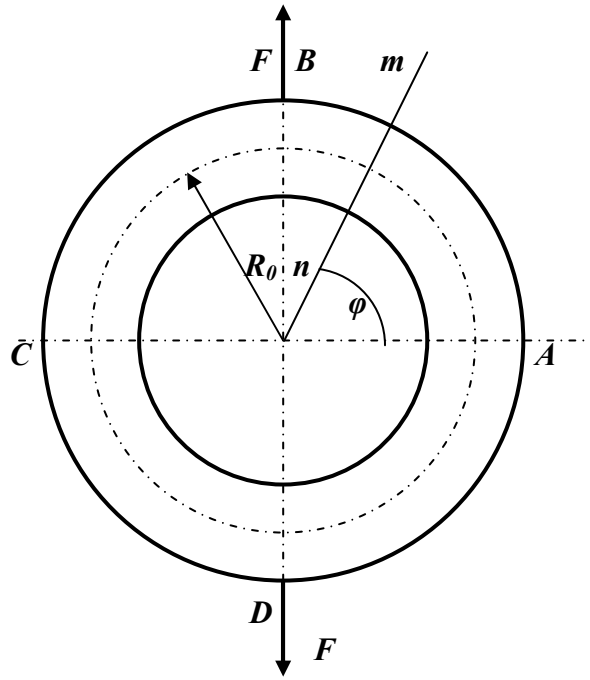


Рис. 12.17. Торіод, що розтягується силами F

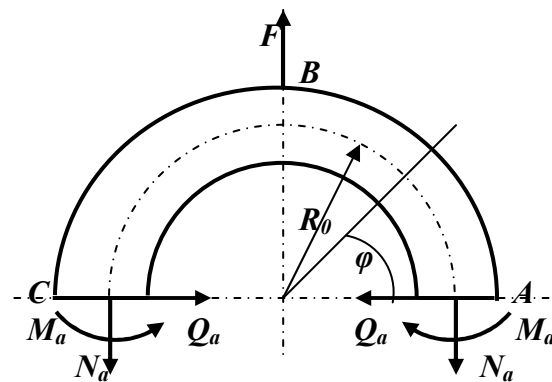


Рис. 12.18. Силві фактори в перерізах

Отже, задача зводиться до знаходження трьох статично невизначних величин внутрішніх зусиль у довільному перерізі A кільця: згинаючого моменту M_a , нормальної сили N_a і поперечної сили Q_a .

Розрізаючи кільце перерізами в точках A і C на дві половини (рис.12.18), ми бачимо, що в силу симетрії нормальні зусилля в перерізах A і C дорівнюють $F/2$, а дотичні – нулю. Таким чином, з трьох зайвих невідомих залишається тільки зусилля M_a . Далі, теж в силу симетрії, перерізи B і A при деформації півкільця не повертаються; тому четверть кільця AB ми можемо розглядати як кривий стержень жорстко закріплений у перерізі B і навантажений на вільному кінці силою $\frac{F}{2}$ та моментом M_a . Умова для знаходження M_a вийде, якщо записати що поворот перерізу A дорівнює нулю, тобто

$$\int_0^{s/4} \frac{MM^0 ds}{EJ} = 0, \quad (12.27)$$

де $M^0 = 1$ — момент, прикладений в перерізі A за напрямом діючого невідомого моменту M_a . Згинаючий момент із (12.26) дорівнює:

$$M = +M_a + \frac{F}{2}(1 - \cos \varphi)R_0,$$

далі:

$$M^0 = +1, \quad ds = R_0 d\varphi.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (12.27), одержуємо:

$$\frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/4} \left[+M_a + \frac{F}{2}(1 - \cos \varphi)R_0 \right] R_0 d\varphi = 0.$$

Звідси

$$+ \int_0^{\pi/2} M_a R_0 d\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{F}{2}(1 - \cos \varphi)R_0^2 d\varphi = 0$$

або

$$+ M_a R_0 \frac{\pi}{2} + \frac{F}{2} R_0^2 \frac{\pi}{2} - \frac{F}{2} R_0^2 = 0.$$

Тоді

$$M_a = -\frac{1}{2}FR_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = -0.182FR_0$$

Таким чином, згинаючий момент M_a вийшов від'ємним.

Тепер для перерізу B при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ знаходимо:

$$M_b = M_a - \frac{F}{2}R_0(1 - \cos \varphi) = -0.182FR_0 + 0.5FR_0 = +0.318FR_0,$$

$$N_b = \frac{F}{2} \cos \varphi = 0$$

Таким чином, для кільця небезпечним є переріз B , хоча нормальна сила в цьому перерізі дорівнює нулю.

13. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість

13.1. Поняття про стійкість стиснутих стержнів

Розглядаючи поздовжньо стиснуті стержні, ми визначали їх поперечні розміри з умов міцності. Проте руйнування стержня може відбутися не лише тому, що порушуватиметься міцність, але й тому, що стержень не збереже тієї форми, яку йому задано конструктором, при цьому зміниться й характер напруженого стану в стержні.

Стійкість – це здатність елементів конструкції чинити опір зовнішнім навантаженням, зберігаючи первісну форму рівноваги.

Найтипівішим прикладом є робота стержня, стиснутого силами F . Дотепер для перевірки міцності ми мали умову

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma],$$

де $[\sigma] = \frac{\sigma_m}{k_m}$ (для пластичного матеріалу), або $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{k_s}$ (для крихкого матеріалу).

Ця умова припускає, що стержень увесь час, аж до руйнування його напруженнями σ_m або σ_s , працює на осьовий стиск. Вже найпростіший дослід показує, що не завжди можливо зруйнувати стержень шляхом доведення напружень стиску до межі текучості або до межі міцності матеріалу.

Якщо ми піддамо поздовжньому стиску тонку дерев'яну лінійку, то вона може зламатися, зігнувшись, причому перед зламом стискаючі сили, при яких відбудеться руйнування лінійки, будуть значно меншими ніж ті, що викликали б при простому стиску напруження, рівні межі міцності матеріалу. Руйнування лінійки відбудеться тому, що вона не зможе зберегти надану їй форму прямолінійного стиснутого стержня, а викривиться, що викличе появу згинаючих моментів від стискаючих сил F і, отже, додаткові напруження від згину – лінійка втратить стійкість.

Тому, для надійної роботи конструкції мало, щоб вона була міцною, потрібно, щоб усі її елементи були стійкими. При дії навантажень вони повинні деформуватися в таких межах, щоб характер їх роботи залишався незмінним. Тому в багатьох випадках, зокрема, для стиснутих стержнів, окрім перевірки на міцність, необхідна й перевірка на стійкість. Для здійснення цієї перевірки потрібно ознайомитися з умовами, за яких стійкість прямолінійної форми стиснутого стержня порушується. Візьмемо достатньо довгий у порівнянні з його поперечними розмірами стержень (рис.13.1), шарнірно прикріплений до опор і навантажимо його зверху центральною силою F , що поступово зростає.

Очевидно, поки сила F порівняно мала, стержень зберігатиме прямолінійну форму. При спробах відхилити його убік, наприклад шляхом прикладання короткочасно діючої горизонтальної сили, він після ряду коливань повертатиметься до первинної прямолінійної форми, як тільки буде знято додаткове навантаження, що викликало відхилення.

При поступовому збільшенні сили F , можна довести її до такої величини, при якій стержень, після невеликого відхилення його вбік, вже не випрямиться, а залишиться викривленим. Якщо, не забираючи сили F , випрямити стержень, він вже, як правило, не зможе зберегти прямолінійну форму. Отже, при цьому критичному значенні сили $F = F_k$, прямолінійна форма перестає бути стійкою формою рівноваги стиснутого стержня.

Перехід до критичного значення сили F відбувається раптово, варто трохи зменшити стискаючу силу в порівнянні з її критичною величиною, як прямолінійна форма рівноваги знов стає стійкою.

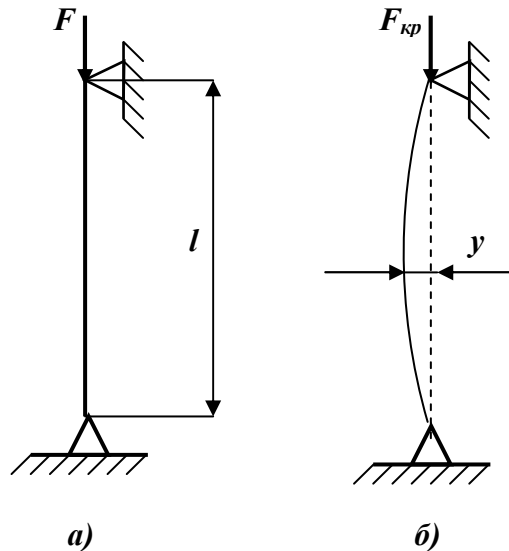


Рис. 13.1. Навантаження стержня:
а) докритичною силою, б) критичною силою

З іншого боку, при незначному перевищенні стискаючою силою F її критичного значення, прямолінійна форма стержня стає вкрай нестійкою. Достатньо невеликого ексцентриситету прикладеної сили, неоднорідності матеріалу по перетину, щоб стержень викривився, і не лише не повернувся до колишньої форми, а продовжував викривлятися під дією зростаючих при викривленні згинаючих моментів. Процес викривлення закінчується досягненням абсолютно нової (стійкої) форми рівноваги або руйнуванням.

Враховуючи це, ми повинні навчитися практично розрахувати критичну величину стискаючої сили F_k еквівалентній навантаженню, що „руйнує” стиснутий стержень, тобто виводить його (і пов'язану з ним конструкцію) з умов нормальної роботи. Слід пам'ятати, що „руйнування” стержня навантаженням, яке перевищує критичне, може відбуватися за умови безперешкодного зростання викривлення стержня; тому якщо при бічному переміщенні стержень зустріне бічну опору, яка обмежить його викривлення, то руйнування може й не відбутися.

Встановивши поняття про критичну силу як про „руйнуюче” навантаження, що виводить стержень з умов його нормальної роботи, можна скласти умову для перевірки на стійкість, аналогічну умові міцності.

Критична сила F_k викликає в стиснутому стержні напруження, яке називають *критичним напруженням* і позначають літерою σ_k ($\sigma_k = \frac{F_k}{A}$). Воно є небезпечним для стиснутого стержня. Тому, щоб забезпечити стійкість прямолінійної форми стержня, стиснутого силами F , необхідно до умови міцності $\left(\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] \right)$ додати ще умову стійкості:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y], \quad (13.1)$$

де $[\sigma_y]$ — допустиме напруження на стійкість, яке дорівнює критичному, поділеному на коефіцієнт запасу стійкості: $[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y}$.

Для перевірки на стійкість слід показати, як визначати σ_k і як обрати коефіцієнт запасу k_y .

13.2. . Формула Ейлера для критичної сили

Для знаходження критичних напружень σ_k треба обчислити критичну силу F_k , тобто найменшу осьову стискаючу силу, здатну утримати в рівновазі трохи викривлений стиснутий стержень. Цю задачу вперше розв'язав академік Петербурзької Академії наук Л. Ейлер у 1744 році.

Ейлер Леонард (15.04.1707.– 18.09.1783) – математик, механік, фізик та астроном. Академік Петербурзької АН. Виявив наукові інтереси – до всіх галузей природознавства, зокрема тих, до яких можна було використати математичні методи досліджень. Фундаментальні праці в галузі варіаційного числення, теорії розв'язку диференціальних рівнянь, степеневих рядів, спеціальних функцій, гідродинаміки, небесної механіки, теорії теплоти,, оптики, механіки. Заклав основи математичної фізики, механіки твердого тіла. Список наукових праць включає понад 850 найменувань.

Розглянемо прямий стержень постійної жорсткості, шарнірно опертий по кінцях. Одна з опор допускає можливість поздовжнього переміщення відповідного кінця стержня (рис.13.2). Власною вагою стержня нехтуємо.

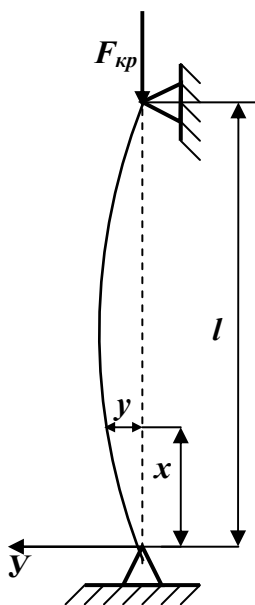


Рис.13.2. Поздовжній згин

Навантажимо стержень центрально прикладеними поздовжньою стискаючими силами $F = F_k$ і надамо йому невеликого викривлення в площині якнайменшої жорсткості. Стержень перебуватиме у викривленому стані, що є можливим, оскільки $F = F_k$.

Припустима деформація згину стержня є малою, тому для розв'язання даної задачі можна скористатися наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі стержня.

Вибравши початок координат у точці А і напрям координатних осей, як зображено на рис.13.2, отримаємо:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x).$$

Візьмемо перетин на відстані x від початку координат, ордината зігнутої осі в цьому перетині буде y , а згинаючий момент дорівнюватиме

$$M(x) = -Fy.$$

На схемі, зображеній на рис.13.2., згинаючий момент є

значення $n = 1$. Але саме можливістю цієї величини перевищувати значення “1” можна пояснити, наприклад, той випадок, коли за допомогою потужного преса неможливо вдавити цвях у дерев’яну дошку, в той час, як досвідчений майстер може забити такий цвях одним сильним і точним ударом.

Тоді отримуємо:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (13.9)$$

— формулу Ейлера для стиснутого стержня із шарнірно-спертими кінцями. Значенню критичної сили (13.9) відповідає вигин стержня по синусоїді з однією напівхвилею (13.5):

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} . \quad (13.10)$$

Значенням критичної сили вищих порядків відповідають викривлення по синусоїдах з двома, трьома і т.д. напівхвилями (рис.13.3.):

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{2\pi}{l}; y = a \sin \frac{2\pi x}{l}, \\ F_k &= \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{3\pi}{l}; y = a \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Чим більше точок перегину матиме синусоїдально-викривлена вісь стержня, тим більшою повинна бути критична сила. Дослідження показують, що форми рівноваги, які визначаються формулами (13.11) – нестійкі. Вони переходять у стійкі форми лише за наявності проміжних опор у точках B і C (рис.13.3).

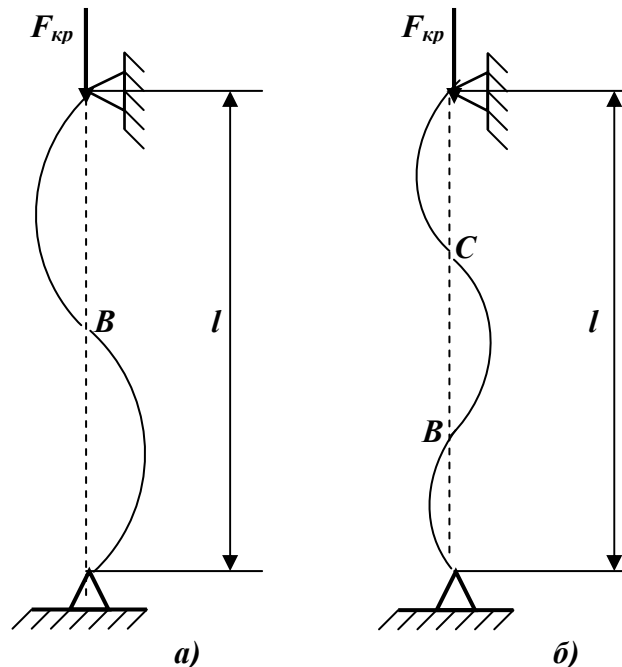


Рис. 13.3. Нестійкі форми рівноваги при а) $k = \frac{2\pi}{l}$; б) $k = \frac{3\pi}{l}$

Отже, задачу розв'язано. Для стержня, який розглядаємо, найменша критична сила визначається за формулою :

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

а зігнута вісь є синусоїдою

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Величина постійної інтегрування “а” залишилася невизначеною. Фізичне значення її з'ясується, якщо в рівнянні синусоїди покласти $x = l/2$, тоді $y_{x=l/2}$ (тобто посередині довжини стержня) набуде значення:

$$y_{\max} = f = a.$$

Тобто, a — це прогин стержня в перетині посередині його довжини. Оскільки при критичному значенні сили F рівновага зігнутого стержня можлива при різних відхиленнях його від прямолінійної форми (лише б ці відхилення були малими), то природно, що прогин f залишається невизначеним.

При цьому він повинен бути настільки малим, щоб ми могли застосовувати наближене диференціальне рівняння зігнутої осі, тобто щоб $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ було малим у порівнянні з одиницею.

Визначивши значення критичної сили, можна знайти і величину критичного напруження σ_k , розділивши силу F_k на площу перетину стержня A . Оскільки величина критичної сили визначалася з розгляду деформацій стержня, на яких місцеві послаблення площі перетину позначаються слабо, то у формулу для F_k входить момент інерції $J_{\text{оп}} = i^2 A_{\text{оп}}$; тому прийнято при обчисленні критичних напружень, а також при складанні умови стійкості вводити в розрахунок повну, а не ослаблену площу поперечного перетину стержня $A_{\text{оп}}$. Тоді

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A_{\text{оп}}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{оп}}}{l^2 A_{\text{оп}}} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (13.12)$$

Критичне напруження для стержнів даного матеріалу є обернено пропорційним до квадрата відношення довжини стержня до якнайменшого радіуса інерції його поперечного перетину. Це відношення $\lambda = l/i$ називають гнучкістю стержня, воно відіграє важливу роль у всіх перевірках стиснутих стержнів на стійкість.

З формули (32.12) видно, що критичне напруження при тонких і довгих стержнях може бути дуже малим, нижчим за основне допустиме напруження $[\sigma]$. Так, для сталі 3 з межею міцності $\sigma_g \approx 400 \text{ МПа}$ та межею текучості $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ напруження, що допускається, може бути прийнято $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Критичне ж напруження для стержня з гнучкістю $\lambda = 150$ при модулі пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ дорівнюватиме:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{(150)^2} = 87,7 (\text{МПа}) < 160 \text{ МПа}.$$

Якщо б площа стиснутого стержня з такою гнучкістю була підібрана лише за умовою міцності, то стержень руйнувався б від втрати стійкості прямолінійної форми.

13.3. Вплив способу закріплення кінців стержня

Закріплення розглянутого стиснутого стержня з шарнірно-спертими кінцями називають основним випадком закріплення. Інші види закріплення зводитимемо до основного випадку.

Якщо повторити весь хід висновку для стержня, жорстко защемленого одним кінцем і навантаженого осьовою стискаючою силою на іншому кінці (рис.13.4б), одержимо інший вираз для критичної сили, а отже, і для критичних напружень.

Підійдемо до з'ясування критичної сили для цього випадку шляхом наступних простих міркувань.

Нехай, при досягненні силою F критичного значення колона зберігатиме рівновагу при малому вигині по кривій AB . Порівнюючи рис.13.4,а та 13.4,б, бачимо, що зігнута вісь стержня, жорстко защемленого одним кінцем, знаходиться абсолютно в тих же умовах, що й верхня частина стержня подвійної довжини з шарнірно-закріпленими кінцями. Отже, критична сила для стійки завдовжки l з одним жорстко защемленим, а іншим вільним кінцями буде така ж, як для стійки з шарнірно-спертими кінцями при довжині $2l$:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (13.13)$$

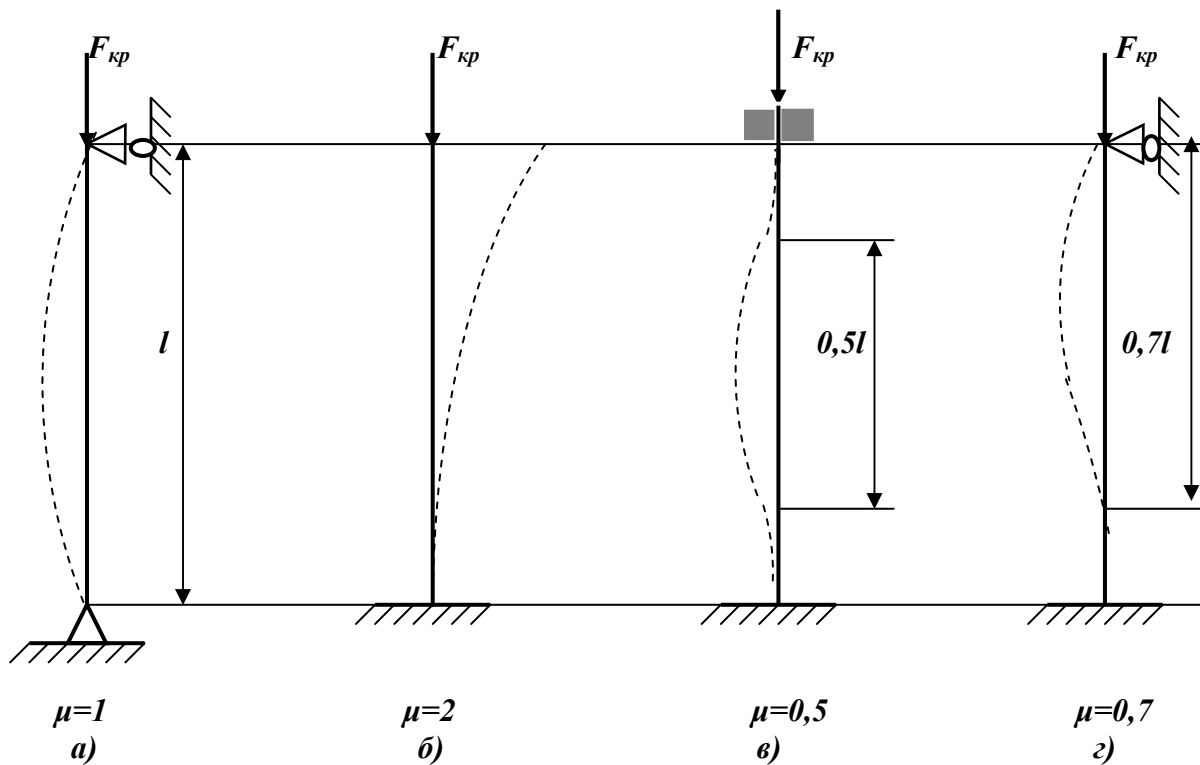


Рис. 13.4. Різні способи закріплення стержня: а) обидва кінці шарнірно закріплені; б) один кінець вільний, другий жорстко защемлений; в) обидва кінця жорстко защемлені; г) один кінець шарнірно опертий, другий жорстко защемлений

Якщо звернутися до випадку стійки, у якої обидва кінці жорстко защемлені й не можуть повертатися (рис.13.4,в), то помітимо, що при вигині, за симетрією, середня

частина стержня, завдовжки $\frac{l}{2}$, працюватиме в тих умовах, що й стержень при шарнірно-спертих кінцях (оскільки в точках перегину C і D згинаючі моменти дорівнює нулю, то ці точки можна розглядати як шарніри).

Тому критична сила для стержня із жорстко защемленими кінцями, довжиною l , дорівнює критичній силі для стержня основного випадку завдовжки $\frac{l}{2}$:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}. \quad (13.14)$$

Формули (13.13) і (13.14) можна об'єднати з формулою для критичної сили основного випадку $P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ і записати:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (13.15)$$

де μ — коефіцієнт зведення довжини, рівний відповідно:

- при шарнірно опертих кінцях (основний випадок): $\mu = 1$;
- одному вільному, іншому жорстко защемленому: $\mu = 2$;
- обох жорстко защемлених кінцях: $\mu = 0,5$.

Для стержня, зображеного на рис.13.4,г з одним жорстко защемленим, а іншим шарнірно-спертим кінцями, коефіцієнт μ виявляється приблизно рівним $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$, а критична сила:

$$F_k \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2} \approx 2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (13.16)$$

Величину μl називають *зведеною (вільною) довжиною*; за допомогою коефіцієнта зведення довжини будь-який випадок конкретного виконання опор стержня можна звести до основного: лише потрібно при обчисленні гнучкості замість дійсної довжини стержня ввести в розрахунок зведену довжину μl . Поняття про зведену довжину вперше було введено професором Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Ф. Ясинським.

Ясинський Фелікс Станіславович – (15.09.1856-18.11.1899). Інженер та вчений в галузі будівельної механіки та теорії пружності. Працював начальником технічного відділу Петербурзько-Московської залізниці, професором Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучень, а також викладав у інших інститутах. Один із засновників розрахунків на стійкість. Вказав на необхідність введення коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження. Його теорія суттєво вплинула на подальші розрахунки в галузі теорії стійкості.

Проте на практиці, , майже ніколи не зустрічаються в чистому вигляді ті закріплення кінців стержня, які зображено на наших розрахункових схемах (рис. 13.4,а,б,в,г). Замість кульових опор зазвичай застосовуються циліндричні шарніри. Подібні стержні слід рахувати шарнірно-спертими при вигині їх у площині, перпендикулярній до осі шарнірів, та при викривленні в площині цих осей кінці стержнів слід вважати жорстко защемленими (з урахуванням зауважень, наведених нижче для жорстко защемлених кінців).

У конструкціях дуже часто зустрічаються стиснуті стержні, кінці яких приклепані або приварені до інших елементів, часто ще з додаванням у місці прикріплення листів фасонів. Таке закріплення важко вважати жорстким защемленням, оскільки частини конструкції, до яких прикріплені ці стержні, самі можуть не бути абсолютно жорсткими.

13.4 Межі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень

Здавалося б, що одержані в попередніх параграфах результати розв'язують задачу перевірки стиснутого стержня на стійкість і залишається лише вибрати коефіцієнт запасу k_y . Проте це далеко не так. Найближче ж вивчення числових величин, отриманих за формулою Ейлера, показує, що вона дає правильні результати лише у певних межах.

У таблиці 13.1. наведено величини критичних напружень, обчислених при різних значеннях гнучкості для сталі 3, яка зазвичай використовується в металевих конструкціях.

Графічно залежність σ_k від λ , розраховану за формулою (13.12) зображено на рис.13.5. Цю залежності відповідає гіперболічна крива, так звана „гіпербола Ейлера”. При використанні цієї кривої треба враховувати, що формула (13.12) одержана за допомогою інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки, тобто в припущенні, що напруження в стержні у момент втрати стійкості не перевищують межі пропорційності.

Критичні напруження σ_k

Таблиця 13.1

Значення гнучкості $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Критичні напруження σ_k при $E=2 \cdot 10^5$ МПа
150	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(150)^2} = 87,7(\text{МПа})$
100	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(100)^2} = 200(\text{МПа})$
80	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(80)^2} = 330(\text{МПа})$
50	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(50)^2} = 800(\text{МПа})$

Отже, ми не можемо користуватися величинами критичних напружень, обчислених за формулою Ейлера, якщо вони виходять більшими ніж межа для даного матеріалу. Іншими словами, формула Ейлера може бути застосована лише при дотриманні умови:

$$\sigma_k \leq \sigma_n \quad \text{або} \quad \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2} \leq \sigma_n \cdot \quad (13.17)$$

Якщо з нерівності (13.17) виразити гнучкість λ , то умова можливості використання формули Ейлера одержить інший вигляд:

$$\lambda_n \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}. \quad (13.18)$$

Для сталі 3 межу пропорційності може бути прийнято рівною $\sigma_n = 200 \text{ МПа}$, тому, як видно з таблиці 13.1 і з формули (13.18), для стержнів з цього матеріалу можна користуватися формулою Ейлера лише при гнучкості

$$\lambda_n \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100,$$

тобто більшої, ніж 100.

Для сталі 5 при $\sigma_n = 300 \text{ МПа}$ формула Ейлера може бути застосована при гнучкості $\lambda \geq 85$; для чавуну — при $\lambda \geq 80$, для сосни — при $\lambda \geq 110$ і т.д. Якщо на рис.13.5 провести горизонтальну лінію з ординатою, яка дорівнює $\sigma_n = 200 \text{ МПа}$, то вона розітне гіперболу Ейлера на дві частини. Користуватися можна лише нижньою частиною графіка, яка характеризує поведінку порівняно тонких і довгих стержнів, що втрачають стійкість при напруженнях, не вищих за межу пропорційності.

Таким чином, треба знайти спосіб обчислення критичних напружень і для тих випадків, коли вони перевищують межу пропорційності матеріалів, наприклад, для стержнів з м'якої сталі при гнучкостях від 0 до 100.

Потрібно виділити стержні з малою гнучкістю (приблизно від 0 до 30—40) довжина у них є порівняно невеликою по відношенню до розмірів поперечного перетину. Наприклад, для стержня круглого перетину гнучкості 20 відповідає відношення довжини до діаметра, яке дорівнює 5. Для таких стержнів важко говорити про явище втрати стійкості прямолінійної форми всього стержня у цілому, в тому значенні, як відбувається з тонкими та довгими стержнями.

Здебільшого короткі стержні виходитимуть з ладу за рахунок того, що напруження стиску в них досягатимуть межі текучості σ_T (для пластичного матеріалу) або міцності σ_g (для крихкого матеріалу). Тому для коротких стержнів, до гнучкості приблизно 30 ÷ 40, критичні напруження будуть рівні, або трохи нижчі (за рахунок певного викривлення осі стержня, що все ж таки має місце), відповідно або σ_m (сталь), або σ_g (чавун, дерево).

Отже, маємо два граничні випадки роботи стиснутих стержнів: короткі стержні, які втрачають вантажопідйомність в основному за рахунок руйнування матеріалу від стиску, і довгі — які втрачають її в результаті порушення стійкості прямолінійної форми стержня. Кількісна зміна співвідношення довжини і поперечних розмірів стержня змінює і весь характер явища руйнування. Загальним залишається лише раптовість появи критичного стану, тобто раптового різкого зростання деформацій.

У стиснутих стержнях великої гнучкості, для яких може бути застосована формула Ейлера, після досягнення силою P критичного значення зазвичай спостерігається різке зростання деформацій. До цього моменту прогини, як правило, збільшуються із зростанням навантаження, але залишаються незначними.

Подібний характер має й залежність укорочень від напружень при стиску коротких стержнів. Має місце та ж раптовість зростання деформацій при певній величині напружень (коли $\sigma = \sigma_m$).

Залишається розглянути поведінку стиснутих стержнів при середніх величинах гнучкості. Наприклад для сталевих стержнів при гнучкостях від 40 до 100 – з подібними значеннями гнучкостей інженер найчастіше зустрічається на практиці.

Експериментальне визначення критичних сил для стиснутих стержнів проводилося неодноразово як у нас, так і за кордоном. Особливо значний дослідний матеріал зібрав проф. Ф. Ясинський, який склав таблицю критичних напружень залежно від гнучкості для цілого ряду матеріалів, що поклало початок сучасним методам розрахунку стиснутих стержнів на стійкість.

Він також запропонував для стержнів середньої і малої гнучкості емпіричну формулу, яка показує, що критичні напруження при таких гнучкостях змінюються за лінійним законом розподілу:

$$\sigma_k = a - b\lambda, \quad (13.19)$$

де a і b — коефіцієнти, залежні від матеріалу;

$\lambda = \frac{\mu l}{i}$ — гнучкість стержня.

Дані про коефіцієнти “а” і “б” для конструкційних матеріалів наводяться у довідниках.

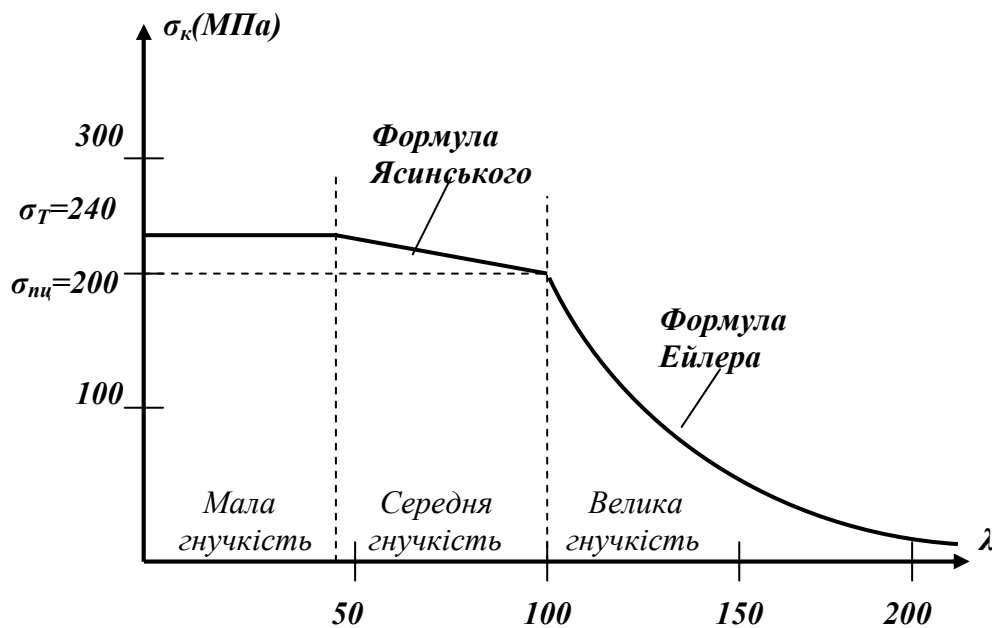


Рис.13.5. Вибір критичних напружень для стержнів різної гнучкості

На базі наведених даних можна побудувати повний графік критичних напружень (залежно від гнучкості) для будь-якого матеріалу. На рис.13.5 зображено такий графік для будівельної сталі з межею текучості $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ і межею пропорційності $\sigma_n = 200 \text{ МПа}$.

Графік складається з трьох частин: гіперболи Ейлера при $\lambda > 100$, похилої прямої при $40 \leq \lambda \leq 100$ і горизонтальної, або слабко похилої, прямої при $\lambda \leq 40$. Подібні графіки можна побудувати, комбінуючи формулу Ейлера з результатами експериментів, і для інших матеріалів.

13.5. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість

Раніше відзначалось, що для стиснутих стержнів слід провести дві перевірки – на міцність:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] \quad \text{де} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_0}{k_0};$$

та на стійкість:

$$\sigma = \frac{F}{A_{op}} \leq [\sigma_y] \quad \text{де} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y}.$$

Величину критичного напруження σ_k знайдено вище. Для встановлення напруження, яке допускається на стійкість, нам залишається обрати лише коефіцієнт запасу k . В інженерній практиці сталі цей коефіцієнт коливається для в межах від 1,8 до 3,0. Коефіцієнт запасу на стійкість обирається вищим за коефіцієнт запасу міцності k_0 , який дорівнює для сталі 1,5.

Для чавуну коефіцієнт запасу коливається від 5,0 до 5,5, для дерева — від 2,8 до 3,2.

Щоб установити зв'язок між напруженням на стійкість $[\sigma_y]$ і напруженням, яке допускається на міцність $[\sigma]$, розглянемо їх співвідношення:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_k k_0}{k_y \sigma_0} \quad \text{або} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y} [\sigma].$$

Позначаючи

$$\varphi = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y}, \quad (13.20)$$

одержимо:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma], \quad (13.21)$$

де φ — коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження для стиснутих стержнів.

Маючи графік залежності σ_k від λ для даного матеріалу, знаючи $\sigma_n = \sigma_m$ або $\sigma_n = \sigma_e$ і вибравши коефіцієнти запасу на міцність k_0 і на стійкість k_y , можна скласти таблиці значень коефіцієнта φ , як функції від гнучкості. Такі дані наводять в технічних умовах на проектування споруд; їх зведено в таблицю 13.2.

Користуючись цією таблицею, можна провести підбір перетину стиснутого стержня. Оскільки величина площі перетину залежить від $[\sigma_y]$, а це напруження у свою чергу через коефіцієнт φ пов'язане з гнучкістю стержня λ , тобто з формою і розмірами його перетину, то підбір доводиться здійснювати шляхом послідовних наближень.

**Залежність коефіцієнтів зменшення основного допустимого
напруження φ від матеріалу та гнучкості λ**

Таблиця 13.2

Гнучкість $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Значення φ для				
	Сталі марок 4, 3, 2, ОС	Сталі марки 5	Сталі СПК	Чавуну	Дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
80	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,18
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,23	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
300	0,19	0,16	0,13	—	0,08

13.6. Вибір типу перетину і матеріалу

13.6.1. Вибір типу перетину

Так як в опорі стержнів подовжньому згину (порушенню стійкості) основну роль відіграє його гнучкість, а отже, величина найменшого радіуса інерції перерізу, то дуже істотним є питання не тільки про *величину площі поперечного перерізу* стержня, як при розрахунку на міцність, але й про *форму поперечного перерізу*.

За умов рівності для всіх площин, які проходять через вісь стержня, зведеної довжини – μl , для найекономічнішого вирішення питання необхідно конструювати переріз, у якого при певній площі величина найменшого радіуса інерції була б можливо більшою. Для досягнення мети слід прагнути до того, щоб найменший радіус інерції дорівнював найбільшому, тобто щоб усі центральні моменти інерції перетину були рівними та еліпс інерції звернувся б у круг. Такий стержень чинитиме однаковий опір втраті стійкості в будь-якому напрямі.

Якщо зведена довжина стержня при можливому викривленні в обох головних площинах буде різною, то й головні моменти інерції теж доцільно вибрати різними з таким розрахунком, щоб коефіцієнти φ були в обох випадках однаковими.

Далі необхідно прагнути отримання при даній площі найбільших центральних моментів інерції. Для цього слід розмістити матеріал перетину по можливості далі від центра ваги. Обидві умови цілком задовільніть, наприклад, трубчастий переріз (рис.13.7,а), який дуже часто застосовують для стиснутих колон і стійок.

Нижня межа товщини стінок такого перетину визначається або можливістю конструктивного виконання відливання (чавун), або тим, щоб при роботі стержня не відбулося місцевих деформацій тонкої стінки — її викривлення.

Для запобігання таких місцевих пошкоджень, щоб забезпечити при роботі стержня збереження прийнятої форми перетину (кільце), всередині трубчастого стержня розташовують систему посилень. Наприклад, на деякій відстані одну від другої ставлять так звані діафрагми, які додають жорсткість тонкостінному профілю (Рис.13.7,б). Взагалі при правильному конструюванні стиснутих стержнів пристрій додаткових кріплень грає досить велику роль.

Деякі види перетинів, що чудово чинять опір вигину в одній площині, як це буває при роботі балок, виявляються дуже невідповідними при застосуванні їх для стиснутих стержнів; такими, наприклад, є двотавровий перетин, перетин з двох швелерів, стінки яких розташовані впритул одна до іншої (рис.13.7,в).

Невідповідність подібних перетинів при роботі на подовжній вигин зумовлена великою різницею у величинах їх головних моментів інерції. Щоб уникнути цього недоліку, можна розсунути обидві половинки перетину з двох швелерів для того, щоб примусити всі перетини працювати як одне ціле. Їх з'єднують за допомогою так званих сполучних ґрат (рис.13.8).

Необхідною умовою безпечної роботи таких складових стержнів є пристрій достатньо жорсткого кріплення (ґрати, планки), щоб змусити обидві половини працювати сумісно, як один цілий стержень, тільки в цьому випадку матимемо право вводити у розрахунок момент інерції відносно однієї осі. Якщо ж обидва великих швелери скріпляти дуже слабкими ґратами, то вони не зможуть примусити їх працювати спільно. Кожна половина стержня

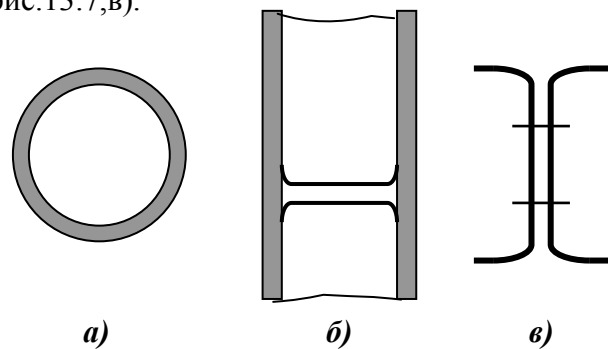


Рис.13.7. Форми перерізів, які вигідно (а,б) і невідповідно (в) застосовувати

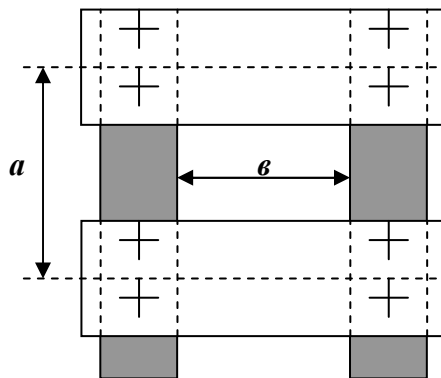


Рис. 13.8. Сполучені ґрати

працюватиме самостійно, її стійкість виявиться у багато разів меншою ніж стійкість стержня, в якому обидві половини є одним цілим.

При конструюванні складового стержня відстань b , на яку потрібно розсунути обидві його половини, визначається, тим, щоб моменти інерції щодо обох головних осей були приблизно рівними.

13.6.2. Вибір матеріалу

Вибір матеріалу для стиснутих стержнів обумовлений наступними міркуваннями. Поки критичні напруження не перевершують межі пропорційності матеріалу, єдиною механічною характеристикою, яка визначає здатність стержня зберігати стійкість, є модуль пружності E .

Тим часом для стержнів середньої та особливо малої гнучкості величина критичних напружень здебільшого залежить від межі текучості або межі міцності матеріалу. Цими обставинами і слід керуватися при виборі матеріалу для стиснутих стержнів великої та малої гнучкості.

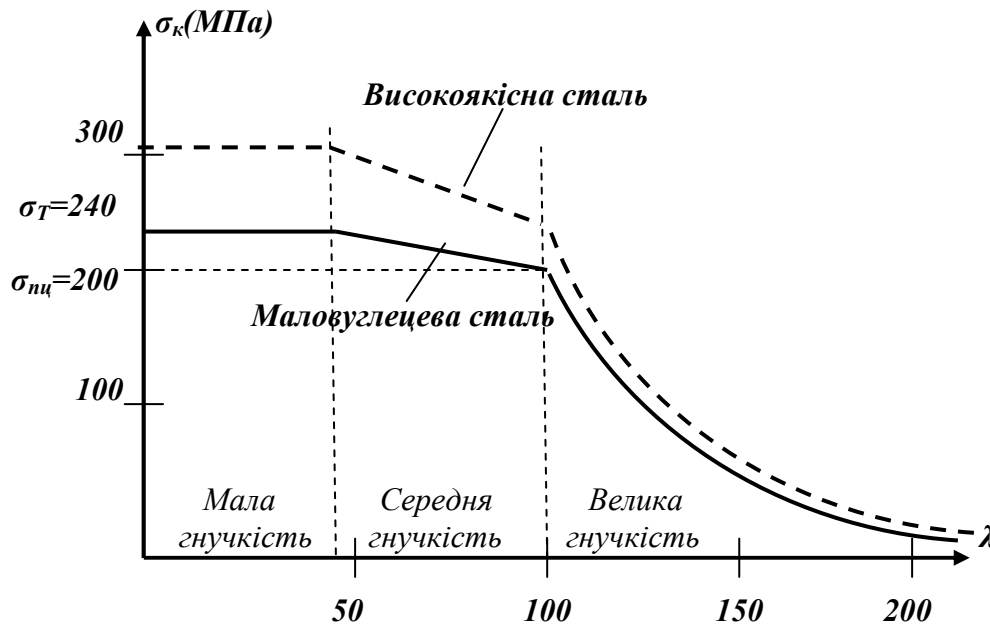


Рис.13.9. Критерії вибору матеріалу для стержнів різної гнучкості

Застосування спеціальних сортів сталі підвищеної міцності для тонких і довгих стиснутих стержнів не має значення, оскільки модуль E для всіх сортів сталі приблизно однаковий.

Навпаки, застосування високоякісних сталей виявиться дуже вдалим для стержнів з критичними напруженнями, які перевищують межу пропорційності, бо для таких стержнів підвищення межі текучості викличе зростання критичних напружень, а отже, підвищить опір втраченню стійкості. На рис.13.9 зображено наближене розташування графіків залежності σ_k від гнучкості для маловуглецевої сталі й сталі підвищеної якості з межею текучості $\sigma_m = 300 \text{ МПа}$.

З графіків видно, що критичні, а отже, й допустимі напруження для обох сортів сталі будуть однаковими для стержнів із гнучкістю $\lambda > 100$. І, навпаки, вони істотно відрізняться для стержнів з меншими гнучкостями.

ДИНАМІКА

14. Врахування сил інерції та коливань

14.1. Вступ

Дотепер ми розв'язували основну задачу опору матеріалів, визначали розміри поперечних перерізів частин конструкції та вибирали для них матеріал лише при *статичній* дії навантажень.

Постійності руху характерне те, що швидкість даних деталей і кожної їх частини не змінюється — відсутнє прискорення частинок цих елементів. Наявність прискорення частинок даного тіла або сумісних із ним деталей характеризує вже дію *динамічного навантаження*.

Статичною буде дія вантажу, що піднімають на канат при постійній швидкості його підйому. Але ця дія вже буде динамічною, якщо вантаж піднімають із прискоренням. Під дією динамічного навантаження знаходяться, наприклад, шатуни парових машин і двигунів внутрішнього згорання, оскільки їх окремі елементи рухаються зі змінною швидкістю. Також можна вказати на фундамент і шток парового молота, оскільки бойок молота при куванні втрачає свою швидкість за дуже короткий період часу, що пов'язано з наданням йому вельми великих прискорень від'ємного знака.

Вже з цих прикладів видно, що на практиці ми можемо зустрічатися з різними видами прискорення даної деталі або дотичних з нею тіл, воно може бути постійним за величиною і напрямком або тільки за напрямком, може бути знакозмінним.

При *змінних і знакозмінних напруженнях* ми зустрічаємося з явищем руйнування від *тріщини, що поступово розвивається*, — з явищем *втоми*. При різкій зміні швидкості руху елемента конструкції, коли, наприклад, відбувається явище удару, може виявитися *крихкість* у таких матеріалах, які при статичній дії навантажень вважалися пластичними.

Вплив прискорень точок деталей конструкції на напружений стан матеріалу може бути врахований таким чином. Якщо якесь тіло рухається з прискоренням, то це значить, що на нього передаються (до нього прикладені) сили від інших тіл. За законом рівності дії і протидії воно передає на ці тіла реакції, дорівнюють прикладеним силам і протилежно спрямовані, так звані *сили інерції*. Це міркування може бути застосовано також і до кожного елемента тіла, що рухається з прискоренням. Він передаватиме на прилеглі частини матеріалу зусилля, які дорівнюють силі інерції цього елемента.

При прискореному русі частин конструкції в них виникають додаткові цілком реальні напруження, які еквівалентні статичним напруженням, викликаним силами інерції. Від кожного елемента стержня на сусідні частини матеріалу передаватимуться напруження, такі нібито до нього була прикладена відповідна сила інерції.

Звідси одержуємо практичне правило для визначення напружень у частині конструкції, точки якої мають прискорення. Потрібно обчислити ці прискорення і на додаток до зовнішніх сил, що діють на даний елемент конструкції, навантажити його відповідними силами інерції. Далі слід вести розрахунок так, як ніби на об'єкт, який досліджується, діє статичне навантаження.

Потрібно розрізнити різні випадки:

- якщо величина і розташування зовнішніх сил, прикладених до даного елемента не залежать від його деформацій, і вони не змінюють характеру руху стержня, то прискорення його точок обчислюються за правилами кінематики твердого тіла, й облік динамічних дій зводиться до додаткового статичного навантаження відповідними силами інерції;

- якщо при цьому прискорення змінюватиметься, то, як правило, виникнуть коливання даної частини конструкції, які можуть в окремих випадках призвести до резонансу, що пов'язано з різким збільшенням деформацій і напружень;
- можуть бути випадки (удар), коли величина прискорень, а значить, і відповідних сил інерції залежатиме від деформації даних елементів. У такому випадку при обчисленні сил інерції доводиться використовувати і дані опору матеріалів та матеріалознавства.

14.2. Обчислення напружень при рівноприскореному русі

Розв'язання задачі про перевірку міцності при динамічних напруженнях ми розпочнемо з найпростішого випадку, коли точки даної частини конструкції мають постійне прискорення, яке не викликає коливань. Розглянемо, наприклад, рівноприскорений підйом вантажу Q , підвішеного на сталевому тросі площею поперечного перерізу A , питома вага матеріалу троса дорівнює γ ; вантаж підіймається з прискоренням a (рис.14.1). Знайдемо напруження в будь-якому довільному перерізі на відстані x від нижнього кінця троса.

У стані спокою, в статичній постановці задачі, нормальна сила в перерізі

$$N_{CT}(x) = Q + \gamma Ax, \text{ і напруження } \sigma_{CT}(x) = \frac{N_{CT}(x)}{A} = \frac{Q + \gamma Ax}{A}.$$

Коли ж вантаж рухається з прискоренням a , виникає ще й сила інерції, яка дорівнює добутку маси відрізаної частини на прискорення a , тобто:

$$F_{in} = \frac{Q + \gamma Ax}{g} a,$$

де g - прискорення сили тяжіння.

Тоді в перерізі діятиме динамічна сила

$$N_{\delta}(x) = N_{CT}(x) + F_{in} = (Q + \gamma Ax) + \frac{Q + \gamma Ax}{g} a = (Q + \gamma Ax) \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Переходячи до напружень, матимемо:

$$\sigma_{\delta} = \frac{Q + \gamma Ax}{A} + \frac{Q + \gamma Ax}{gA} a = \frac{Q + \gamma Ax}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right),$$

де дріб $\frac{Q + \gamma Ax}{A}$ — є статичним напруженням σ_c в проведеному перерізі, тому

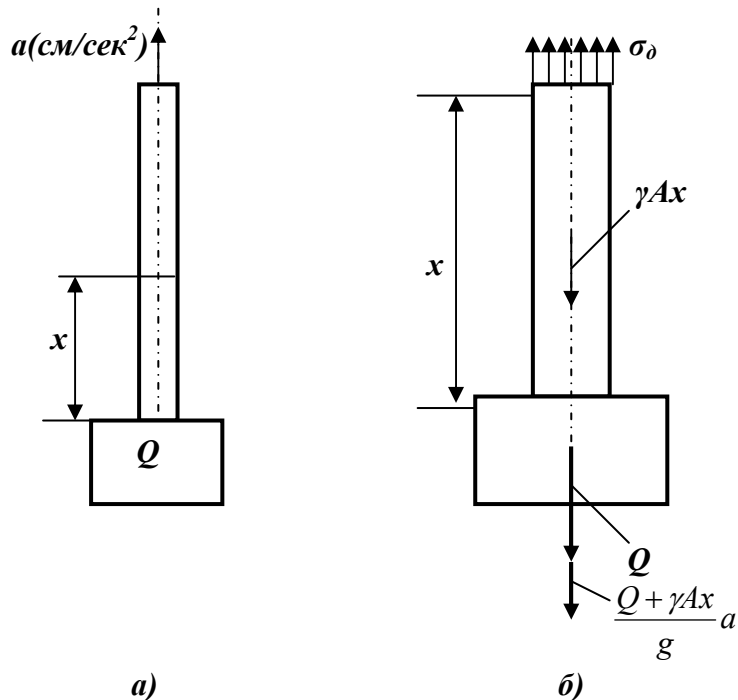
$$\sigma_{\delta} = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g}\right), \quad (14.1)$$

динамічне напруження дорівнює статичному, помноженому на коефіцієнт $\left(1 + \frac{a}{g}\right)$. Цей

коефіцієнт називають *динамічним коефіцієнтом* $K_{\delta} = \left(1 + \frac{a}{g}\right)$.

$$\boxed{\sigma_{\delta} = K_{\delta} \sigma_c} \quad (14.2)$$

Такий вигляд формули для динамічних напружень пояснює, чому ми, головним чином, надавали увагу обчисленню напружень при статичній дії навантаження, адже в дуже багатьох випадках динамічні напруження можуть бути виражені через статичні, шляхом множення на відповідний динамічний коефіцієнт.



**Рис. 14.1. а) стержень, що рухається з прискоренням;
б) сили та напруження при рівноприскореному русі.**

Умова міцності набуде вигляду:

$$\sigma_{\delta \max} = \sigma_{c \max} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = K_{\delta} \sigma_c \leq [\sigma].$$

Звідси

$$\sigma_{c \max} \leq \frac{[\sigma]}{1 + \frac{a}{g}} = \frac{[\sigma]}{K_{\delta}}. \quad (14.3)$$

У ряді випадків динамічний розрахунок можна замінити статичним, знизивши тільки величину допустимого напруження, на динамічний коефіцієнт K_{δ} .

Так діють у тих випадках, коли при розрахунку виявляється важким теоретичне визначення динамічного коефіцієнта, і доводиться користуватися його значеннями, які одержані з експериментів. Аналогічно, наприклад, враховується динамічність тимчасового навантаження, що діє на мости.

14.3. Обчислення напружень при коливаннях

14.3.1. Власні коливання

Пружна система, виведена будь-яким шляхом із рівноваги, переходить у коливальний рух. Коливання відбуваються біля положення пружної рівноваги, при якій у навантаженій системі мали місце статичні деформації δ_c і відповідні їм статичні напруження p_c (σ_c або τ_c — в залежності від виду деформації). При коливаннях до статичних деформацій додаються динамічні, які залежать від виду коливального руху й від величини розмаху (амплітуди) коливання. У зв'язку з цим змінюються і напруження

p_c . Отже, при розрахунку системи, що коливається, на міцність необхідно вміти обчислювати динамічні добавки до статичних деформацій і відповідних їм напружень.

Розглянемо пружну систему. Це може бути, наприклад, розтягнута або стиснута незначної ваги пружина з вантажем на кінці, який робить поздовжні коливання або невеликої (порівняно з вантажем Q) власної ваги балка, зображена на рис 14.2, що коливається в напрямі, перпендикулярному до її осі і т.п.

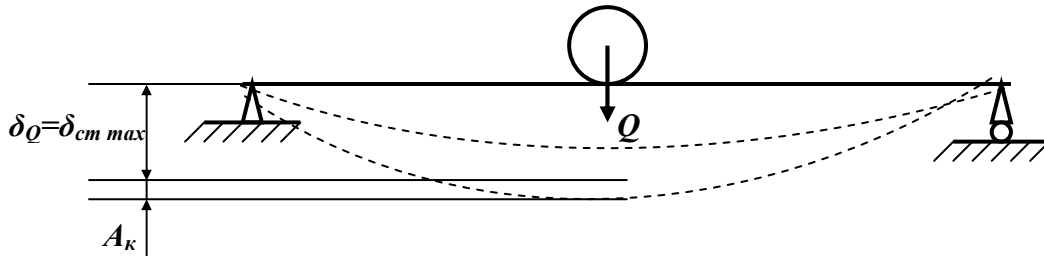


Рис. 14.2. Переміщення в пружній системі при коливаннях

При коливаннях систем з одним ступенем свободи повні деформації системи в будь-якому перерізі можна знайти шляхом складання статичної деформації з додатковою деформацією при коливаннях. Для перевірки міцності системи, очевидно, необхідно знайти найнебезпечніше січення з найбільшою в процесі коливань сумарною величиною деформації. У найпростіших випадках для цього буде потрібно скласти найбільшу статичну деформацію $\delta_{c \max}$ з найбільшою амплітудою коливань A_k , тобто:

$$\delta_\delta = \delta_{c \max} + A_k = \delta_{c \max} \left(1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} \right) = K_\delta \delta_{c \max}. \quad (14.4)$$

Поки система деформується в межах пружності, напруження пропорційні деформаціям. Тому

$$p_\delta = p_c \left(1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} \right) = K_\delta p_c, \quad (14.5)$$

де

$$K_\delta = 1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} \quad (14.6)$$

— коефіцієнт динамічності при коливаннях. Умова міцності в цьому випадку повинна мати такий вигляд:

$$p_\delta = K_\delta p_c \leq [p]. \quad (14.7)$$

Диференціальне рівняння руху вантажу Q , що коливається, у разі вільних коливань можна подати у вигляді рівняння рівноваги, в якому окрім зовнішньої сили (вага вантажу Q) і сили пружного опору системи враховується також і сила інерції:

$$\frac{Q}{g} x'' + P - Q = \frac{Q}{g} x'' + P_1 = \frac{Q}{g} x'' + cx = 0, \quad (14.8)$$

де x — координата, яка повністю визначає положення вантажу Q під час коливань; P — повний пружний опір системи при коливаннях; $P - Q = P_1$ — додаткове пружне зусилля, яке виникає у системі в результаті переміщення точки додатка вантажу Q на відстань x при коливаннях, яке в межах пружності можна вважати пропорційним координаті x ($P_1 = cx$); c — коефіцієнт пропорційності, що є зусиллям, необхідним для

того, щоб викликати статичну деформацію системи у напрямі дії вантажу Q , яка дорівнює одиниці. Якщо статична деформація від вантажу Q дорівнює δ_Q , то

$$c = \frac{Q}{\delta_Q}.$$

Розв'язок рівняння (14.8) призводить до таких формул для обчислення частоти власних коливань ω_0 і періоду вільних коливань — t_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gc}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_Q}}; \quad (14.9)$$

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_Q}{g}}. \quad (14.10)$$

Так, наприклад, якщо вантаж Q розтягує призматичний стержень

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}},$$

при вигині балки на двох шарнірних опорах вантажем Q посередині прольоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f_{\max}}} = \sqrt{\frac{48EJg}{Ql^3}}.$$

і т.д.

14.4.2. Коливання за наявності збурюючої сили

Якщо на пружну систему, окрім вантажу Q і сили пружного опору системи P , у тому ж напрямі діє періодично змінна збурююча сила S і сила опору середовища R , то диференціальне рівняння руху вантажу Q при коливаннях також можна записати у вигляді рівняння рівноваги, подібного рівнянню (14.8):

$$\frac{Q}{g}x'' + P - Q - S + R = \frac{Q}{g}x'' + P_1 - S + R = \frac{Q}{g}x'' + cx - S + R = 0. \quad (14.11)$$

Силу опору середовища R на практиці у багатьох випадках можна вважати пропорційною першому ступеню швидкості коливального руху, $R = rx'$. Збурююча сила S змінюється за синусоїдальним законом

$$S = H \sin \omega t$$

де $H = S_{\max}$; а ω — частота збурюючої сили, то рівняння (14.11) можна переписати так:

$$\frac{Q}{g}x'' + rx' + cx = H \sin \omega t, \quad (14.12)$$

де $n = \frac{rg}{2Q}$ — так званий коефіцієнт згасання коливань, а ω_0 — знайдена вище частота вільних коливань системи, що виникають як за відсутності збурюючої сили S , так і сили опору R .

Розв'язок рівняння (14.12) призводить до такого виразу для амплітуди A_k вимушених коливань за наявності сил опору:

$$A_k = \frac{H}{\frac{Q}{g} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4n^2 \omega^2}} = \frac{gH}{Q\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (14.13)$$

$$\text{де } \frac{gH}{Q\omega_0^2} = \frac{gH}{Q} \cdot \frac{\delta_Q}{g} = \frac{H}{Q} \delta_Q = \delta_H$$

— статична деформація системи від найбільшої величини збудуючої сили $S(S_{\max} = H)$.

Відношення амплітуди вимушених коливань A_k до величини деформації δ_H називають *коефіцієнтом наростання коливань* β :

$$\beta = \frac{A_k}{\delta_H} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (14.14)$$

Таким чином, формула (14.6) для динамічного коефіцієнта K_δ матиме такий вигляд:

$$K_\delta = 1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_Q} \beta. \quad (14.15)$$

У цьому виразі не врахована амплітуда власних коливань системи, яка може мати певне істотне значення лише на початку процесу коливань, за наявності сил опору вона досить швидко зменшується з часом.

На рис.14.3 наведено графіки зміни коефіцієнта наростання коливань β , залежно від величини відношення $\frac{\omega}{\omega_0}$, при різних значеннях коефіцієнта загасання коливань n

(відношення $\frac{n}{\omega_0}$). Якщо частота зміни збудуючої сили близька до частоти вільних

коливань системи, тобто $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$, і величина коефіцієнта згасання коливань порівняно

невелика, то знаменники формул (14.8) і (14.14) для A_k і β будуть дуже малими, амплітуда коливань і їх коефіцієнт наростання будуть дуже великими (рис.14.5). У цьому випадку навіть мала збудуюча сила може викликати високі напруження (явище резонансу).

Зі збільшенням сил опору явище резонансу стає все менш помітним. Відзначимо, проте, що сили опору значно зменшують величину амплітуди вимушених коливань тільки

поблизу від резонансних частот $\left(0,75 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1,25\right)$, при інших величинах відношення

$\frac{\omega}{\omega_0}$ — вплив сил опору незначний.

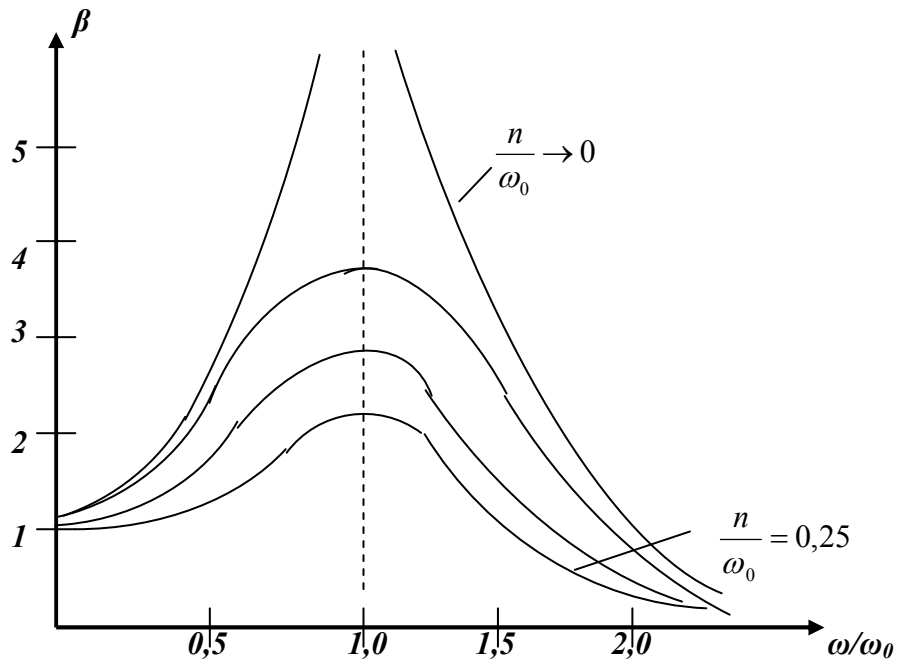


Рис.14.3. Розподіл коефіцієнтів наростання коливань β залежно від співвідношення ω/ω_0

З формул (14.13), (14.14) і (14.15) і рис.14.5 видно – якщо частота ω зміни збудуючої сили S дуже мала, то амплітуда коливань наближається до величини δ_H , коефіцієнт наростання коливань прямує до одиниці і найбільші напруження в системі можна обчислити як статичні напруження від вантажу Q і найбільшого значення збудуючої сили $S(S_{\max} = H)$. При дуже великій частоті зміни збудуючої сили S амплітуда коливань і коефіцієнт наростання коливань прямують до нуля, вантаж Q можна розглядати як нерухомий, тому найбільше напруження в системі дорівнює статичному напруженню від вантажу Q .

Ця обставина має дуже велике практичне значення, вона використовується при конструюванні різного роду погашувачів коливань, сейсмографів, вібрографів та ін. У машинобудуванні амортизатори, які оберігають основи машин від зусиль, що виникають при коливаннях, підбираються так, щоб частота власних коливань машини на амортизаторах була *значно меншою* від частоти зміни збудуючої сили.

15. Напруження при ударі

15.1. Основні положення

Явище удару спостерігається тоді, коли швидкість даної частини конструкції або частин, що до неї дотикаються, змінюється в дуже короткий період часу.

При забиванні палі, вантаж падає з деякої висоти на верхній торець палі і занурює її в ґрунт, баба зупиняється майже миттєво, виконуючи удар. Аналогічні явища відбуваються при куванні, удар сприймають і виріб, який кується і шток молота з бойком, оскільки останній дуже швидко зупиняється при зіткненні з виробом. Під час удару між обома деталями, що співударяються, виникає великий взаємний тиск. Швидкість ударяючого тіла за дуже короткий проміжок часу змінюється і в окремому випадку падає до нуля, тіло зупиняється. Значить, на нього від деталі, яка ударяється, передаються великі прискорення, спрямовані у бік, зворотній його руху, тобто передається реакція R_0 , яка дорівнює добутку маси вдаряючого тіла на це прискорення.

Позначаючи це прискорення через a , можна написати, що реакція $F_0 = \frac{Q}{g} a$, де Q

вага вдаряючого тіла. За законом рівності дії та протидії на частину конструкції, яка ударяється, передається така ж сила, але спрямована в протилежний бік (рис.15.1). Ці сили й викликають напруження в обох тілах.

Таким чином, у частині конструкції, яка ударяється, виникають такі напруження, неначе до неї було прикладено силу інерції ударяючого тіла. Можемо обчислити ці напруження, розглядаючи силу інерції F_0 як статичне навантаження нашої конструкції. Ускладнення полягає в обчисленні цієї сили. Тривалості удару, тобто величини того проміжку часу, в перебігу якого відбувається падіння швидкості до нуля, ми не знаємо. Тому залишається невідомою величина прискорення a , а отже, і сили F_0 . Хоча обчислення напружень при ударі є частковим випадком задачі обліку сил інерції, проте для обчислення сили F_0 та пов'язаних з нею напружень і деформацій доводиться застосовувати інший метод і користуватися законом збереження енергії.

При ударі відбувається дуже швидко перетворення одного виду енергії в іншій:

кінетична енергія ударяючого тіла перетворюється в потенціальну енергію деформації. Виражаючи цю енергію в функції сили F_0 або напружень, чи деформацій, дістаємо можливість обчислити ці величини.

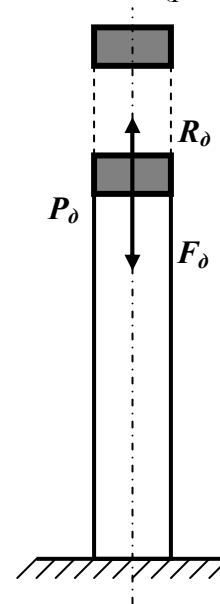


Рис.15.1. Сили в перерізі, що виникають при ударі

15.2. Загальний метод обчислення напружень при ударі

Нехай дуже жорстке тіло A вагою Q , деформацією якого можна нехтувати, падаючи з деякої висоти H , ударяє по іншому тілу B , що спирається на пружну систему C (рис.15.2). В окремому випадку це може бути падіння вантажу на кінець призматичного стержня, інший кінець якого закріплений (поздовжній удар), падіння вантажу на балку, що лежить на опорах (згинаючий удар) і т.п.

Протягом дуже короткого проміжку часу пружна система C отримає деяку деформацію. Позначимо через δ_δ переміщення тіла B (місцевою деформацією якого нехтуватимемо) у напрямі удару. В згаданих окремих випадках при поздовжньому ударі за переміщення δ_δ , відповідно, слід оцінювати поздовжню деформацію стержня Δl_δ , при згинаючому ударі — прогин балки f_δ в перерізі, що ударяється і т.п. У результаті удару в системі C виникнуть напруження p_δ (σ_δ або τ_δ — залежно від виду деформації).

Вважаючи, що кінетична енергія T ударяючого тіла повністю переходить у потенціальну енергію U_δ деформації пружної системи, можемо записати:

$$T = U_\delta . \quad (15.1)$$

Оскільки до моменту закінчення деформації ударяюче тіло пройде шлях $H + \delta_\delta$, то його запас енергії вимірюватиметься проведеною їм роботою A_δ і буде дорівнювати:

$$T = A_\delta = Q(H + \delta_\delta). \quad (15.2)$$

Тепер обчислимо U_δ . При статичній деформації потенціальна енергія U_c чисельно дорівнює половині добутку діючої сили на відповідну деформацію

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c . \quad (15.3)$$

Статична деформація δ_c у тілі, що ударяється, може бути обчислена за законом Гука, який в загальному вигляді можна записати так:

$$\delta_c = Q : c \quad \text{або} \quad Q = c \delta_c ,$$

де c — деякий коефіцієнт пропорційності (іноді його називають *жорсткістю системи*), він залежить від властивостей матеріалу, форми і розмірів тіла, виду деформації та положення перерізу, що ударяється. Так, при простому розтягу або стиску $\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EA}$

і $c = \frac{EA}{l}$, при згині балки, шарнірно закріпленої по кінцях, зосередженою силою Q

посередині прольоту $\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{48EJ}$ і $c = \frac{48EJ}{l^3}$.

Формулу (15.3) можна переписати так:

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c = \frac{c}{2} \delta_c^2 .$$

В основу цієї формули встановлено дві передумови:

а) справедливості закону Гука ;

б) поступове — від нуля до остаточного значення, зростання сили Q , напружень p_c і пропорційних їм деформацій δ_c .

Досліди з визначенням модуля пружності за спостереженнями над пружними коливаннями стержнів показують, що й при динамічній дії навантажень закон Гука продовжує діяти, модуль пружності зберігає свою величину. Що стосується характеру наростання напружень і деформацій, то й при ударі деформація відбувається, швидко, але не миттєво, δ_δ поступово зростає протягом короткого проміжку часу від нуля до кінцевого значення, паралельно зростанню деформацій зростають і напруження p_δ .

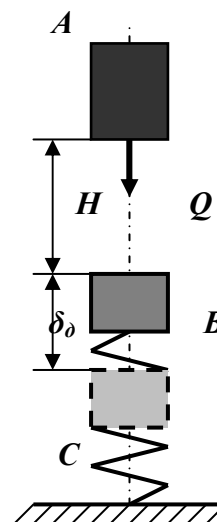


Рис.15.2. Переміщення при ударі.

Реакція системи C на дію вантажу Q (назвемо її R_δ), є наслідком розвитку деформації δ_δ , вона зростає пропорційно δ_δ від нуля до кінцевої, максимальної величини, якщо напруження p_δ не перевершують межі пропорційності матеріалу, пов'язана з нею законом Гука:

$$\delta_\delta = R_\delta : c ,$$

де c — раніше згаданий коефіцієнт пропорційності, який зберігає своє значення і при ударі.

Отже, обидві передумови для правильності формули (15.3) приймаються і при ударі. Тому можна вважати, що вид формули для U_δ при ударі буде тією ж самою, що й при статичному навантаженні системи силою інерції P_δ , тобто

$$U_\delta \frac{1}{2} R_\delta \delta_\delta = \frac{c}{2} \delta_\delta^2 = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_\delta^2 . \quad (15.4)$$

Тут враховано, що так само, як і в статичі $c = Q : \delta_c$. Підставляючи значення T і U_δ в рівняння (15.1), одержуємо:

$$Q(H + \delta_\delta) = \frac{Q}{2} \delta_\delta^2 \quad (15.5)$$

або

$$\delta_\delta^2 - 2\delta_c \delta_\delta - 2H\delta_c = 0 . \quad (15.6)$$

Звідси

$$\delta_\delta = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}$$

або, утримуючи перед радикалом для визначення найбільшої величини деформації системи у напрямі удару знак плюс, одержуємо:

$$\delta_\delta = \delta_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_\delta \delta_c . \quad (15.7)$$

Оскільки напруження і зусилля за законом Гука пропорційні деформації, то

$$p_\delta = p_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_\delta p_c \quad (15.8)$$

і

$$P_\delta = Q \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_\delta Q . \quad (15.9)$$

З цих формул видно, що величина динамічних деформацій, напружень і зусиль залежать від величини статичної деформації, тобто від жорсткості і поздовжніх розмірів тіла, що ударяється. Далі це додатково буде показано на окремих прикладах. Величина

$$\boxed{K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}} \quad (15.10)$$

у даному випадку є динамічним коефіцієнтом. Замінюючи у формулі (15.10) H на $\frac{v^2}{2g}$, де v — швидкість ударяючого тіла в початковий момент удару, одержуємо:

$$\boxed{K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_c}}} . \quad (15.11)$$

Крім того, оскільки

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_0}{U_c},$$

де $T_0 = QH$ — енергія ударяючого тіла до моменту початку удару, то й вираз для динамічного коефіцієнта можна зобразити ще й у такому вигляді:

$$K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}} \quad (15.12)$$

Якщо у формулах (15.7) і (15.8) покласти $H = 0$, тобто просто раптово прикладений вантаж Q , то $\delta_\delta = 2\delta_c$ і $p_\delta = 2p_c$ — при раптовому додатку сили Q деформації та напруження удвічі більше, ніж при статичній дії тієї ж сили.

Навпаки, якщо висота падіння вантажу H (або швидкість v) велика в порівнянні з деформацією δ_c , то в підкорінному виразі формул (15.7) — (15.11) можна нехтувати

одиноцею порівняно з величиною відношення $\frac{2H}{\delta_c}$. Тоді для δ_δ і p_δ виходять вирази:

$$\delta_\delta = \delta_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \right) \quad \text{і} \quad p_\delta = p_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \right) \quad (15.13)$$

При дуже великій величині відношення $\frac{2H}{\delta_c}$ можна нехтувати і одиноцею, що стоїть перед коренем, тобто написати:

$$\delta_\delta = \delta_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \quad \text{і} \quad p_\delta = p_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \quad (15.14)$$

Динамічний коефіцієнт в цьому випадку визначається за формулою:

$$K_\delta = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} \quad (15.15)$$

Необхідно відзначити, що тоді як нехтування одиноцею в підкоріневому виразі допустимо вже при $\frac{2H}{\delta_c} \geq 10$ (похибка наближених формул буде не більшою від 5%), то

нехтування ж одиноцею, що стоїть перед коренем, допустима лише при дуже великій величині відношення $\frac{2H}{\delta_c}$. Так, наприклад, для того, щоб наближені формули (15.14) і

(15.15) давали похибку не більше 10%, відношення $\frac{2H}{\delta_c}$ повинно бути більшим від 110.

Узагальнюючи сказане раніше, можна намітити наступний загальний метод розв'язання задач по визначенню напружень при ударі. Застосовуючи закон збереження енергії, треба:

- обчислити кінетичну енергію ударяючого тіла T ;
- обчислити потенціальну енергію U_δ тіл, які сприймають удар, під навантаженням їх силами інерції при ударі. Потенціальну енергію слід виразити через напруження ($\sigma_\delta, \tau_\delta$) в будь-якому перерізі, через деформацію (видовження, прогин) або силу інерції F_δ ударяючого тіла;

- прирівняти величини U_δ і T , з одержаного рівняння знайти безпосередньо динамічні напруження, або деформацію, а по ній, використовуючи закон Гука, напруження чи силу F_δ і відповідні їй динамічні напруження та деформації.

Описаний загальний прийом розрахунку на удар припускає, що вся кінетична енергія ударяючого тіла цілком переходить у потенціальну енергію деформації пружної системи. Це припущення не є точним. Кінетична енергія падаючого вантажу частково перетворюється на теплову енергію й енергію непружної деформації основи, на яку спирається система.

15.3. Окремі випадки обчислення напружень і перевірки міцності при ударі

15.3.1. Випадок поздовжнього удару

Вигляд формул, виведених раніше, показує, які великі якісні відмінності обумовлює кількісна зміна часу дії сили на тіло.

Розглянемо деякі випадки удару при найпростіших деформаціях. При цьому для знаходження коефіцієнта динамічності застосуємо основні формули (15.10) і (15.12).

Для визначення δ_δ , p_δ і P_δ використовуємо залежності:

$$\delta_\delta = K_\delta \delta_c, \quad p_\delta = K_\delta p_c, \quad P_\delta = K_\delta Q.$$

У разі поздовжнього розтягуючого або стискаючого удару (рис.15.3)

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EA}, \quad p_c = \sigma_c = \frac{Q}{A},$$

$$U_c = \frac{Q^2 l}{2EA} = \frac{\sigma_c^2 Al}{2E} = \frac{\Delta l_c^2 EA}{2l}.$$

Для обчислення динамічного коефіцієнта K_δ можна обрати один з таких виразів:

$$K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EA}{Q^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_c^2 Al}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_c^2 EA}}. \quad (15.16)$$

Далі без ускладнень обчислюються Δl_δ , σ_δ і P_δ .

Наближена формула для обчислення коефіцієнтів динамічності та напружень у цьому випадку одержує такий вигляд:

$$K_\delta = \frac{1}{\sigma_c} \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{Al}} \quad \text{і} \quad \sigma_\delta = \sigma_c K_\delta \sqrt{\frac{2T_0 E}{Al}} \quad (15.17)$$

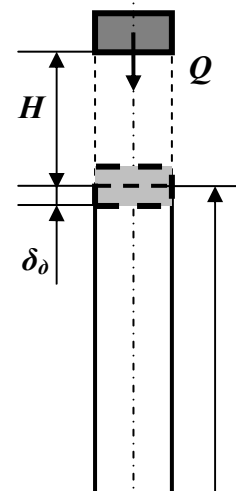
Зауважимо, якщо при статичному навантаженні напруження залежать від величини стискаючої сили та площі поперечного перерізу, то при динамічному навантаженні в стиснутому стержні – від величини стискаючої сили і від об'єму стержня.

Знайшовши за формулами (15.8) і (15.16) або (15.17) величину динамічного напруження, можемо написати умову міцності у вигляді

$$\sigma_\delta \leq [\sigma_\delta], \quad (15.18)$$

де $[\sigma_\delta]$ —допустима величина нормальних напружень при ударі, яка для пластичного матеріалу дорівнює $[\sigma_\delta] = \frac{\sigma_m}{k_\delta}$.

Величину коефіцієнта



та запасу k_δ можна б було вибрати рівній величині основного коефіцієнта запасу k_0 , при статичній дії навантажень, оскільки динамічність навантаження вже відображена у формулах (15.16) і (15.17), проте, зважаючи на деяке спрощення висловленого методу розрахунку, цей коефіцієнт приймають дещо підвищеним — до 2. Крім того, зазвичай, у цих випадках застосовують матеріал вищої якості (стосовно однорідності і пластичних властивостей).

l

Рис.15.3. Поздовжній удар

15.3.2. Згинаючий удар

При згині величина статичної деформації δ_c , балки f_c , що є статичним прогином, у місці удару, залежить від схеми навантаження та умов закріплення балки.

Так, наприклад, для балки з прольотом l , шарнірно закріпленої по кінцях, що отримує посередині прольоту удар від падаючого з висоти H вантажу Q (рис.15.4,а) одержуємо:

$$\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{48EJ},$$

$$p_c = \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W},$$

$$U_c = \frac{Qf_{c \max}}{2} = \frac{Q^2l^3}{96EJ}.$$

Для консолі, що отримує удар від вантажу Q , що падає на вільний кінець консолі (рис.15.4,б) —

$$\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{3EJ},$$

$$p_c = \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{W}$$

$$U_c = \frac{Qf_{c \max}}{2} = \frac{Q^2l^3}{6EJ}$$

Підставляючи у формулу для коефіцієнта динамічності K_δ значення $\delta_c = f_{c \max}$ або U_c ,

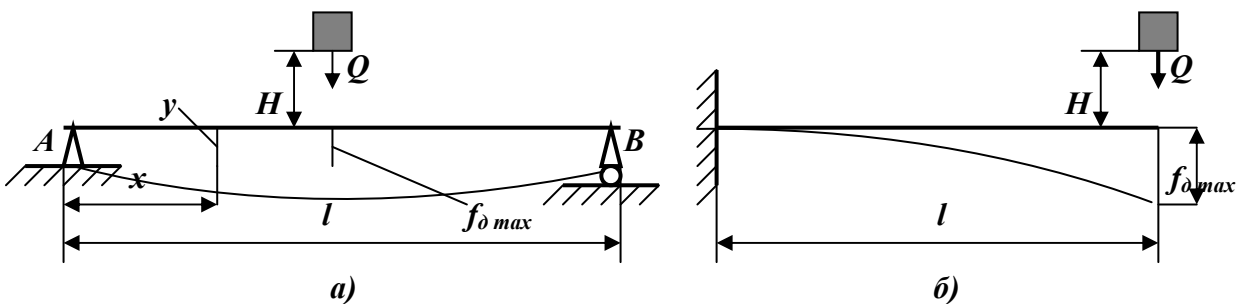


Рис.15.4. Удар при згині: а) на двоопорній балці; б) на консолі

знаходимо K_δ , а потім величину динамічних напружень і деформацій. Наприклад, у разі балки на двох опорах при обчисленні динамічного напруження $\sigma_{\delta \max}$, маємо таку формулу:

$$\sigma_{\partial \max} = K_{\partial} \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right]. \quad (15.19)$$

Умову міцності (15.18) у цьому випадку можна записати так:

$$\sigma_{\partial \max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right] \leq [\sigma_{\partial}] = \frac{\sigma_m}{k_{\partial}}. \quad (15.20)$$

Наближені формули для обчислення f_{∂} і σ_{∂} у разі удару по балці на двох опорах (рис.15.4,а) отримують такий вигляд:

$$f_{\partial \max} = K_{\partial} f_{c \max} = f_{c \max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \frac{Ql^3}{48EJ} \sqrt{\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{T_0 l^3}{24EJ}}, \quad (15.21)$$

$$\sigma_{\partial \max} = K_{\partial} \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W} \sqrt{\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{6T_0 EJ}{W^2 l}}. \quad (15.22)$$

Аналогічні вирази для $f_{\partial \max}$ і $\sigma_{\partial \max}$ виходять і у випадку удару по консолі (рис.15.4,б). Маючи на увазі, що

$$J = i^2 F, W = \frac{J}{z_{\max}}$$

і

$$\frac{J}{W^2} = \left(\frac{z_{\max}}{i} \right)^2 \frac{1}{A},$$

можемо записати формулу (15.22) і в такому вигляді;

$$\sigma_{\partial \max} = \frac{z_{\max}}{i} \sqrt{\frac{6T_0 E}{Al}}. \quad (15.23)$$

З наближеної формули (15.23) видно, що динамічні напруження при згині балки залежать від модуля пружності матеріалу, об'єму балки, форми її поперечного перерізу (відношення $\frac{z_{\max}}{i}$), а також від схеми навантаження і умов закріплення балки (у цьому випадку в підкорінному виразі стоїть $6T_0$; для балок, завантажених і закріплених інакше, числовий коефіцієнт біля T_0 буде іншим). Таким чином, у балці прямокутного перерізу висотою h і шириною b , поставленій на ребро або покладеній плоско, найбільші напруження при ударі будуть однакові й рівні (за наближеною формулою):

$$\sigma_{\partial \max} = \sqrt{\frac{18T_0 E}{Al}};$$

оскільки в обох випадках

$$\frac{z_{\max}}{i} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{hb^3}{12bh}}} = \sqrt{3}.$$

Як відомо, при однаковому статичному навантаженні найбільші напруження в балці, встановленій плоско, будуть у відношенні $\frac{h}{b}$ більшими, ніж напруження в балці, поставленій на ребро. Це є справедливим лише до тих пір, поки явище удару відбувається в межах пружності.

15.3.3. Удар, який скручує

Розглянемо тепер задачу визначення напружень при ударі, який скручує стержень.

Якщо вал, який обертається, раптово зупиняється гальмуванням одного з його кінців, а на іншому на нього передається кінетична енергія маховика T_0 , що скручує вал, то напруження також можуть бути визначені методом, вказаним вище. Вал скручуватиметься двома парами сил (сили інерції маховика і сили гальмування) з моментом M .

У даному випадку:

$$\delta_c = \varphi_c = \frac{Ml}{GJ_p}, \quad p_c = \tau_{c \max} = \frac{M}{W_p}$$

$$i \quad U_c = \frac{M^2 l}{2GJ_p} = \frac{\tau_{c \max}^2 l W_p^2}{2GJ_p} = \frac{\varphi_{c \max}^2 GJ_p}{2l},$$

тому

$$\delta_d = \varphi_d = K_d \varphi_c = \varphi_c \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 l}{GJ_p}}$$

і

$$p_d = \tau_{d \max} = K_d \tau_{c \max} = \tau_{c \max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 GJ_p}{l W_p^2}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 l G}{Al}},$$

оскільки

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}, \quad W_p = \frac{\pi r^3}{2} \quad i \quad \frac{J_p}{W_p^2} = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{2}{A}.$$

Маючи на увазі, що кінетична енергія маховика T_0 дорівнює

$$T_0 = \frac{J_0}{2} \omega^2,$$

де J_0 — момент інерції маси маховика, а ω — кутова швидкість, можна написати:

$$\tau_{d \max} = \omega \sqrt{\frac{2J_0 G}{Al}}. \quad (15.26)$$

Відмітимо, що і при ударі, який скручує, найбільші напруження залежать від модуля пружності й від об'єму валу.

15.4. Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі

Ми бачили, що для зниження напружень при поздовжньому ударі слід збільшувати об'єм стержня. Проте потрібно пам'ятати, що це правильно лише для того випадку, коли площа перерізу стержня по його довжині не змінюється, а напруження в усіх перерізах однакові.

Інші результати отримаємо, якщо різні ділянки довжини стержня матимуть неоднакову площу поперечного перерізу (рис.15.5). З (15.16) або (15.17) випливає, що динамічне напруження при поздовжньому ударі залежить від площі поперечного перерізу стержня і від його податливості — здатності деформуватися. Найбільші напруження в

стержні з виточкою (рис.15.5 а), таким чином, визначатимуться величиною найменшої площі (в місці виточки) і податливістю стержня, яка залежить від деформацій вже усього стержня, а не тільки його ослабленої частини.

Зниження напружень у цьому випадку може бути досягнуте двома шляхами. Можна збільшити площу в найослабленішому місці (якщо конструкція це дозволяє), повернутися до стержня одного діаметра d_1 (рис.15.5 б); в цьому випадку ми збільшуємо площу та у меншій мірі зменшуємо податливість. Сила інерції трохи зростає, але площа в ослабленому перерізі зростає більше і напруження знизяться.

Проте, зазвичай, цей (перший) шлях не може бути застосованим, бо конструкція може вимагати збереження виточки. Тоді для підвищення міцності стержня необхідно збільшити його податливість, зменшуючи площу його перерізу в потовщеній частині. Якщо ми виконаємо весь стержень діаметром d_2 (рис.15.5 в), то цим значно збільшимо податливість стержня, зменшимо силу P_0 і динамічне напруження. Зниження напружень може бути досягнуте двома шляхами, які ведуть до вирівнювання динамічних напружень: збільшенням об'єму шляхом усунення виточки і зменшенням – за рахунок зменшення площі потовщеної частини.

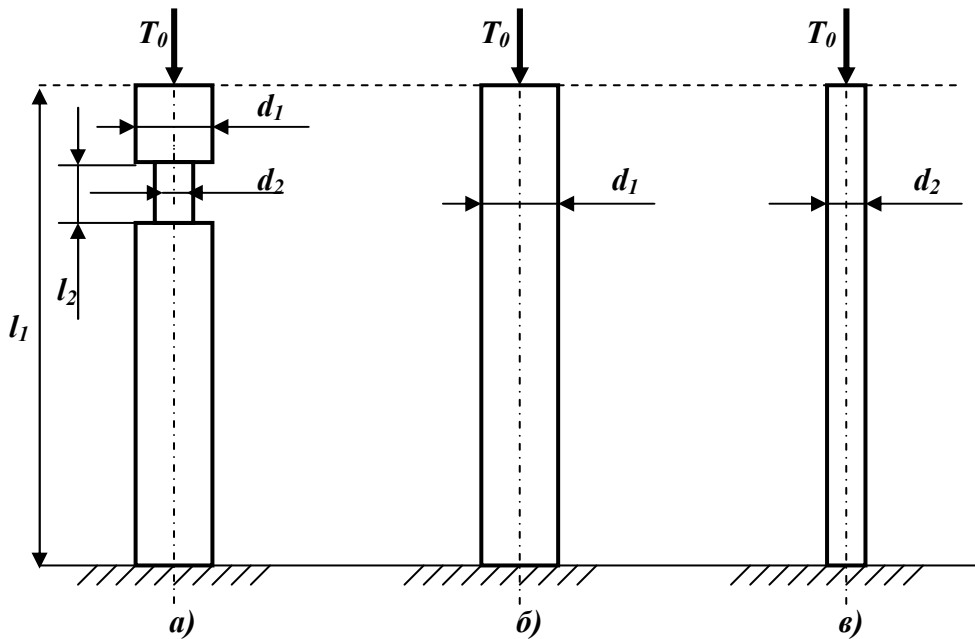


Рис.15.5. Стержні змінного поперечного перерізу

Ці висновки легко перевірити розрахунком. Визначимо найбільші динамічні напруження, викликані одним і тим самим поздовжнім ударом із запасом енергії $T_0 = QH$ для трьох стержнів, зображених на рис.15.5,а,б,в. Площу потовщеної частини стержня назвемо A_1 а більш тонкої – A_2 ; позначимо $\frac{A_2}{A_1} = q$ і $\frac{l_2}{l_1} = p$. Напруження в стержнях знайдемо за наближеними формулами (15.14) і (15.17). Найбільше динамічне напруження в стержні, зображеному на рис. 15.5,а, за формулою (15.14):

$$P_0 = \sigma_a = \sigma_c = \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sigma_2 \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \frac{Q}{A_2} \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_2^2 \Delta l_c}}$$

Оскільки:

$$\Delta l_c = \frac{Q}{EA_2} + \frac{Q(l_1 - l_2)}{EA_1} = \frac{Ql_1}{EA_2} [p + q(1-p)],$$

то

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_2^2 \frac{Ql_1}{EA_2} [p + q(1-p)]}} = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_1 l_1 q [p + q(1-p)]}}.$$

Напруження в стержнях постійного перерізу (рис. 15.5,б,в) знайдемо за формулою (15.17):

$$\sigma_{\sigma} = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_1 l_1 q}} \quad \text{і} \quad \sigma_{\sigma} = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_2 l_1}} = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_1 q l_1}}.$$

Оскільки:

$$[p + q(1-p)] < q < 1, \quad \text{то} \quad \sigma_a > \sigma_{\sigma} > \sigma_{\sigma}.$$

Якщо $\frac{d_2}{d_1} = 0,8$, а $\frac{l_2}{l_1} = 0,1$ то $= 0,64$, $p = 0,1$, то в цьому випадку обчислення дають:

$\sigma_a = 1,52\sigma_{\sigma}$; $\sigma_{\sigma} = 0,82\sigma_a = 1,25\sigma_{\sigma}$. Наявність виточки, що зменшує діаметр на 20% на одній десятій довжини стержня, викликає підвищення напружень на 50%, але, якщо тепер надати цьому стержню мінімальну площу по всій довжині, то напруження знизяться приблизно на 20%.

15.5. Практичні висновки з одержаних результатів

Результати підрахунків, наведених раніше, мають величезне практичне значення. Перш за все вони показують, що **характер опору стержнів удару якісно значно відрізняється від опору їх статичному навантаженню**. Потовщення однієї половини стержня при статичному стиску не викликає змін напружень у перерізах іншої половини, при ударі ж воно *підвищує* їх. *Місьцеве зменшення площі поперечного перерізу на невеликій довжині стержня викликає різке підвищення напружень*.

Для зниження напружень треба прагнути до збільшення податливості стержня шляхом збільшення його довжини, додавання буферної пружини, заміни матеріалу іншим, із нижчим модулем пружності, вирівнювання площ поперечних перерізів. Ефективним може виявитися вирівнювання площ поперечних перерізів за найменшою.

Тому при конструюванні стержнів, які працюють на удар, треба добиватися постійної площі перерізу по всій довжині стержня; місцеві *потовщення* допустимі лише на невеликих ділянках довжини, *місьцеві ж виточки невеликої довжини вкрай небажані*. Якщо за таких умов не вдається сконструювати достатньо міцний стержень, необхідне подовження стержня або рівномірне збільшення площі його поперечного перерізу.

Як приклад можна навести болт, який передає від однієї частини конструкції на іншу розтягуючий удар. Конструкція, зображена на рис.15.6,а, гірше чинитиме опір удару, так як ділянка болта з нарізкою, що має менший діаметр, працюватиме як виточка. Більша частина енергії удару поглинатиметься частиною болта, що має нарізку. Ймовірно руйнування болта.

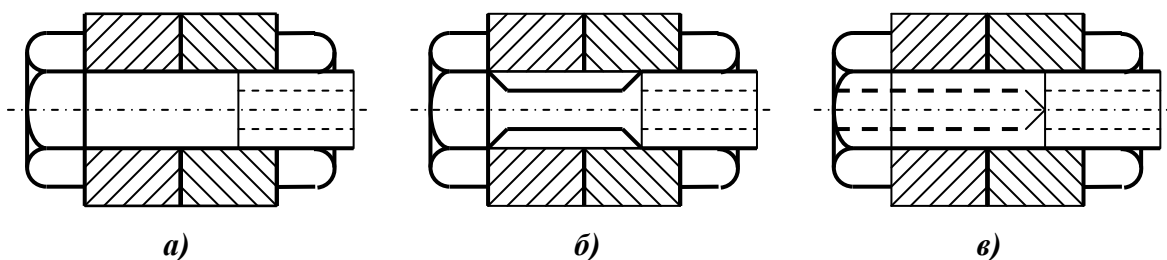


Рис.15.6. Різні конфігурації болтів:

- а) болт, де різьбова частина має меншу площу поперечного перерізу;**
б,в) болти, в яких зменшено площу поперечного перерізу нерізьбової частини

Для поліпшення конструкції треба зробити так, щоб увесь об'єм болта більш менш рівномірно поглинав енергію удару; для цього його площа усюди (або майже усюди) має дорівнювати площі за внутрішнім діаметром нарізки. Цього можна досягти або обточуванням тіла болта (рис.15.6,б), або висвердлюванням в ньому каналу (рис.15.6,в).

Прикладом збільшення опору болтів шляхом їх подовження, є конструкція, зображена на рис.15.7,а,б.

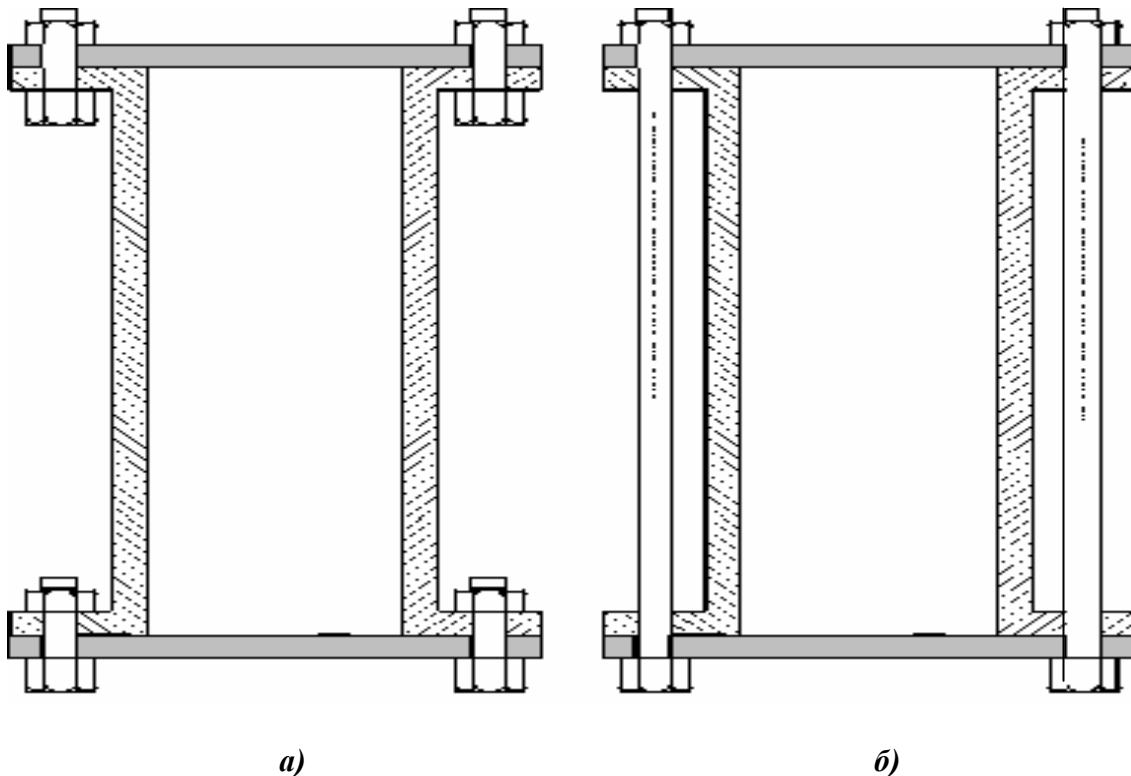


Рис.15.7. Конструкції скріплені:
а) короткими болтами; б) довгими шпильками

Кришки циліндра бурового інструмента іноді витримують сильні удари поршня. Короткі болти, які прикріплюють кришку до циліндра за варіантом рис.15.7,а, давали обрив. Вихід знайдено шляхом подовження болтів за варіантом рис.15.7,б.

15.6. Механічні властивості матеріалів при ударі

Для перевірки властивості матеріалу чинити опір ударним навантаженням застосовують дослідження, яке передбачає ударне навантаження при згині – визначення ударної в'язкості надрізаних зразків. Ці дослідження проводять на маятникових копрах. На рис. 15.8 зображено зразок, який використовують при дослідженнях, та напрям удару маятника (розміри задано в мм).

Різниця висот положення маятника до і після удару дозволяє обчислити роботу U , проведеному для руйнування зразка.

Ударною в'язкістю матеріалу KC називають величину роботи, затраченої на руйнування зразка, віднесену до площі його поперечного перерізу в місці надрізу.

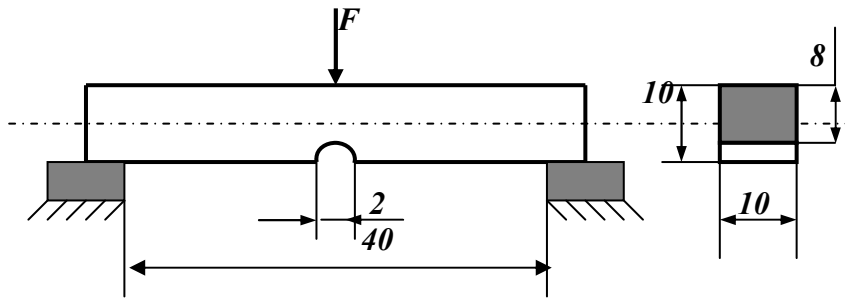


Рис. 15.8. Зразок, для випробовувань на ударну в'язкість

$$KC = \frac{U}{A} = \frac{G(h_1 - h_2)}{A}, \quad (15.27)$$

де G – вага маятника, h_1 та h_2 – початкова та кінцева висоти положення маятника.

Хоча дані про ударну в'язкість не можуть бути використані при розрахунку на міцність, вони дозволяють оцінити таку особливість матеріалу, як його схильність до крихкості при динамічних навантаженнях за умов складного напруженого стану в зоні надрізу, і вирішити питання про можливість застосування того чи іншого матеріалу для певних режимів роботи. Саме в таких умовах працює велика кількість деталей машин, які мають отвори, шпоночні канавки і т.п.

Низька ударна в'язкість є основою для відбракування матеріалу. Сталі, які використовують для виготовлення деталей, що працюють при динамічних навантаженнях, повинні мати ударну в'язкість не менше від $8 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^6$ (Дж/м²).

Ударна в'язкість однієї й тієї ж сталі залежить від її структури, причому ця залежність неможливо визначити при статичних дослідженнях. У табл. 15.1 наведені результати визначення ударної в'язкості для дрібнозернистої та крупнозернистої сталі марки Ст2 (0,15% вуглецю). Ці сталі мають майже однакові пластичні властивості при статичних дослідженнях, але при ударних навантаженнях їх властивості значно відрізняються.

При низьких температурах більшість чорних металів стають крихкими. Знижується також їх ударна в'язкість. Для таких металів проводилися випробовування на удар із одночасним зниженням температури. При цьому було визначено *критичну температуру крихкості* – температуру, при якій виникає різке зменшення ударної в'язкості матеріалу. Критична температура крихкості для різних матеріалів є різною. Нижче цієї температури метал стає непридатним для роботи при динамічних навантаженнях.

Значення ударної в'язкості для поширених сталей.

Таблиця 15.1.

Матеріал	σ_s МПа	δ	Ψ	Ударна в'язкість Дж/м ²
		%		
Ст2 дрібнозерниста	375	35,3	72,2	$13,1 \cdot 10^5$
Ст2 крупнозерниста	345	36,9	66,7	$2,6 \cdot 10^5$

Зауважимо, що ударна крихкість може виникати й при підвищених температурах. Наприклад, ударна в'язкість вуглецевих сталей значно зменшується в межах температур 200 – 550 °С.

16. Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень

16.1. Явище „втомленості” матеріалів

Опір матеріалів дії навантажень, змінних у часі за величиною або за величиною і знаком, істотно відрізняється від опору дії статичного навантаження. Типовим прикладом деталі, яка знаходиться під дією змінних навантажень, є шток поршневої машини, знак напружень у якому змінюється відповідно до зміни напрямку руху поршня.

Практикою встановлено, якщо елемент конструкції багато разів піддавати змінному навантаженню певного рівня, то після деякого числа змін напружень у ньому з'явиться тріщина, яка поступово розвиватиметься. Врешті-решт деталь руйнуватиметься, не маючи при цьому помітних залишкових деформацій навіть у тому випадку, коли її матеріал високопластичний.

За умов зменшення рівня напружень до появи першої тріщини і до повного руйнування стержня число циклів буде збільшуватися. Характерно, що руйнування матеріалу під дією повторно змінних навантажень може відбутися при напруженнях, нижчих від межі текучості. Руйнування матеріалу під дією повторно змінних напружень називають *руйнуванням від утомленості (втому)*.

Взагалі ж втомленістю (або втомою) матеріалів (зокрема, металів) називають явище руйнування в результаті поступового накопичування в них пошкоджень, які призводять до виникнення втомної тріщини при багаторазовому повторенні навантажень.

Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно змінних напружень називають *витривалістю* матеріалу.

Такі відповідальні деталі, як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни двигунів, веслувальні гвинти, клапанні пружини, повітряні гвинти, поршневі пальці й багато інших, виходять з ладу, здебільшого, чином внаслідок руйнувань втомного характеру.

Втомне руйнування спостерігається за наявності однієї з таких особливостей додатку навантаження:

- багатократного додатку навантаження одного знака, наприклад періодичного, що змінюється від нуля до максимуму (рис.16.1,а);
- багатократного повторення навантаження, що періодично змінюється не тільки за величиною, але й за знаком (знакозмінного навантаження), коли на витривалість матеріалу одночасно впливають і повторність, і змінність навантаження. При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (рис.16.1,б) та несиметричними циклами (рис.16.1,в,г).

Для руйнування від втомленості недостатньо змінності напружень. Необхідно також, щоб напруження мали певну величину.

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись при будь-якому довільно великому числі повторень змінних напруження, називають межею витривалості або межею втомленості.

Злам деталі від утомленості має характерний вигляд. На ньому майже завжди можна спостерігати дві зони. Одна з них гладка, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини; інша — грубозерниста, утворилася при остаточному зламі послабленого розвинутою тріщиною перерізу деталі. Ця зона у крихких деталях має крупнокристалічну, а у в'язких — волокнисту будову.

Із безперечних положень теорії втомленості можна відзначити:

- процеси, які проходять при повторнозмінних навантаженнях у металі,

- мають яскраво виражений місцевий характер;
- з двох видів напруження — нормальних і дотичних домінуючий вплив на процеси втомленості, до створення першої мікротріщини включно, мають дотичні напруження, які викликають пластичні зсуви і руйнування.

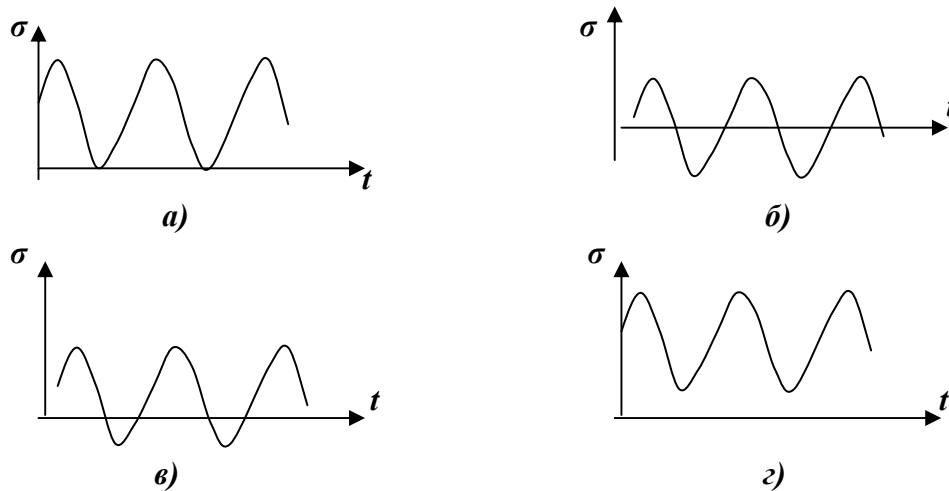


Рис.16.1. Види циклів: а) пульсуючий; в,г) несиметричні з різним коефіцієнтом асиметрії; б) симетричний

Розвиток втомної тріщини, безумовно, може прискорюватись за наявності розтягуючих напружень як у пластичних, так, особливо, й у малопластичних і крихких матеріалів типу чавуну, в яких поява тріщини відриву значно підвищує чутливість до розтягуючих напружень.

Межу витривалості визначають експериментально. Вона залежить від цілого ряду факторів, зокрема, від форми і розмірів деталі, способу її обробки, стану поверхні деталі, виду напруженого стану (розтяг-стиск, кручення, згин і т.п.), закону зміни навантаження в часі при випробовуваннях і т.п.

Сукупність усіх значень напружень за час одного періоду називають циклом (рис.16.2,а).

На втомну міцність здебільшого впливають максимальні P_{\max} і мінімальні P_{\min} напруження циклу. Окрім них в опорі матеріалів уводять поняття постійного або середнього напруження циклу P_c (рис.16.2,б):

$$P_c = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \quad (16.1)$$

і поняття про амплітуду P_a циклу, який характеризує змінність напруження:

$$P_a = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} \quad (16.2)$$

Середнє напруження може бути як додатнім, так і від'ємним, амплітуда ж циклу визначається абсолютною величиною (без урахування знака). Відповідно до виразів (16.1) і (16.2).

$$P_{\max} = P_c + P_a; \quad P_{\min} = P_c - P_a.$$

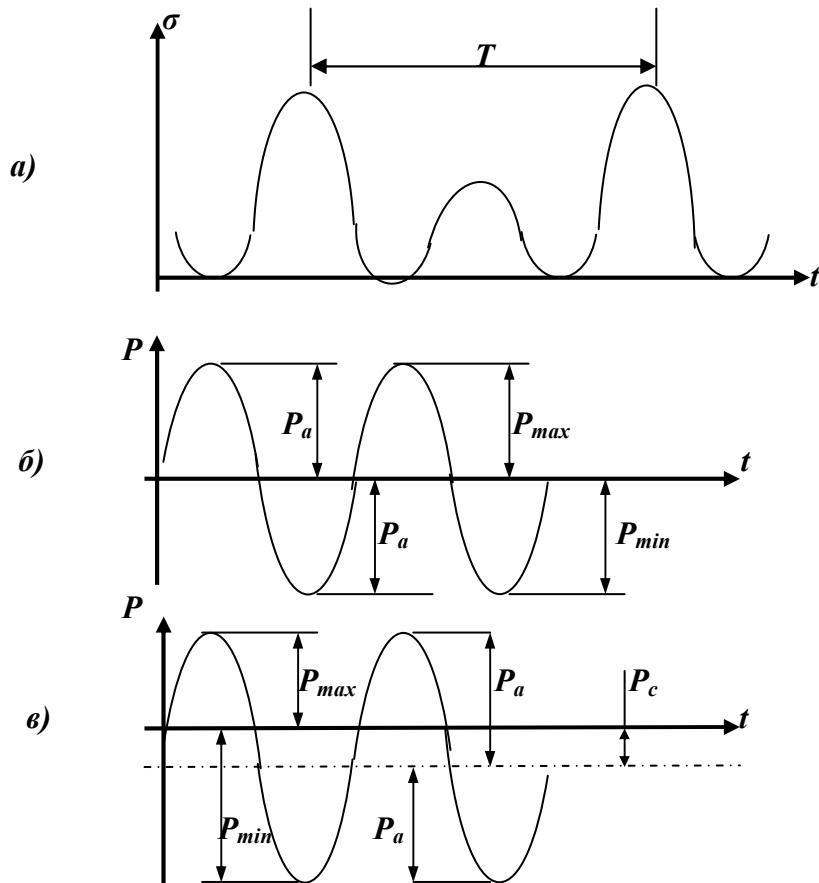


Рис.16.2. Характеристики циклів: а) симетричного; б) несиметричного

Подвоєну величину амплітуди коливань напружень називають *розмахом циклу*. Відношення мінімального напруження циклу до максимального з урахуванням знаків цих напружень називають *характеристикою циклу* або *коефіцієнтом асиметрії циклу* й позначається літерою r , тобто

$$r = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \quad (16.3)$$

Найнебезпечнішим є *симетричний цикл*, коли $P_{\max} = -P_{\min}$ і $P_c = 0$, за якого

$$r = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = -1.$$

Межа втомленості при симетричному циклі є мінімальною для даного виду деформації та позначається через p_{-1} . У разі напруження, яке змінюється від нуля до максимуму, тобто при *нульовому або пульсуючому циклі*, коли $P_{\min} = 0$,

$$r = \frac{0}{P_{\max}} = 0,$$

а межу втомленості, відповідну даному циклу, позначають через p_0 .

При $p = const$, тобто коли діє постійне статичне навантаження,

$$P_{\max} = -P_{\min} = P$$

і характеристика циклу

$$r = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = \frac{P}{P} = 1.$$

В загальному випадку межу витривалості, одержану при характеристиці циклу r , позначають p_r , межу витривалості, одержану при якомусь певному значенні r , припустимо при $z = -0,5$, позначають відповідно $p_{-0,5}$.

Цикли, які мають однакові характеристики r називають *подібними*. Характеристика циклу, або коефіцієнт асиметрії, може змінюватися від $-\infty$ до $+\infty$.

Очевидно, для повної думки про характер дії циклічного навантаження окрім характеристики циклу r , повинно бути відомо хоча б *максимальне* або *мінімальне напруження циклу*.

Слід відмітити, що в окремих випадках, коли мова йтиме про нормальні або дотичні напруження (в першому випадку при циклічному розтягуванні — стиску або згині, в другому при циклічному крученні), літера p в прийнятих раніше позначеннях повинна бути замінена відповідно на σ або на τ при збереженні відповідних індексів. Так, наприклад, при циклічному розтягуванні — стиску або згині замість p_{\max} , p_{\min} , p_c і p_a повинні відповідно фігурувати σ_{\max} , σ_{\min} , σ_c і σ_a , тоді межа втомленості при характеристиці циклу r позначатиметься σ_r , а, наприклад, при симетричному циклі, тобто при $r = -1$, буде σ_{-1} . У разі кручення з циклічною зміною напруження характерні напруження циклу відповідно позначатимуться через τ_{\max} , τ_{\min} , τ_c і τ_a , а межа витривалості — через τ_r , τ_{-1} і т.д.

16.2. Методи визначення межі витривалості

16.2.1. Діаграми втомленості

Щоб визначити межу витривалості потрібно на відповідній випробовувальній машині випробовувати партію зразків з даного матеріалу в кількості не менше 6–12 шт. Найчастіше використовують гладкі циліндричні зразки діаметром 7 — 10 мм.

Відповідно до поставлених вимог обирають необхідну випробовувальну машину. В принципі при випробовуванні, за умов згину схематично ця машина є пристроєм, схожим на токарний верстат із двома шпинделями, осі яких розташовані під певним кутом (що регулюється) одна до другої. Крім того ця машина обов'язково повинна мати лічильник циклів.

Симетричний цикл у лабораторних умовах здійснити найпростіше. При обертанні зразка його зовнішні волокна сприйматимуть поперемінно, то розтяг (коли вони розташовані знизу), то стиск (при повороті зразка на 180°).

При випробовуванні партії зразків з метою отримання межі витривалості необхідно давати такі навантаження на окремі зразки, щоб вони руйнувалися, витримавши різне число циклів навантаження.

Опрацювання одержаних експериментальних даних, зазвичай, супроводжується побудовою кривої утомленості, яку в літературі часто називають кривою Веллера (рис.16.3).

А. Веллер (1819 – 1914) – німецький вчений - фундатор наукового дослідження втомленості матеріалів. Ним створено перші машини для випробовування опору різних матеріалів повторнозмінним навантаженням.

Криву втомленості будують по точках у координатах числа циклів N і напруження p_{\max} . Кожному зразку, що руйнувався, на діаграмі відповідає одна точка з координатами N (число циклів до руйнування) і p_{\max} (напруження), тобто крива втомленості є функцією $p_{\max} = f(N)$

Порядок встановлення навантажень на зразки, які випробовуються, в більшості випадків приймають спадаючим, тобто на перший зразок дають навантаження, що значно перевищує межу витривалості, а на подальші зразки поступово знижують. Кожний із менш навантажених зразків витримуватиме все більше й більше число циклів.

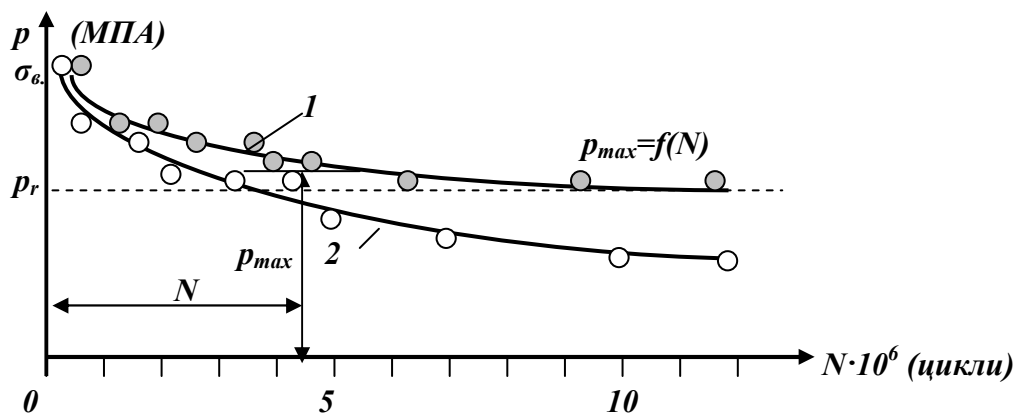


Рис.16.3. Графіки випробовувань для визначення межі витривалості при симетричному циклі

Будуючи криву втомленості по точках, які дали зразки, що руйнувалися, легко переконатися, що, наприклад, при випробовуванні сталі (рис.16.3, крива 1), при високому дорівнюють напруження крива круто падає, а зі зниженням їх крутизна зменшується і вона асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, яка відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого і визначається межа витривалості. Ордината точки на кривій, де точка практично починає співпадати з вказаною асимптотою, відповідає такому напруженню, при якому зразок не буде руйнуватися, пройшовши число циклів, відповідне наперед заданій величині, так званій базі випробовування N_0 .

Для чорних металів (сталі, чавуну і т. п.) за базу випробовувань, зазвичай, приймають 10 млн. циклів, а для кольорових (мідь, алюмінію і т. і.) — число, в 5 — 10 разів більше. З розгляду характеру втомної кривої для кольорових металів (рис.16.3, крива 2) видно, що на великій ділянці вона спадає поступово, тому і доводиться в даному випадку за базу випробовування приймати більше число циклів. Взагалі для таких металів можна говорити тільки про деяку умовну межу втомленості.

Умовною межею втомленості називають максимальне напруження, при якому не відбувається руйнування за умов здійснення певного, наперед заданого, числа циклів, відповідного тій або іншій прийнятій базі випробовування.

У зв'язку з тим, що за кривою втомленості, побудованою в координатах $N - p$ або, що те ж саме – $N - \sigma$ (рис.16.4,а), часто важко визначити межу витривалості, застосовують два інші способи побудови діаграм втомленості.

Перший спосіб полягає в тому, що по осі абсцис відкладають величину, зворотну до числа циклів (рис.16.4,б). Межу втомленості тоді визначають як ординату в місці перетину кривої втомленості з віссю напруження.

Другий спосіб заснований на поданні результатів випробовувань у напівлога-рифмічних (рис.16.4,в) або логарифмічних (рис.16.4,г) координатах. З креслення видно, критерієм визначення межі втомленості тут є перелом кривої.

На закінчення відзначимо, що, згідно з чисельними експериментальними даними, для деяких матеріалів можна помітити певні співвідношення між межами витривалості при різних видах деформації і, зокрема, між межами витривалості при згині σ_{-1}^i , крученні τ_{-1} і розтягу σ_{-1}^0 при симетричних циклах.

Для гладких зразків ці співвідношення приблизно дорівнюють: для сталі $\sigma_{-1}^0 = 0,7\sigma_{-1}^i$, для чавуну $\sigma_{-1}^0 = 0,65\sigma_{-1}^i$, для сталей і легких сплавів $\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}^i$, для чавуну $\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}^i$.

Маючи величину тимчасового опору σ_g , межі витривалості сталі при симетричному циклі можна приблизно знайти за наступними емпіричними співвідношеннями відповідно для розтягу- стиску, згину і кручення:

$$\sigma_{-1}^0 = 0,28\sigma_g, \quad \sigma_{-1}^0 = 0,40\sigma_g, \quad \tau_{-1} = 0,22\sigma_g. \quad (16.4)$$

Для кольорових металів спостерігається менш стійке співвідношення між межею втомленості й тимчасовим опором, згідно з дослідними даними, в цьому випадку $\sigma_{-1}^0 = (0,24 \div 0,50)\sigma_g$.

16.2.2. Діаграма граничних напружень

Щоб охарактеризувати здатність опору матеріалу дії змінних напружень із різною асиметрією циклу, будують так звану діаграму граничних напружень (рис.16.5). В ній по

осі абсцис відкладають середнє напруження циклу σ_c , а по осі ординат — найбільше σ_{\max} і найменше σ_{\min} (діаграма Сміта). Їхні граничні значення $\sigma_{r_{\max}}$, $\sigma_{r_{\min}}$, σ_c визначаються за даною характеристикою циклу дослідним шляхом у результаті побудови кривих втомленості.

Зазвичай, починають з симетричного циклу ($r = -1$). Граничним напруженням в цьому випадку буде межа витривалості σ_{-1} . Отже:

$$\sigma_{-1_{\max}} = \sigma_{-1}, \quad \sigma_{-1_{\min}} = -\sigma_{-1}, \quad \sigma_{-1_c} = 0.$$

Цьому циклу на діаграмі відповідають точки A і A' на осі ординат.

Випробовувавши партію зразків з даного матеріалу при певному значенні характеристики циклу $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, визначимо найбільше й найменше значення

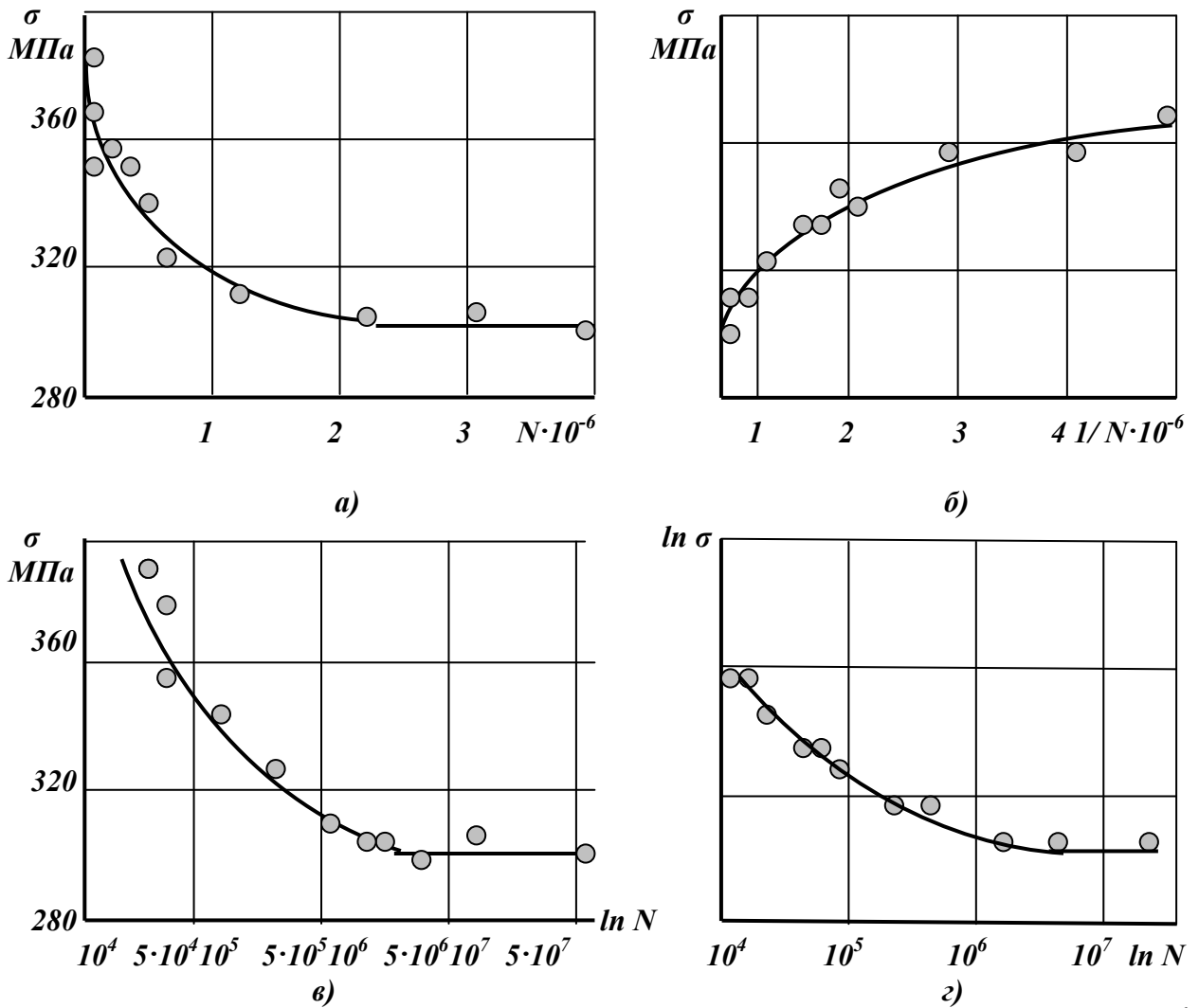


Рис.16.4. Криві втомленості: а) в координатах $N - \sigma$; б) в координатах $1/N \cdot 10^{-6} - \sigma$; в) в координатах $\ln N - \sigma$; г) в координатах $\ln N - \ln \sigma$

напружень, за яких матеріал працює на межі витривалості σ_r , тобто

$$\sigma_{r_{\max}} = \sigma_r, \quad \sigma_{r_{\min}} = r\sigma_r, \quad \sigma_{r_c} = \frac{\sigma_{r_{\max}} + \sigma_{r_{\min}}}{2}.$$

Нанесемо на діаграму точки M і N , абсциса яких дорівнює σ_r , а ординати — відповідно $\sigma_{r_{\max}}$ і $\sigma_{r_{\min}}$. Так само чинимо для ряду інших значень r , одержуємо точки M_1, N_1, M_2, N_2 .

Сполучимо лініями всі точки, які зображують максимальні й мінімальні граничні напруження циклів. Очевидно, права крайня точка діаграми (точка D) відповідає циклу, при якому $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_c$, $r=1$ — тобто статичному навантаженню. Граничним напруженням в цьому випадку є межа міцності матеріалу. Отже, абсциса і ордината точки D дорівнюють межі міцності матеріалу. Таким чином, ординати точок лінії AD відповідають межам витривалості матеріалу, при різних значеннях коефіцієнта асиметрії циклів.

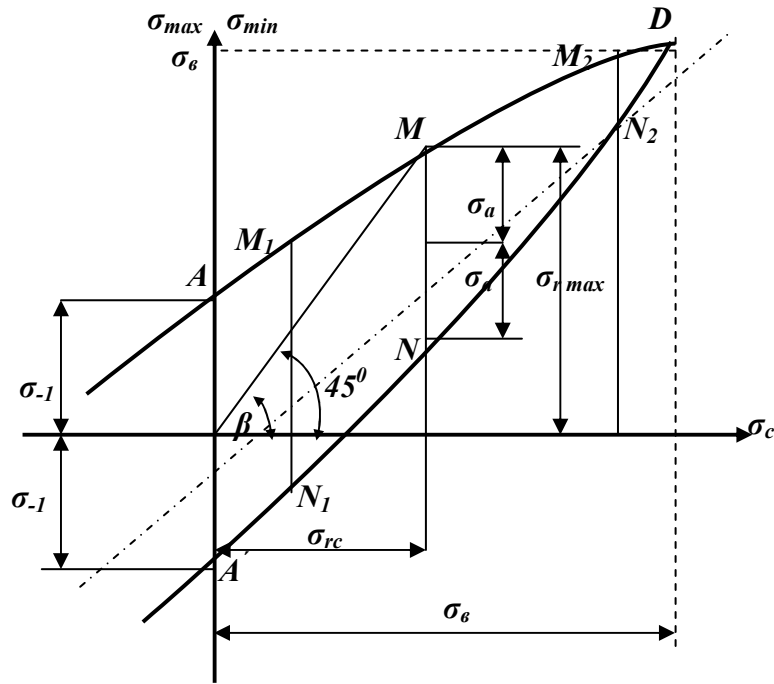


Рис.16.5. Визначення межі витривалості при несиметричних циклах

Легко переконатися, що промінь, який проходить через початок координат діаграми граничних напружень, є геометричним місцем точок, які характеризують цикли з однаковим коефіцієнтом асиметрії $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$. Дійсно

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_c} = \frac{2\sigma_{\max}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{2}{1+r}.$$

Для визначення межі витривалості матеріалу при даному значенні коефіцієнта асиметрії r потрібно обчислити за наведеною формулою кут β і провести промінь під цим кутом до перетину з лінією AD ; ордината точки перетину дорівнює величині σ_r .

У разі циклічного кручення діаграма будується по одну сторону від осі ординат і має такий вигляд, як показано, наприклад для конструкційної сталі на рис.16.6.

Діаграму граничних напружень можна будувати також у координатах $\sigma_c - \sigma_a$ (діаграма Хейя), тобто по осі ординат відкладати граничну амплітуду σ_a циклу, а по осі абсцис — середнє напруження σ_c (рис.16.7). На цій діаграмі пряма, проведена з початку координат під деяким кутом також характеризує цикли з однаковою асиметрією, оскільки:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \frac{\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}}{\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}} = \frac{1-r}{1+r}.$$

Таким чином, при постійному β виявляється постійним і коефіцієнт асиметрії. У разі плоского або об'ємного напруженого стану опір втомленості можна охарактеризувати, виходячи з відповідних гіпотез міцності, які узгоджуються з експериментальними даними.

Для дослідження дійсної поведінки матеріалу за умов складного напруженого стану, наприклад при поєднанні згину з крученням, використовують спеціальні випробовувальні машини, які дозволяють одночасно навантажувати зразок змінними згинаючими і крутними моментами.

За даними випробовувань, одержаними при різних поєднаннях змінних σ і τ , будують діаграми в координатах $\sigma_a - \tau_a$ або у відносних величинах σ_a / σ_{-1} і τ_a / τ_{-1} . Точки таких діаграм визначають напружені стани, яким відповідають величини σ_a і τ_a при складному напруженому стані. Типову діаграму для конструкційних сталей, побудовану за експериментальними даними, зображено на рис.16.8 (крива 1).

Вона відповідає дузі кола. Для високоміцних сталей і чавунів експериментальні криві ближче до еліптичних дуг (рис.16.8, крива 2).

У разі симетричного циклу з дотриманням синхронності й синфазності напруження, умову міцності в амплітудах головних напружень відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень запишемо так:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1}.$$

Виходячи з теорії міцності енергії формозмінення, умову міцності можна записати :

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \quad (16.5)$$

Для складного напруженого стану, який відповідає сумісній дії розтягу і кручення або згину і кручення, поправкою на співвідношення величин меж витривалості, умову міцності виразимо так:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} \leq \sigma_{-1}. \quad (16.6)$$

Остання умова співпадає з раніше наведеною експериментально одержаною залежністю, якій в координатах σ_a / σ_{-1} ; τ_a / τ_{-1} відповідає дуга кола.

16.3. Вплив деяких конструктивно-технологічних факторів на межу витривалості

На величину межі витривалості зразків або деталей, які виготовляються з того або іншого матеріалу, окрім характеристики циклу впливає багато різних факторів. До них відносяться форма зразка, розміри, стан поверхні, середовище, в якому відбувається випробовування, температура випробовувань, режим циклічної силової дії (тренування, паузи, перевантаження, частота навантаження і т. п.), попередня внутрішня напруженість матеріалу та ін.

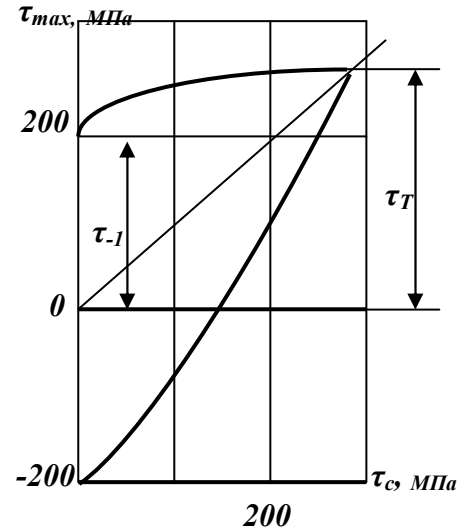


Рис. 16.6. Визначення межі витривалості для несиметричних циклів при крученні

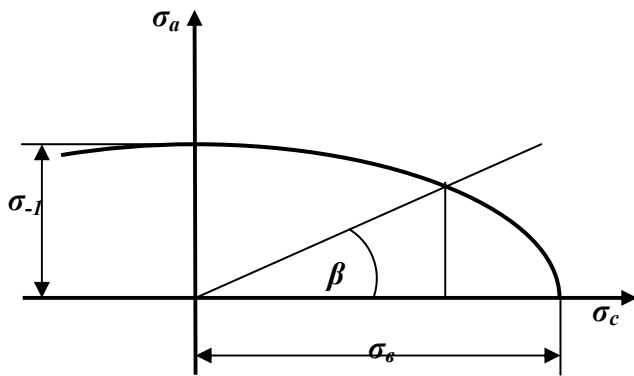


Рис.16.7. Діаграма граничних напружень у координатах $\sigma_c - \sigma_a$ (діаграма Хейя)

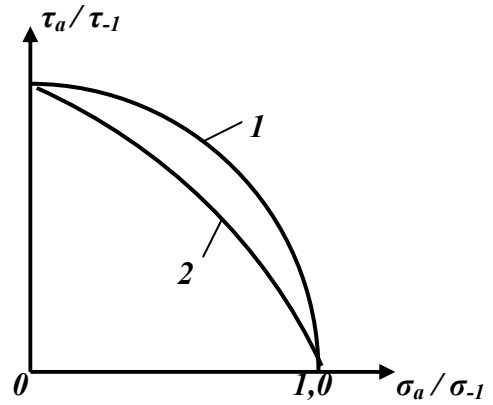


Рис.16.8. Діаграма граничних напружень у випадку складного напруженого стану

Для з'ясування впливу того або іншого фактора як еталон прийнята межа втомленості p_{-1} , одержана випробовуванням на повітрі при симетричному циклі партії гладких полірованих зразків діаметром 7—10 мм. Тоді вплив різних факторів на витривалість може бути оцінений відхиленням межі витривалості p'_{-1} партії даних зразків, від межі витривалості p_{-1} еталонних.

16.3.1. Вплив концентрації напруження

Найважливішим фактором, що знижує межу витривалості, є концентрація напружень, викликана різкою зміною перетину деталі. Концентраторами напруження на практиці є шпоночні канавки, отвори в деталі, нарізки на поверхні, малі радіуси закруглення, місця різкої зміни розмірів перерізів і т.п. Концентрація напружень, як правило, сприяє зародженню втомної тріщини, яка розвиваючись призводить до руйнування деталі.

Як показують досліди, у разі дії змінних напружень межа витривалості з концентрацією напружень більше, ніж частка від ділення межі витривалості гладкого зразка на теоретичний коефіцієнт концентрації напруження α_k .

$$p_{-1k} \geq \frac{p_{-1}}{\alpha_k}$$

Така розбіжність пояснюється тим, що теоретичний коефіцієнт концентрації α_k відображає характер розподілу напруження лише для ідеально пружного матеріалу. В реальних матеріалах за рахунок пластичних деформацій у мікрзоні місця концентрації напруження дещо перерозподіляються і згладжуються. Враховуючи це, разом з теоретичним коефіцієнтом концентрації при розгляданні питань втомленості, використовують поняття ефективного або дійсного коефіцієнта концентрації, що є відношенням межі витривалості гладкого зразка без концентрації напруження до межі витривалості зразка з концентрацією напруження, який має такі ж абсолютні розміри перерізів. Ці коефіцієнти надалі позначені так:

— для нормальних напружень:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}};$$

— для дотичних напружень:

$$k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}},$$

де σ_{-1} і τ_{-1} — межі витривалості гладких зразків;

σ_{-1k} і τ_{-1k} — межі витривалості зразків з концентрацією напруження.

Надалі всі міркування робитимемо стосовно нормальних напружень, маючи на увазі, що для дотичних напружень все сказане залишиться в силі, тільки потрібно індекс « σ » при коефіцієнтах замінити на « τ ».

Ефективні або дійсні коефіцієнти концентрації напруження мають менші значення, ніж коефіцієнти концентрації a_{σ} , визначувані теоретичним шляхом у припущенні пружнього розподілу напруження.

Кількісна оцінка вказаної різниці коефіцієнтів k_{σ} і a_{σ} може бути одержана введенням *коефіцієнту чутливості матеріалу* до концентрації напруження:

$$q_{\sigma} = \frac{k_{\sigma} - 1}{a_k - 1}. \quad (16.7)$$

Знаючи коефіцієнти чутливості q_{σ} , для яких у довідковій літературі є відповідні графіки, можна по a_k визначити значення ефективних коефіцієнтів концентрації:

$$k_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(a_k - 1). \quad (16.8)$$

Очевидно для матеріалу, нечутливого до концентрації напружень, тобто при $q_{\sigma} = 0$, $k_{\sigma} = 1$, коли $q_{\sigma} = 1$, $k_{\sigma} = a_{\sigma}$ — матеріал має повну чутливість до концентрації напруження.

Інженерна практика показує, що чутливість металу до концентрації напружень перш за все залежить від його властивостей, чим вище міцність сталі, тим вона чутливіша до концентрації напруження. Тому використання високоміцних сталей за умов змінних напружень не завжди виявляється доцільним.

Чутливість металу до концентрації напруження у грубозернистих сталей менша, ніж у дрібнозернистих. Метали і сплави з неоднорідною структурою, наприклад, сірий чавун, мають знижену чутливість до концентрації напружень внаслідок того, що структурна неоднорідність є внутрішнім джерелом концентрації напруження і знижує межу витривалості гладких зразків, тому зовнішні концентратори вже мало впливають на межу витривалості.

Коефіцієнти чутливості до концентрації напруження, як показують експерименти, залежать не тільки від механічних властивостей, але й від конструктивної форми самої деталі, а також розподілу в ній напруження.

Вплив концентрації напружень у розрахунках деталей машин, які піддаються дії змінних напружень з асиметричним циклом, слід враховувати на основі експериментальних даних, оскільки теоретично це питання поки не вирішено.

16.3.2. Вплив розмірів (масштабний фактор)

Ефективність концентрації напружень пов'язана з абсолютними розмірами перетину деталі, а саме: зі збільшенням розмірів деталі при збереженні її геометричної подібності, значення ефективних коефіцієнтів концентрації напруження збільшуються.

Як показують результати експериментів, зі збільшенням діаметра зразка понад 30—40 мм, подальше зростання ефективних коефіцієнтів концентрації практично припиняється. Можна вважати, що після досягнення деякого розміру перетину

ефективний коефіцієнт не відрізняється від теоретичного, тобто $k_\sigma = \alpha_k$. Для легованих сталей з межею міцності $\sigma_s \geq 1200 \text{ МПа}$ дорівнюють вказаних коефіцієнтів при середніх рівнях концентрації напружень $\alpha_k = 2 \div 3$ досягається вже при $d = 40 \div 50 \text{ мм}$. Що стосується вуглецевих сталей, то у них граничний розмір, після якого $k_\sigma = \alpha_k$, виявляється значно більшим.

Абсолютні розміри перетинів деталі разом із впливом на ефективність концентрації напружень, істотно впливають і на межі витривалості зразків без концентрації напружень. При цьому зі зростанням абсолютних розмірів перерізів, межі витривалості знижуються. Відношення межі витривалості деталі розміром d до межі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ($d_0 = 7 \div 10 \text{ мм}$), називають *коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перетину* і стосовно нормальних напружень позначають так

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \quad (16.9)$$

Коефіцієнти впливу абсолютних розмірів перетину можна визначати і на зразках із концентрацією напружень. В цьому випадку

$$\varepsilon_{\sigma_k} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}} \quad (16.10)$$

причому деталь розміром d і зразок малого розміру d_0 повинні бути геометрично подібними.

Для розрахунку елементів машин з урахуванням впливу розмірів деталі як за наявності концентраторів напруження, так і без них існують спеціальні графіки. Зниження меж витривалості зі зростанням абсолютних розмірів перерізів деталі також можна пояснити впливом таких факторів:

- зменшенням механічної міцності матеріалу в міру збільшення діаметра заготовок, навіть за умови дотримання їх належної термічної обробки;
- зміною властивостей поверхневого шару після механічної обробки, оскільки ці зміни виявляються різними при різних розмірах деталі;
- неоднорідністю механічних властивостей і напружень у різних зернах в зв'язку з полікристалічною структурою металу і впливаючого звідси підвищення ймовірності більш раннього втомного руйнування зі зростанням розмірів деталі – цей фактор, мабуть, є головним.

Опір втомленості матеріалу оцінюється за межею витривалості $(\sigma_{-1})_{d_0}$, що визначається на гладких лабораторних зразках малого діаметра, а для уявлення про міцність деталі при змінних напруженнях необхідно знати її межу витривалості $(\sigma_{-1k})_{d_0}$. Тому вводять додаткове поняття *ефективного коефіцієнта концентрації напружень деталі* $(k_\sigma)_d$, що визначається за формулою:

$$(k_\sigma)_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1k})_d} \quad (16.11)$$

Можна помітити, що ступінь впливу концентрації напружень на межі витривалості залежить від виду напруженого стану. При циклічному крученні, наприклад, ефективні коефіцієнти концентрації виявляються, як правило, більш низькими, ніж при згині для одних і тих же конструктивних форм, Співвідношення між коефіцієнтами при згині й крученні можна виразити наближеною формулою:

$$k_{\tau} = 1 + 0,6(k_{\sigma} - 1) . \quad (16.12)$$

16.3.3. Вплив стану поверхні

У більшості випадків поверхневі шари елемента конструкції, які знаходяться під дією циклічних навантажень, є більш напруженими, ніж внутрішні (зокрема, це має місце при згині й крученні). Крім того, поверхня деталі майже завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної обробки, а також з корозією внаслідок дії навколишнього середовища. Тому втомні тріщини, як правило, починаються з поверхні, а її погана якість призводить до зниження опору втомленості.

Вплив стану обробленої поверхні на витривалість оцінюється коефіцієнтом β , який дорівнює відношенню межі витривалості випробовуваного зразка з певною обробкою поверхні до межі витривалості ретельно відполірованого.

Межа витривалості сталених зразків при грубому обточуванні знижується на 40 %, а за наявності на поверхні окалини — на 70 %.

Шкідливий вплив мікронерівностей поверхні у багатьох випадках пом'якшується пластичною деформацією, яка викликається в поверхневому шарі механічною обробкою, що розповсюджується на деяку глибину, залежну від режимів різання, зокрема, від величини подачі. При грубому обточуванні вона може досягати 1 мм і більш, а при шліфуванні й поліруванні вимірюється сотими частками міліметра і мікрометрами. Пластична деформація поверхневого шару може підвищити межу витривалості на 10—20 %.

На межу витривалості істотно впливає корозія. Цей вплив буде різним у тому випадку, коли метал, який піддавався корозії до випробовування на втомленість, не піддається їй при випробовуваннях, і тоді, коли метал піддається корозії під час випробовувань. В обох вказаних випадках, особливо в другому, корозія викликає різке зниження меж витривалості (до 70—80 %). При цьому зниження межі витривалості за наявності корозії проявляється тим сильніше, чим вища межа міцності металу і чим більша схильність його до корозії.

Вплив корозії при розрахунку можна врахувати коефіцієнтом β_k , що є відношенням межі витривалості σ_{-1}^k зразка, схильного до корозії, до межі витривалості σ_{-1} полірованого зразка, тобто $\beta_k = \sigma_{-1}^k / \sigma_{-1}$.

Причиною такого різкого зниження витривалості внаслідок корозії є корозійні пошкодження поверхні, які викликають значну концентрацію напружень, а також ослаблення опору, утворенню тріщин.

16.3.4. Вплив температури

З підвищенням температури, межа витривалості зазвичай падає, а з пониженням її — росте як у гладких зразків, так і у зразків із концентраторами.

Для сталі при температурі вище 300 °С спостерігається пониження межі втомленості приблизно на 15—20 %, а на кожні 100 °С підвищенні температури. Щоправда, у деяких сталей при підвищенні температури від 20 до 300 °С — межа

втомленості підвищується. Проте підвищення, мабуть, пов'язано з фізико-хімічними процесами, які відбуваються при одночасному впливі нагрівання та змінних напружень.

Це ще раз вказує на принципову відмінність між втомним і крихким руйнуваннями, шляхом відриву при статичних і ударних навантаженнях.

16.4. Розрахунок на міцність при повторнозмінних напруженнях

У разі простих видів деформації при зміні напруження в деталі за симетричним циклом запас міцності при дії, наприклад, нормальних напружень можна обчислити за формулою:

$$n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a},$$

де $(\sigma_{-1k})_d$ — межа витривалості деталі при розтягу-стиску, або при згині;

σ_a — номінальні фактично діючі знакозмінні напруження.

Для розрахунку на міцність при змінних навантаженнях у разі складного напруженого стану можна використовувати відповідні теорії міцності. При цьому для матеріалів у пластичному стані, як відомо, застосовують третю і четверту теорії міцності. В даному випадку ці теорії матимуть такий вигляд:

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2}, \quad (16.13)$$

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}. \quad (16.14)$$

Відповідно до експериментальних даних, умова міцності у формі еліптичної залежності (див. рис.16.8) при згині і крученні виражається формулою (16.6), а для деталі достатньо великих розмірів з концентрацією напруження – формулою:

$$(\sigma_{-1k})_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[\frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\tau_{-1k})_d} \right]^2 \tau_a^2} \quad (16.15)$$

або

$$\boxed{\frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1k})_d^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1k})_d^2} = 1}. \quad (16.16)$$

Тоді, маючи на увазі, що $n_{\sigma} = (\sigma_{-1k})_d / \sigma_a$ — коефіцієнт, який характеризує запас міцності тільки за нормальними напруженнями, а $n_{\tau} = (\tau_{-1k})_d / \tau_a$ — коефіцієнт, що характеризує міцність тільки за дотичними напруженнями, на підставі співвідношення (16.16) матимемо:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2},$$

звідки запас міцності n при складному напруженому стані, наприклад, при сумісній дії згину і кручення, визначиться формулою:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (16.17)$$

Визначаючи запаси міцності при асиметричних циклах для будь-якого виду циклічного навантаження (згину, розтягу-стиску, кручення), виходять зі схематичної діаграми граничних напружень для зразків без концентрації напруження (рис.16.9).

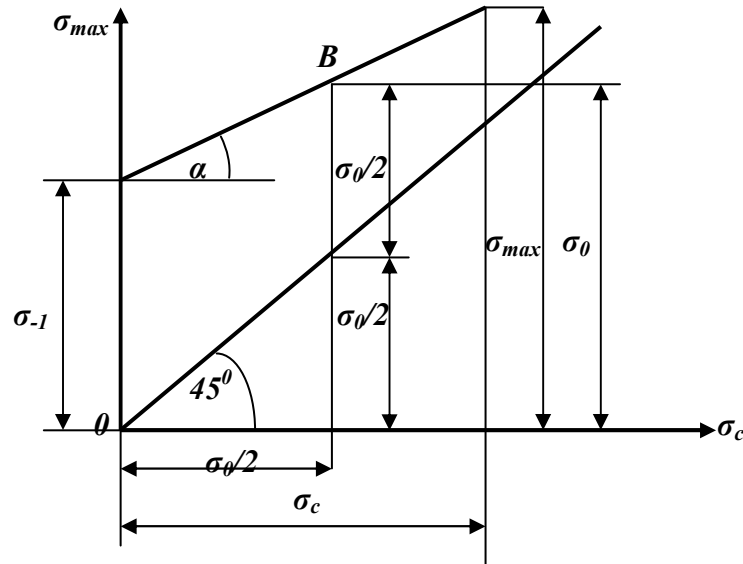


Рис.16.9. Схематизована діаграма граничних напружень для зразків без концентраторів

Аналітичний вираз кривої граничних напружень у координатах $\sigma_c - \sigma_{\max}$ можна виразити рівнянням прямої, що проходить через дві точки A та B із координатами $(0, \sigma_{-1})$, $(\sigma_0/2, \sigma_0/2)$ і записати у вигляді $\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \sigma_c \operatorname{tg} \alpha$, згідно з рис.16.9

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0/2},$$

тоді:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_c = \sigma_{-1} + \left(1 - \frac{2\sigma_0 - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \sigma_c$$

і, позначаючи:

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (16.18)$$

запишемо рівняння кривої граничних напружень зразка без концентрації напружень так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \sigma_c. \quad (16.19)$$

При дії дотичних напружень відповідне рівняння має аналогічний вигляд:

$$\tau_{\max} = \tau_{-1} + (1 - \psi_\tau) \tau_c. \quad (16.20)$$

Значення ψ_σ і ψ_τ для ряду сталей при різних видах деформації залежно від межі міцності наведено в табл. 16.1.

Враховуючи вплив на межу витривалості при асиметричному циклі різних факторів, у тому числі концентрації напружень, абсолютних розмірів перерізу, стану поверхні і т. д., виходять з експериментально встановлених закономірностей, що полягають у тому, що відношення граничних амплітуд напружень гладкого зразка і даної деталі залишається постійним, незалежно від величини середнього напруження циклу. На підставі цього можна побудувати схематизовану діаграму граничних напружень для деталі (рис.16.10).

Цю побудову також можна одержати, виходячи з таких аналітичних уявлень.

Відповідно до виразу (16.18) гранична амплітуда напруження зразка виражається формулою:

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_c = [\sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma)\sigma_c] - \sigma_c = \sigma_{-1} - \psi_\sigma\sigma_c,$$

а гранична амплітуда напруження для деталі $(\sigma_{ak})_d$ на підставі вищенаведеної закономірності про вплив різних факторів тільки на змінну складову напружень буде в $(k_\sigma)_d$ разів меншою, тобто:

$$(\sigma_{ak})_d = \frac{\sigma_a}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma\sigma_c}{(k_\sigma)_d}. \quad (16.21)$$

Тоді рівняння кривої граничних напруження для деталі може бути записано у вигляді:

$$(\sigma_{\max})_d + \sigma_c = \sigma_c + \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma\sigma_c}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[1 - \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_d}\right]\sigma_c. \quad (16.22)$$

Припустимо, що деталь у небезпечній точці піддається дії змінних напруження з коефіцієнтом асиметрії r , причому відомі відповідно σ_{\max} і σ_c циклу. Як наголошувалося раніше, всі цикли відповідні $r = const$, лежать на одній прямій. За вказаними даними на діаграмі рис.16.11 заданий напружений стан характеризується точкою M . Отже, всі точки, які лежать на промені, проведеному з початку координат через дану точку M , мають коефіцієнт асиметрії, який дорівнює r . Точка перетину цього променя з кривою втомленості має ординату, яка дорівнює межі витривалості $(\sigma_{rk})_d$. Отже, коефіцієнт запасу

$$n_\sigma = \frac{\sigma^N}{\sigma^M} = \frac{(\sigma_{rk})_d}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_c^N}{\sigma_c^M} = \frac{\sigma_a^N}{\sigma_a^M}, \quad (16.23)$$

де $(\sigma_{rk})_d$ — межа витривалості деталі при асиметричному циклі; $\sigma_{\max} = \sigma^M$ — максимальне напруження деталі.

Значення величин ψ_σ та ψ_τ
для деяких сталей

Таблиця 16.1.

$\sigma_s, \text{МПа}$	ψ_σ	ψ_τ
350-550	0	0
520-750	0,05	0
700-1000	0,10	0,05
1000-1200	0,20	0,10
1200-1400	0,25	0,15

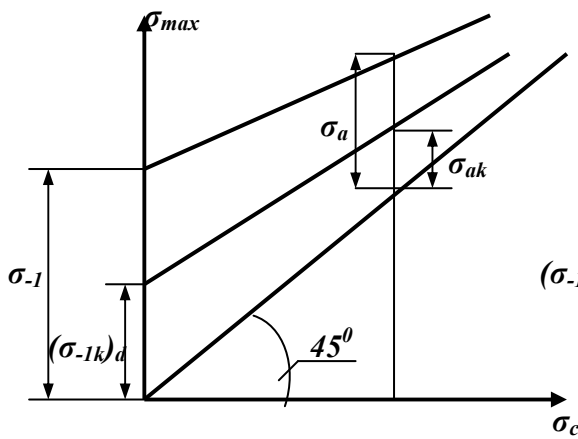


Рис.16.10. Схематизована діаграма граничних напружень для деталі

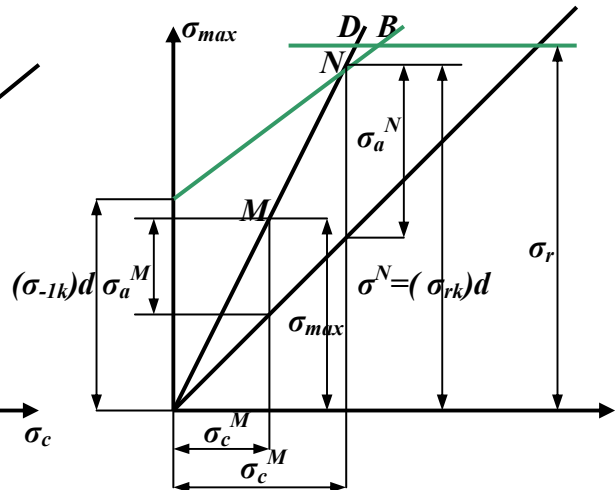


Рис.16.11. Діаграма напруженого стану, заданого точкою M

При перетині променя OD із прямою AB граничних напружень у точці N , максимальне напруження σ_{\max} співпадає з максимальним граничним напруженням $\sigma^N = (\sigma_{rk})_d$, тобто:

$$\sigma'_{\max} = \sigma^N.$$

З другого боку, на підставі рівняння (16.23)

$$\sigma'_{\max} = \frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} \sigma_c^N, \quad (16.24)$$

$$\frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} \sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[1 - \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right] \sigma_c^N.$$

Звідси знаходимо абсцису точки N :

$$\sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \left[\frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} - 1 + \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right]} = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c^M}{(k_\sigma)_d (\sigma^M - \sigma_c^M) + \psi_\sigma \sigma_c^M}.$$

Оскільки, $\sigma^M - \sigma_c^M = \sigma_a^M$, то остання формула перетворюється так:

$$\sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c^M}{(k_\sigma)_d \sigma_a^M + \psi_\sigma \sigma_c^M}.$$

Підставляючи одержаний вираз σ_c^N у формулу (16.24), знайдемо вираз для максимального граничного напруження в деталі (ординату точки N):

$$\sigma'_{\max} = \sigma^N = (\sigma_{rk})_d = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_c^M}{(k_\sigma)_d \sigma_a^M + \psi_\sigma \sigma_c^M}.$$

Тоді остаточний вираз для запасу міцності буде таким:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma^N}{\sigma^M} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_d \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_c^M} \quad (16.25)$$

Аналогічно при крученні:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau})_d \tau_a + \psi_{\tau} \tau_c^M} \quad (16.26)$$

Якщо асиметрія циклу дуже велика, то роль змінних напружень при оцінюванні міцності може виявитися неістотною і розрахунок слід проводити за граничним станом, як при статичному навантаженні. У зв'язку з цим, разом із запасом міцності за втомленістю (16.25), (16.26) слід визначати запас міцності й по несучій здатності при статичному навантаженні.

Величина запасів міцності при розрахунку на витривалість залежить від точності визначень зусиль і напружень, від однорідності матеріалів, якості технології виготовлення деталі і інших факторів. При підвищеній точності розрахунку (з широким використанням експериментальних даних для визначення зусиль, напружень і характеристик міцності), при достатній однорідності матеріалу й високій якості технологічних процесів – приймається запас міцності $n = 1,3 \div 1,4$. Для звичайної точності розрахунку (без належної експериментальної перевірки зусиль і напружень), при помірній однорідності матеріалу, $n = 1,4 \div 1,7$. При зниженій точності розрахунку (відсутності експериментальної перевірки зусиль і напружень) і зниженій однорідності матеріалу, особливо для литва і деталей значних розмірів, $n = 1,7 \text{ — } 3,0$.

Найбільш достовірні дані про необхідні запаси міцності деталі можуть бути встановлені на основі результатів натурних випробовувань деталей або досвіду експлуатації машин з деталями цього типу.

17. Основи механіки руйнування

17.1. Загальні поняття

Механіка руйнування – це теорія, в якій розглядаються закономірності зародження і розвитку тріщин. Утворилася порівняно недавно, приблизно на початку другої половини ХХ століття. Вона вивчає закони розділення твердих тіл на частини під дією зовнішніх, силових факторів та інших причин.

Руйнування буває *частковим і повним*. *Частковому руйнуванню* тіла характерне пошкодження матеріалу за рахунок виникнення в ньому окремих тріщин або розподілених за об'ємом неоднорідностей, які знижують його міцність. При *повному руйнуванні* відбувається розділення тіла на частини. Отже, руйнування є найхарактернішим показником порушення міцності твердого тіла.

Розрізняють руйнування двох видів — *пластичне і крихке*. *Пластичне руйнування* відбувається після істотної пластичної деформації, яка протікає по всьому об'єму тіла або на значній його частині, і є результатом вичерпання здатності матеріалу чинити опір пластичній деформації. *Крихке* – це руйнування, яке відбувається без пластичної деформації. Виділяють також *квазікрихке*, при якому може бути деяка пластична зона перед краєм тріщини. Воно відбувається в найослабленішому перерізі при напруженні, вищому за межу текучості, але нижчому за межу міцності. При крихкому руйнуванні швидкість розповсюдження тріщини складає 0,2—0,5 швидкості звуку, тобто достатньо велика, а злам має кристалічний вигляд. При пластичному руйнуванні швидкість тріщини мала і дорівнює не більше ніж 0,05 швидкості звуку, а злам має волокнистий вигляд.

У теорії руйнування розглядають також *втомне руйнування*, яке відбувається внаслідок поступового розвитку тріщини при повторно-змінному циклічному навантаженні, яке розглядалось у попередній главі. При цьому тріщини в матеріалі починають розвиватися задовго до повного руйнування, незалежно від того, пластичне це буде руйнування чи крихке.

Особливо велике практичне значення в інженерній справі має вивчення крихкого руйнування конструкцій, яке походить від швидкого розповсюдження тріщин при середніх напруженнях нижчих за межу текучості, таких, що не вважаються у зв'язку з цим небезпечними. Це свідчить про те, що розглянутих до цього класичних методів розрахунку на міцність за пружним і пластичним станами недостатньо. Тому для побудови теорії руйнування тільки елементарних методів опору матеріалів недостатньо й для розгляду цієї теорії використовують методи теорії пружності і теорії пластичності.

18.2. Крихке руйнування. Задача Гріффітса

Інженерна практика показує, що через концентрацію напружень, неточності збирання, впливу середовища і т.п., стадія руйнування, яка складається з виникнення і розвитку тріщини, починається задовго до вичерпання несучої здатності деталі. При цьому міцність матеріалу деталі не реалізується. В результаті поступового зростання тріщини тривалість процесу руйнування від початку до повного руйнування може займати 90 % часу «життя» деталі й більше. От чому практично цікава не стільки наявність тріщини, скільки швидкість її розвитку в тих чи інших умовах. У зв'язку з цим основна завдання механіки руйнування полягає у вивченні міцності тіл із тріщинами, геометрії тріщин, а також розробка критеріїв несучої здатності елементів конструкцій з тріщинами.

Розрізняють три найпростіші типи розвитку тріщини (рис.17.1). При деформації

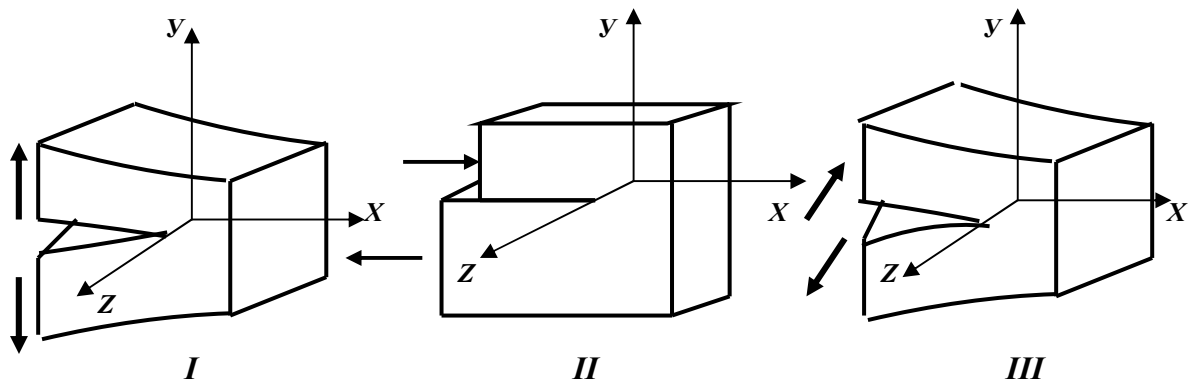


Рис.17.1. Типи розвитку тріщин: I – тріщина відриву; II – тріщина при поперечному зсуві; III – тріщина при поздовжньому зсуві

розтягу (схема I) виникає тріщина відриву, коли її поверхні зміщуються (розходяться) в напрямках, перпендикулярних до поверхні тріщини; при деформації поперечного зсуву (схема II) поверхні берегів тріщини зміщуються впоперек її передньої кромки; при навантаженні за схемою III утворюються тріщини поздовжнього зсуву, при якому точки поверхні тріщини зміщуються вздовж її передньої кромки. Очевидно, якщо на тіло з тріщиною діє довільне навантаження в області дії закону Гука, на підставі принципу суперпозиції будь-який зсув берегів тріщини, що розвивається, можна представити у вигляді суми приведених трьох типів зсувів.

Крихке руйнування пов'язано з виникненням у матеріалі тріщин, ініційованих дефектами в структурі матеріалу, станом поверхні в результаті обробки або корозії, дією повторнозмінних навантажень (втомні тріщини) і т.п. Тріщини, які виникають, спочатку розвиваються в часі поволі, а потім — швидко. Зростання тріщин з часом може відбуватися і при постійному навантаженні.

Основоположником досліджень про розвиток крихких тріщин був А. Гріффітс, який розглянув умови розвитку одиначної тріщини в пластині нескінченних розмірів й одиначної товщини, що знаходиться в умовах одновісного розтягу (рис.17.2).

Вимагалось встановити, при якому значенні зовнішніх напружень $\sigma = \sigma_{кр}$, прикладених до пластини на нескінченності, тріщина з початковою довжиною $2l$ стане нестійкою, тобто почне швидко розповсюджуватися при постійному напруженні σ .

Для зростання тріщини потрібно затратити деяку роботу на подолання сил взаємодії сусідніх шарів. Позначимо через γ роботу, необхідну для утворення одиниці нової поверхні. Тоді поверхнева енергія даної пластини, обумовлена утворенням тріщини

$$G = 4\gamma l. \quad (17.1)$$

Значення γ (густина поверхневої енергії) можна вважати константою матеріалу. Її визначають експериментально.

Потенціальна енергія деформації пластини в зв'язку з утворенням у ній тріщини зменшується на величину:

$$W = \frac{\pi\sigma^2 l^2}{E}, \quad (17.2)$$

тобто є різницею потенціальних енергій деформації пластини без тріщини і з тріщиною у вигляді витягнутого еліпса.

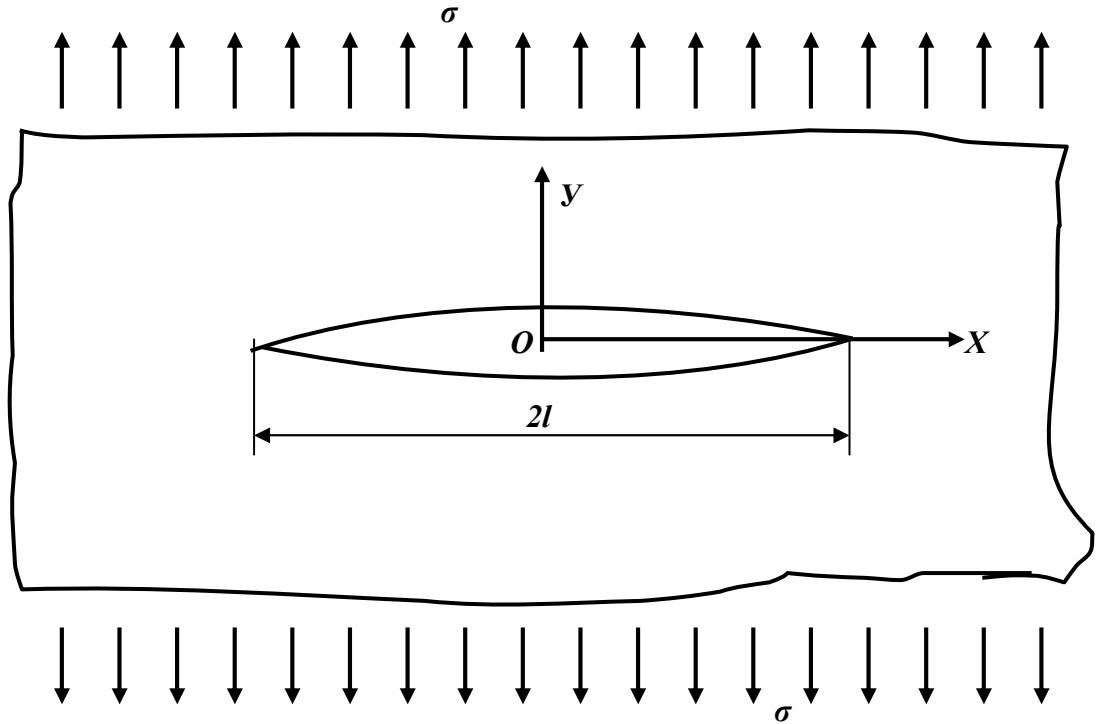


Рис.17.2. Тріщина в умовах одновісного розтягу

Виходячи із закону збереження енергії, А. Гріффітс запропонував таке формулювання критерію руйнування: *тріщина починає розповсюджуватися у тому випадку, коли при варіації її довжини $\delta l > 0$, приріст поверхневої енергії компенсується відповідною кількістю потенціальної енергії деформації* (вважають що інші види енергії відсутні):

$$\delta(\Gamma + W) = 0, \quad (17.3)$$

де з урахуванням (17.1) і (17.2)

$$\delta\Gamma = \frac{\partial}{\partial l}(4\gamma)\delta l = 4\gamma\delta l,$$

$$\delta W = \frac{\partial}{\partial l}\left(-\frac{\pi\sigma^2 l^2}{E}\right)\delta l = -\frac{2\pi\sigma^2 l^2}{E}\delta l. \quad (17.4)$$

Приріст поверхневої енергії $\delta\Gamma$ — величина додатна - вона характеризує збільшення внутрішньої енергії тіла, тоді як приріст потенціальної енергії деформації — величина від'ємна, оскільки ця частина енергії виділяється тілом (завдяки релаксації напружень у зв'язку з появою нових, вільних від навантаження поверхонь тіла).

Підставляючи (17.4) в (17.3), одержимо:

$$2\gamma - \frac{\pi\sigma^2 l^2}{E} = 0. \quad (17.5)$$

Звідси знаходимо

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l}}. \quad (17.6)$$

У разі плоскої деформації (коли $\varepsilon_z = 0$) в останній формулі модуль пружності E слід замінити на $E/(1-\mu^2)$. Тоді:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}} \quad (17.7)$$

Зміна співвідношень енергій, які входять у доданки (17.3), із збільшенням довжини тріщини відображена у вигляді графіків (рис.17.3). Максимальному значенню повної енергії відповідає критична довжина тріщини l_k .

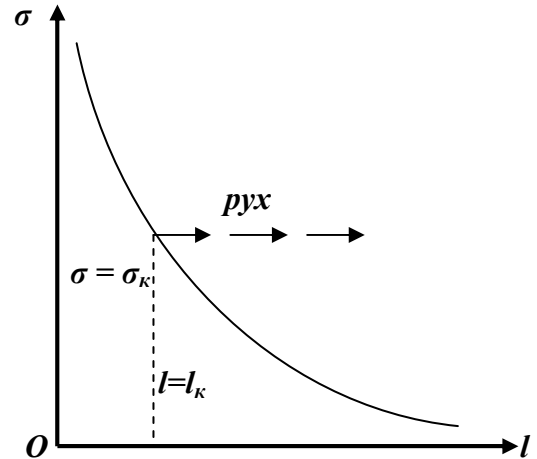
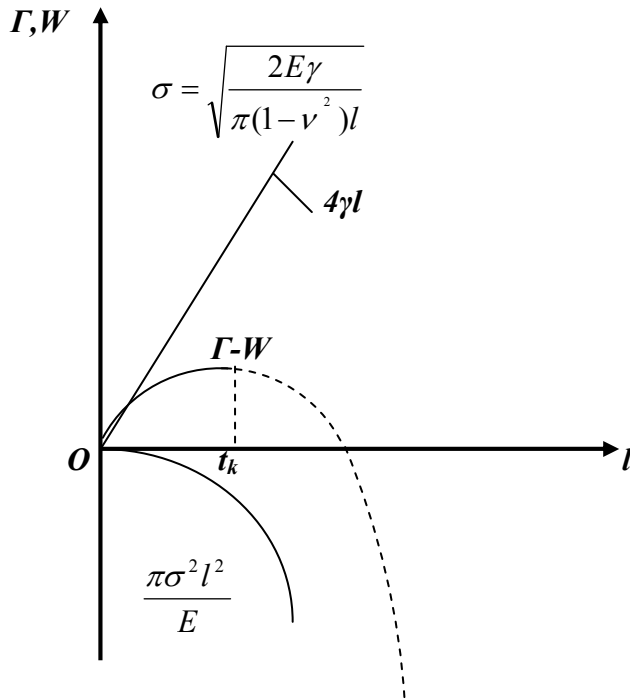


Рис.17.3. Зміна співвідношень енергій **Рис.17.4. Залежність напруження від l**

Формули (17.6), (17.7) визначають критичне напруження, при якому відбувається мимовільне, без додаткової роботи зовнішніх сил зростання в тілі тріщини завдовжки $2l$. Залежність прикладеного напруження від довжини тріщини наведено на рис.17.4.

Теорія Гріффітса не враховує докритичного росту тріщини, що спостерігається експериментально. Проте ця теорія заслуговує великої уваги, оскільки вона дозволяє виразити крихку міцність через фізичні й механічні властивості матеріалу, показує, що максимальне руйнуюче напруження може утворитися не при виникненні тріщини, а після досягнення нею деяких критичних розмірів. Це свідчить про те, що існують безпечні тріщини, які не розвиваються, але можуть перейти в небезпечні за рахунок окрихчування матеріалу в результаті пониження температури, динамічної дії навантаження, старіння матеріалу і т.п.

З теорії Гріффітса виходить, що наявність у тій або іншій деталі тріщини — це не є причиною негайного виходу деталі з ладу. В принципі, можливо за критичним значенням довжини тріщини і характеру зовнішнього навантаження, вводячи відповідний запас на наявність тріщини, встановлювати допуск на розмір тріщини, з якою деталь може працювати відведений час. Оскільки не кожна тріщина небезпечна, механіка руйнування може розвиватися як наука, яка створює надійні методи захисту конструкцій від крихкого руйнування.

Теорію Гріффітса можна застосовувати також для металів і сплавів, які мають певну пластичність. У цих випадках слід урахувати енергію, яка витрачається на

пластичну деформацію. З дослідів видно, що пластична деформація розвивається поблизу вершини тріщини в порівняно тонкому шарі, який її оточує. Товщина шару пластично деформованого металу залежить від умов навантаження, властивостей матеріалу, і може складати від декількох десятків мікрометрів до десятих часток міліметра.

На основі концепції енергетичного балансу Гріффітса Е.Орван і Д.Ірвін запропонували додатково врахувати енергію пластичної деформації, ввівши у формулу (17.6) замість дійсної питомої поверхневої енергії γ ефективну поверхневу енергію $\gamma_{ef} = \gamma + \gamma_p$ — роботу пластичної деформації при утворенні одиниці поверхні.

Таким чином, умова квазікрихкого руйнування металів набуває вигляду:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_{ef}}{\pi l}}. \quad (17.8)$$

Досліди показують, що для сталей $\gamma_p \approx 10^3 \gamma$. Отже, в (17.8) можна знехтувати величиною γ і прийняти $\gamma_{ef} \approx \gamma_p$. Для кількісної оцінки помітимо, що $\gamma_p \sim 200 \text{ Дж} / \text{м}^2$, а $\gamma \sim 0,1 \text{ Дж} / \text{м}^2$.

17.3. Методика експериментального визначення тріщиностійкості конструкційних матеріалів

Граничну рівновагу тріщиноподібних дефектів у конструкції за таких умов експлуатації визначають опором руйнуванню (тріщиностійкістю) матеріалу, з якого її виготовлено. Як міру тріщиностійкості, стосовно найнебезпечніших і поширеніших тріщин нормального відриву, частіше за все використовують критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень, що відповідає моменту старту тріщини при дотриманні в її вершині умов плоскої деформації.

Для визначення цієї міри для даного матеріалу використовують спеціальні компактні зразки з тріщиною.

Тріщину в зразку вирощують із вершини вузької щілини при циклічному навантаженні зразка. Режим вирощування і довжина тріщини повинні відповідати певним вимогам, які забезпечують отримання достовірних значень характеристик.

Навантажуючи зразок зростаючим зусиллям, реєструють діаграму «навантаження F — зсув берегів тріщини v ». Критичний коефіцієнт інтенсивності напружень матеріалу, що досліджується, розраховують за навантаженням F , яке відповідає на діаграмі $F — v$ старту тріщини, з використанням деякої, залежної від конфігурації зразка функції його розмірів і довжини тріщини.

Такий підхід дозволяє комплексно, з єдиних методичних позицій, оцінювати тріщиностійкість матеріалу як в крихкому, так і в пластичному станах.

18. Контактні напруження

18.1. Основні поняття

Напруження та деформації, які виникають при взаємному стисканні двох тіл, що дотикаються, називають *контактними*. Передача тиску в зоні контакту елементів конструкції проходить через малі площадки. Матеріал поблизу такої площадки, не маючи можливості вільно деформуватися, знаходиться у складному напруженому стані (рис. 18.1).

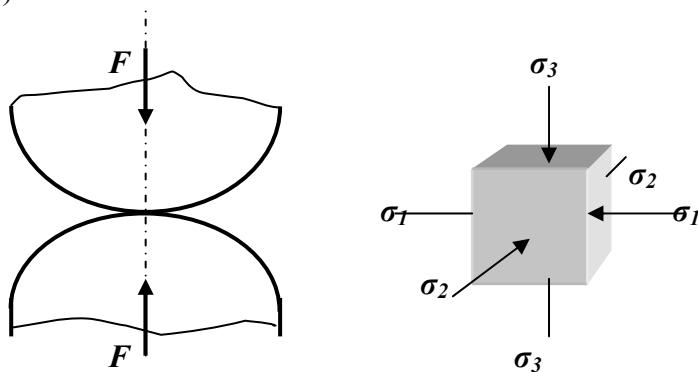


Рис.18.1. Складний напружений стан у зоні контакту

Контактні напруження мають явно місцевий характер і швидко зменшуються при віддаленні від місця контакту. Питання про контактні напруження є дуже актуальним при вивченні напруженого стану в таких деталях та вузлах як кулькові й роликові підшипники, зубчасті колеса, колеса та рейки у залізничному транспорті та ін.

Вперше цими проблемами зацікавився німецький вчений Г. Герц.

Герц Генріх Рудольф (22.II.1857–1.I.1894) – видатний фізик та механік. Основні роботи присвячені електродинаміці. Написав монографію “Принципи механіки”. Він показав, що незалежними основними поняттями, через які можна виразити всі решта (включаючи силу та енергію), є поняття часу, простору і маси. В галузі механіки деформованого тіла був засновником досліджень про контактні напруження.

Подальший розвиток даних питань – заслуга наших вітчизняних вчених, зокрема М.М. Беляєва.

Беляєв Микола Михайлович (5.II.1890 – 25.IV.1944) – видатний механік, чл.-кор.АН СРСР. Дослідження відносяться до теорії міцності. Вивчав теорію контактних напружень. Вперше поставив та розв’язав задачу про стійкість призматичних стержнів під дією поздовжніх змінних сил. Досліджував явища повзучості та релаксації при високих температурах. Розв’язав ряд важливих задач пов’язаних із питаннями міцності залізничних рейок, деталей рухомого складу залізниць, бето-

ну. Розробив основи методики динамічного випробовування мостів. Автор фундаментального підручника з опору матеріалів.

Найважливіші результати, отримані за допомогою математичної теорії пружності, та наведені нижче, зроблені на основі таких гіпотез:

- у зоні контакту навантаження створюють тільки пружні деформації, що відповідають закону Гука;
- площадки контакту малі в порівнянні з поверхнею тіл, які взаємодіють;
- сили тиску, розподілені по поверхні контакту, нормальні до цієї поверхні.

18.2. Обчислення контактних напружень

18.2.1. Стиск куль

У випадку взаємного стиску силами F двох куль із радіусами R_1 та R_2 (рис. 18.2) утворюється кругла площадка контакту, радіус якої визначають за формулою:

$$a = 0,88_3 \sqrt{F \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \quad (18.1)$$

де E_1 та E_2 – модулі пружності матеріалів куль.

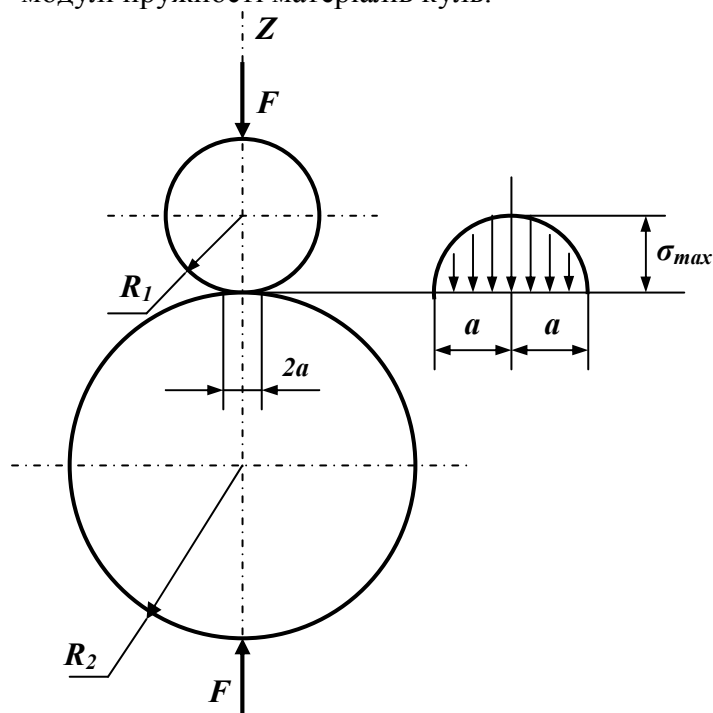


Рис. 18.2. Взаємний стиск двох куль

Стискаючі напруження по площадці контакту розподілені у вигляді напівсфери і найбільшого свого значення вони досягають у центрі площадки контакту.

$$\sigma_3 = -|\sigma_{\max}| = -1,5 \frac{F}{\pi a^2} = -0,3883 \sqrt{4F \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (18.2)$$

Два інших головних напруження в центрі площадки

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8 |\sigma_{\max}|.$$

Таким чином, у найбільш напруженій точці площадки контакту матеріал знаходиться в стані, близькому до всестороннього стиску. Внаслідок цього в зоні контакту матеріал може витримати досить великі тиски без проявів помітних залишкових деформацій. Наприклад, якщо скориставшись IV теорією міцності, обчислити максимальне напруження в центрі площадки контакту, при якому вперше з'являються залишкові деформації, то враховуючи:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_m,$$

підставивши значення головних напружень, отримаємо:

$$0,2\sigma_{\max} = \sigma_m \quad \text{або} \quad \sigma_{\max} = 5\sigma_m.$$

Для закаленої хромистої сталі, яку використовують при виготовленні кулькових підшипників, замість межі текучості приймемо межу пропорційності $\sigma_{m\phi} \approx 1000 \text{ МПа}$, тоді $\sigma_{\max} \approx 5000 \text{ МПа}$.

Дослідження доводять, що найбільш небезпечна точка знаходиться на осі Z на глибині, яка приблизно дорівнює половині радіуса площадки контакту. Головні напруження в цій точці:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= -0,18\sigma_{\max}, \\ \sigma_3 &= -0,8\sigma_{\max}, \end{aligned} \quad (18.3)$$

де σ_{\max} – найбільше напруження в центрі площадки контакту, яке визначається за формулою (18.2).

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці становить

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31 \cdot \sigma_{\max}. \quad (18.4)$$

Змінюючи у формулі (18.2) знак при R_2 на протилежний, отримаємо значення σ_{\max} у випадку тиску кулі на увігнуту сферичну поверхню (рис.18.3).

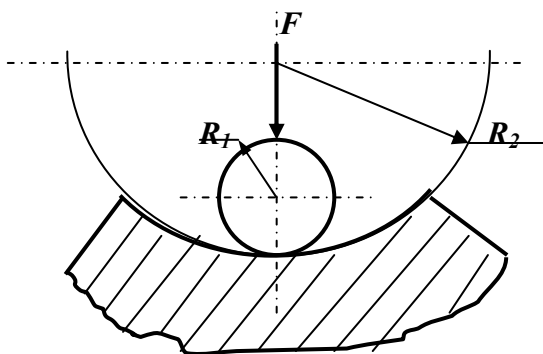


Рис.18.3. Тиск кулі на увігнуту сферичну поверхню

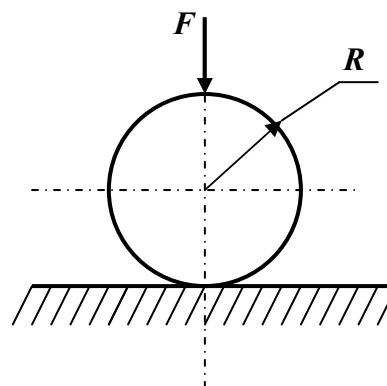


Рис.18.4. Тиск кулі на площину

$$\sigma_{\max} = 0,3883 \sqrt{4F \frac{E_1^2 E_2^2 \cdot (R_1 - R_2)^2}{(E_1 + E_2)^2 \cdot R_1^2 R_2^2}} \quad (18.5)$$

При взаємному стиску сфери та площини (рис.18.4), прийнявши $R_2 = \infty$, отримаємо:

$$\sigma_{\max} = 0,3883 \sqrt{4F \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2 \cdot R^2}} \quad (18.6)$$

18.2.2. Стиск циліндрів

При взаємному стиску двох циліндрів із паралельними утворюючими рівномірно розподіленим навантаженням q (рис.18.5) площадка контакту має вигляд вузького прямокутника, ширина якого визначається за формулою:

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \quad (18.7)$$

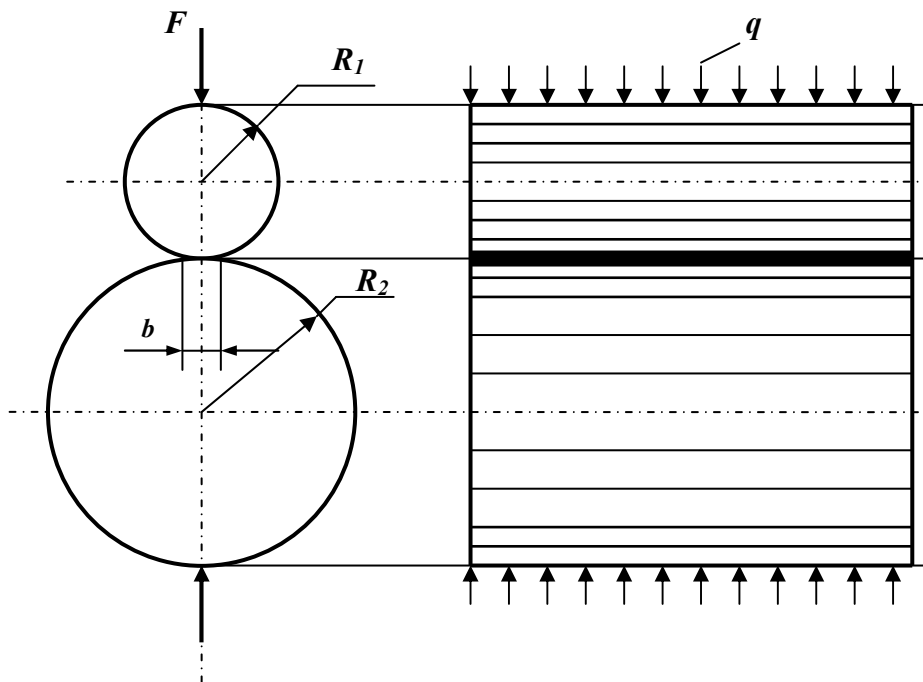


Рис. 18.5. Стиск циліндрів

Найбільше напруження стиску, яке діє в точках осі площадки контакту, виразиться як:

$$\sigma_{\max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \quad (18.8)$$

Аналіз напруженого стану доводить, що небезпечна точка розташовується на осі Z на глибині, що дорівнює $0,4$ ширини площадки контакту. Головні напруження в цій точці мають значення:

$$\sigma_1 = -0,180 \cdot \sigma_{\max}; \sigma_2 = -0,288 \cdot \sigma_{\max}; \sigma_3 = -0,780 \cdot \sigma_{\max} . \quad (18.9)$$

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{\max} = 0,3 \cdot \sigma_{\max} . \quad (18.10)$$

Змінюючи у формулі (18.8) знак R_2 на протилежний, отримуємо напруження у випадку тиску циліндра на увігнуту циліндричну поверхню. Напружений стан такого типу виникає, наприклад, між циліндричним шарніром та балансирами (рис.18.6).

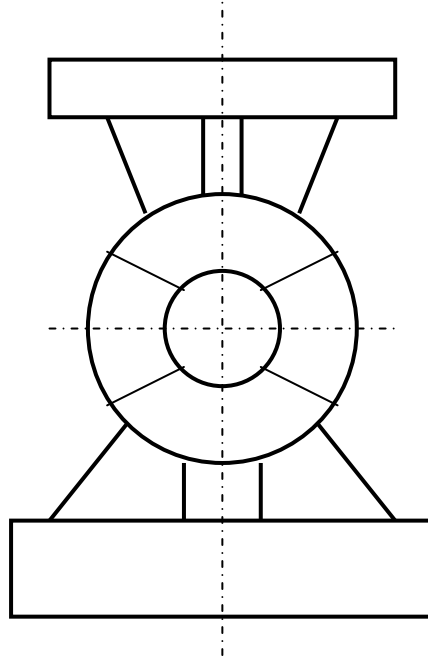


Рис.18.6. Циліндричний шарнір та балансири

При взаємному стиску циліндра та площини, прийнявши у формулі (18.8) $R_2 = \infty$, знайдемо, що:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R_1} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}} . \quad (18.11)$$

Наведені формули отримано при $\mu=0,3$. Однак для практичних розрахунків вони придатні й за інших значень коефіцієнта Пуассона.

18.2.3. Загальний випадок контакту двох тіл

Наведемо формули для загального випадку контакту двох тіл зроблених з однакового матеріалу.

Нехай у точці дотику обидва тіла мають спільну дотичну площину AB та загальну нормаль z , уздовж якої спрямовані сили F (рис.18.7) Позначимо радіуси кривизни в точці дотику першого тіла ρ_1 та ρ_1^1 , другого тіла ρ_2 та ρ_2^1 , причому $\rho_1 \leq \rho_1^1; \rho_2 \leq \rho_2^1$. *Головними кривизнами* називають найбільшу і найменшу кривизни, розташовані у двох взаємно перпендикулярних площинах, які проходять через центр кривизни. Радіуси кривизни вважаються додатними, якщо центри кривизни знаходяться у тілі.

Позначимо через φ кут між головними площинами кривизни тіл, в яких лежать менші радіуси ρ_1 та ρ_2 .

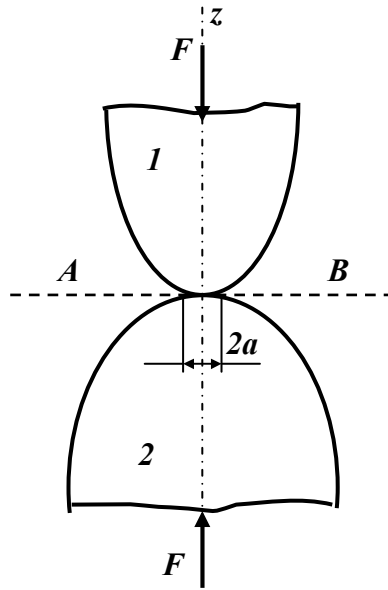


Рис.18.7. Загальний випадок контакту двох тіл

У загальному випадку площадка контакту є еліпсом із напівосями:

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3F(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}} \quad (18.12)$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3F(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}} \quad (18.13)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Значення коефіцієнтів α та β наведено в таблиці 18.1 як функції допоміжного кута ψ , який обчислюється за формулою:

$$\cos \Psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right) \cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}} \quad (18.14)$$

При цьому знак у чисельнику формули (18.14) вибирають таким чином, щоб знак $\cos \psi$ був додатнім.

Значення коефіцієнтів α та β

Таблиця 18.1

ψ°	α	β	ψ°	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

Найбільше напруження стиску в центрі площадки контакту

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{F}{\pi ab} \quad (18.15)$$

Найбезпечніша точка розташована на осі Z на деякій глибині, яка залежить від відношення (b/a) напівосей еліптичної площадки контакту. Однак найбільше дотичне напруження у небезпечній точці майже не залежить від вказаного співвідношення розмірів площадки, тому можна прийняти, що:

$$\tau_{\max} \approx 0,32 \sigma_{\max} \quad (18.16)$$

З наведених формул видно, що контактні напруження залежать від пружних властивостей матеріалів і не є лінійною функцією навантажень, наростаючи зі зростанням зовнішніх сил все більш повільно. Це пояснюється тим, що із збільшенням навантаження, збільшуються й розміри площадки контакту.

18.3. Перевірка міцності при контактних напруженнях

Враховуючи вигляд напруженого стану в небезпечних точках (всебічний стиск), перевірку міцності при контактних напруженнях слід проводити за третьою або четвертою теоріями міцності. Взагалі умову міцності можна записати у вигляді:

$$\sigma_{\text{екв}} = m \sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (18.17)$$

звідки

$$\sigma_{\max} \leq \frac{1}{m} [\sigma] = \sigma_{\text{конт}} \quad (18.18)$$

Тут $[\sigma]_{\text{конт}} = [\sigma] \frac{1}{m}$ – допустиме значення для найбільшого напруження в зоні контакту. Значення коефіцієнта m , який характеризує співвідношення напівосей еліптичної площадки контакту та вибраної теорії міцності, наведені в табл. 18.2.

Розрахунок на міцність елементів конструкцій у зонах контакту можна проводити так:

- визначити головні радіуси кривизни тіл, які контактують ($\rho_1, \rho_1^1, \rho_2, \rho_2^1$) та кут φ між головними площинами кривизни одного та другого тіла;
- обчислити за формулами (18.12) та (18.13) з урахуванням (18.14) розміри напівосей еліптичної площадки контакту;
- визначити за формулою (18.15) найбільше напруження стиску в центрі площадки контакту (у випадку круглої або прямокутної форми

- площини σ_{max} знаходять безпосередньо з формул (18.2) та (18.8), не визначаючи розмірів площини);
- провести розрахунок на міцність за формулою (18.18), вибравши значення коефіцієнта m із таблиці 18.2. (при цьому рекомендується використовувати IV теорію міцності).

Значення коефіцієнта „ m ”

Таблиця 18.2

b/a	$m = \sigma_{екв.III} / \sigma_{max}$	$m = \sigma_{екв.IV} / \sigma_{max}$
1 (коло)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (смуга)	0,600	0,557

Допустимі напруження в зоні контакту $[\sigma]_{конт}$ для роликів та кулькових підшипників з хромистої сталі приймають до 3500 – 5000 МПа, для рейкової сталі – до 800 – 1000 МПа.

В таблиці 18.3. наведено значення допустимих найбільших тисків на площині контакту при початковому контакті по лінії ($m = 0,557$) та статичній дії навантаження. У випадку початкового контакту в точці значення $(\sigma)_{конт}$ слід збільшити в 1,3 – 1,4 рази.

Значення найбільших допустимих тисків на площині контакту

Таблиця 18.3

Марка метала	σ_s (МПа)	Твердість по Бринелю, $HВ$	$[\sigma]_{конт}$ (МПа)
Сталь:			
30	480 – 600	180	850 – 1050
40	570 – 700	200	1000 – 1350
50	630 – 800	230	1050 – 1400
50Г	650 – 850	240	1100 – 1450
15Х	620 – 750	240	1050 – 1600
20Х	700 – 850	240	1200 – 1450
15ХФ	1600 – 1800	240	1350 – 1600
ШХ15	-	-	3800
Чавун:			
СЧ 21	960	180 – 207	800 – 900
СЧ 24	1000	187 – 217	900 – 1000
СЧ 28	1100	170 – 241	1000 – 1100
СЧ 32	1200	170 – 241	1100 – 1200
СЧ 35	1300	197 – 255	1200 – 1300
СЧ 38	1400	197 - 255	1300 - 1400

19. Висновки. Сучасні проблеми опору матеріалів

У цьому невеликому за обсягом посібнику викладено тільки основні положення курсу опору матеріалів, які можуть бути використані для розв'язання найпростіших задач міцності в інженерній практиці.

Хоча, в загальному, опір матеріалів відіграє в механіці деформівного твердого тіла ту ж саму досить спрощену роль, що й абетка в літературі, за допомогою саме наближених методів розрахунку, які не претендують на високу точність, але використовують математичний апарат і методи розрахунку, які здатні освоїти практичні інженери, вони отримують можливість вирішувати повсякденні питання, пов'язані з експлуатацією, ремонтом і навіть створенням нескладних конструкцій.

Без знання опору матеріалів є неможливим засвоєння таких важливих для інженера дисциплін як деталі машин, вантажопідйомні машини й механізми, теорія ризання і т.п.

Що ж стосується освіченіших і математично грамотніших інженерів, то знання основного курсу опору матеріалів дає їм можливість розглядати серйозніші завдання, пов'язані з міцністю, надійністю елементів конструкцій та деталей машин і механізмів, заглиблюючись у більш строгі і математизовані курси теорії пружності, теорії пластичності, механіки руйнування тощо.

Взагалі слід зауважити, що проблеми, на які наштовхуються на практиці інженери-механіки, зводяться до того, щоб при проектуванні та розрахунку на міцність і жорсткість тієї чи іншої реальної деталі, на яку діють відомі силові й теплові навантаження, був би вибраний відповідний матеріал з погляду оптимальної роботи майбутньої деталі з урахуванням умов її експлуатації, щоб при цьому елемент конструкції мав мінімальну вагу і оптимальні конструктивні форми й технологію обробки.

За сучасних умов розвитку науки й техніки, коли з'являються нові класи раніше невідомих матеріалів, які часто мають досить специфічні властивості, погляди на саме поняття „матеріали” і оцінювання їх з точки зору опору матеріалів – змінилися. Створення багатьох видів матеріалів і в першу чергу композиційних, справа не тільки матеріалознавців але й інженерів, які займаються питаннями міцності.

При цьому багато матеріалів створюються з заздалегідь заданими властивостями, що забезпечує їх оптимальну роботу в тому чи іншому елементі конструкції з урахуванням умов її експлуатації та характеру силових і теплових навантажень.

Істотно змінилося й уявлення про сучасні проблеми міцності. Сьогодні такі проблеми виникають, як правило, у зв'язку з реалізацією загальнодержавних програм використання нових досягнень у таких галузях як фізика, механіка, біологія й інших природних і технічних науках. Наприклад програми, пов'язані з використанням енергії розщеплювання атомного ядра, освоєнням космосу, створенням волоконно-оптичних ліній зв'язку, створенням нових видів транспорту, зокрема літальних апаратів тощо.

Зокрема в нашому університеті успішно проводяться дослідження закономірностей розвитку тріщин при повторно-змінному навантаженню у матеріалі, що використовується для виготовлення корпусів атомних реакторів.

Саме в цих областях інженери мають надзвичайно важкими експлуатаційні умови роботи елементів конструкцій як відносно інтенсивності дії зовнішнього середовища і рівня силового й теплового навантаження, так і відносно характеру змін цих дій у часі.

Проблеми в області міцності в переважній більшості виникають при створенні машин, апаратів і конструкцій, деякі елементи яких працюють в екстремальних умовах, а міцність цих елементів зрештою й визначає надійність і довговічність усього агрегату.

До екстремальних умов відносять достатньо високі температури (до 3000—4000 °С), низькі й дуже низькі (до температури рідкого гелію — близько 4 К⁰), інтенсивне

радіаційне опромінення, високотемпературні гази (продукти згоряння), що містять хімічно активні домішки, металеві розплави і морську воду, а також поєднання різних одночасно діючих перерахованих факторів.

До небезпечних слід також віднести умови, які мають місце в експлуатації стаціонарних енергетичних установок, літальних апаратів, різного типу турбомашин, корпусів надводних і підводних човнів, хімічних установок, трубопроводів, двигунів внутрішнього згоряння, рухомого складу залізничного транспорту, землерийних та сільськогосподарських машин і т.п.

Слід відзначити провідну роль експериментальних та чисельних методів досліджень. Необхідність проводити експериментальні дослідження різних питань, пов'язаних з опором матеріалів, обумовлена тим, що вплив перерахованих вище факторів, зменшуючих міцність, які мають місце в експлуатації, часто не можна врахувати аналітичним шляхом. Багато формульних виразів в опорі матеріалів отримані емпірично і своєю появою завдячують саме експериментально – чисельним методам досліджень. Окрім того, будь-яка теорія, як би вона красиво і вагомо не виглядала, може бути визнаною тільки після підтвердження експериментом.

Історія знає непоодинокі факти, коли саме завдяки розвитку обчислювальної техніки, з'являлась можливість довести до кінця питання про розрахунок певних систем і об'єктів.

Вже згадувалося, що в посібнику викладено далеко не повний курс опору матеріалів і, перетворюючи це на позитивний фактор, скажемо тільки, що може це дасть змогу прискіпливим та допитливим замислитись над питаннями, не дуже освітленими в цьому посібнику, і звернутись до більш фундаментальних курсів, а може й самотужки, або за допомогою викладача, спробувати оцінити проблему власним розумом і отримати свій результат.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Беляєв Н.М. Сопротивление материалов. 15-е изд. – М.: Наука, 1976. – 607с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 654с.
3. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. 5-е изд., перераб. и доп. – К.:Вища школа, Головне видавництво, 1986. – 775с.
4. Посацький С.Л. Опір матеріалів. – Львів: Видавництво Львівського університету, 1973. – 403с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 559с.

Зміст

Передмова.....	3
1. Основні поняття.....	4
1.1. Предмет опору матеріалів.....	4
1.2. Задачі опору матеріалів.....	4
1.3. Коротка історична довідка.....	5
1.4. Основні поняття опору матеріалів.....	7
1.4.1. Основні гіпотези опору матеріалів.....	7
1.4.2. Класифікація тіл, що приймається в опорі матеріалів.....	7
1.4.3. Поняття про деформації.....	8
1.4.4. Сили та їх класифікація.....	9
1.4.5. Умови рівноваги.....	10
1.4.6. Напруження.....	12
2. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	14
2.1. Класифікація геометричних характеристик перерізів.....	14
2.1.1. Площа.....	14
2.1.2. Статичний момент площі відносно осі.....	14
2.1.3. Моменти інерції площ.....	15
2.1.4. Моменти опору.....	16
2.1.5. Радіус інерції.....	16
2.2. Перетворення моментів інерції.....	17
2.2.1. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей.....	17
2.2.2. Перетворення моментів інерції при поворотанні осей.....	18
2.2.3. Головні осі інерції. Головні моменти інерції.....	19
2.2.4. Еліпс інерції.....	21
2.3. Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів.....	22
2.3.1. Прямокутник.....	22
2.3.2. Трикутник.....	23
2.3.3. Круг.....	24
2.3.4. Кільце.....	25
2.4. Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо).....	25
3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів.....	26
3.1. Діаграма розтягу для пластичних матеріалів.....	26
3.2. Діаграма напружень.....	28
3.3. Реальна діаграма напружень.....	29
3.4. Діаграма розтягу для крихких матеріалів.....	30
3.5. Діаграми стиску для пластичних і крихких матеріалів.....	30
3.6. Твердість.....	30
3.7. Порівнювальні характеристики пластичних та крихких матеріалів.....	32
3.8. Основні положення для вибору коефіцієнта запасу міцності та допустимих напружень.....	32
3.8.1. Загальні положення.....	32
3.8.2. Допустимі напруження на розтяг і стиск для різних матеріалів.....	34
4. Розтяг – стиск.....	35
4.1. Внутрішні сили та напруження при розтягу – стиску.....	35
4.2. Деформації при розтягу – стиску.....	36

4.3.	Коефіцієнт Пуассона.....	37
4.4.	Статично-визначені й статично-невизначені системи, що працюють на розтяг - стиск.....	37
4.5.	Температурні та монтажні напруження.....	41
4.5.1.	Температурні напруження.....	41
4.5.2.	Монтажні напруження.....	42
4.6.	Урахування власної ваги та сил інерції при розтягу – стиску.....	43
4.7.	Розрахунок статично – невизначених систем за граничним станом.....	45
5.	Складний напружений стан.....	46
5.3.	Лінійний напружений стан. Напруження на площадках, розташованих під кутом до осі стержня.....	46
5.4.	Плоский напружений стан.....	48
5.4.1.	Пряма задача (аналітичні виведення).....	48
5.4.2.	Круги Мора (пряма задача).....	50
5.4.3.	Круги Мора (обернена задача).....	51
5.4.4.	Обернена задача (аналітичні виведення).....	52
5.5.	Октаедричні напруження.....	53
5.6.	Об'ємний напружений стан.....	54
5.6.1.	Узагальнений закон Гука.....	54
5.6.2.	Об'ємна деформація.....	55
5.6.3.	Питома потенціальна енергія зміни форми.....	55
5.7.	Теорії міцності.....	56
5.8.	Поняття про нові теорії міцності.....	60
5.8.1.	Теорія Ягна.....	61
5.8.2.	Теорія Писаренка і Лебедева.....	62
5.8.3.	Діаграми механічного стану (критерії Я.В.Фрідмана).....	63
6.	Чистий зсув.....	65
7.	Кручення.....	68
7.3.	Внутрішні силові фактори при крученні. Напруження. Критерій міцності.....	68
7.4.	Деформації при крученні. Закон Гука. Умова жорсткості.....	70
7.5.	Напруження при крученні у перерізах, нахилених до осі вала.....	72
7.6.	Потенціальна енергія при крученні.....	73
7.7.	Визначення граничної вантажопідйомності стержня, який скручується.....	74
7.8.	Напруження і деформації в циліндричних гвинтових пружинах з малим кроком.....	76
7.8.1.	Внутрішні силові фактори та напруження в пружинах.....	76
7.8.2.	Деформації в пружині.....	78
7.8.3.	Розрахунок пружин по енергії, що повинна поглинатися.....	79
7.9.	Кручення тонкостінних стержнів.....	80
8.	Згин.....	82
8.1.	Типи опор балок.....	82
8.2.	Внутрішні силові фактори при згині.....	83
8.3.	Диференціальні залежності між силовими факторами при згині.....	85
8.4.	Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M	86
8.4.1.	Правила контролю та рекомендації при побудові епюр Q і M	86
8.4.2.	Приклад побудови епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M	87

8.5.	Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за нормальними напруженнями.....	90
8.6.	Дотичні напруження при згині. Формула Журавського. Умова міцності при згині за дотичними напруженнями.....	93
8.7.	Повна перевірка балки на міцність.....	98
8.8.	Згин тонкостінних стержнів.....	101
9.	Деформації та переміщення при згині.....	103
9.1.	Аналітичні методи визначення деформацій та переміщень при згині Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.....	103
9.2.	Приклади інтегрування наближеного рівняння зігнутої осі балки.....	104
9.3.	Метод прирівнювання постійних інтегрування.....	107
9.4.	Метод початкових параметрів.....	108
9.5.	Енергетичні методи визначення деформацій та переміщень.....	109
9.5.1.	Узагальнена сила та узагальнене переміщення.....	109
9.5.2.	Лінійна пружна система. Теорема Клапейрона.....	109
9.5.3.	Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті).....	110
9.6.	Узагальнені поняття та теореми опору матеріалів.....	111
9.7.	Теорема Максвелла - Мора. Інтеграл переміщень.....	113
9.7.1.	Виведення теореми.....	113
9.7.2.	Порядок використання спрощеної формули інтеграла Мора.....	114
9.7.3.	Графоаналітичний спосіб розрахунку інтеграла переміщень (спосіб Верещагіна).....	114
10.	Складний опір.....	116
10.1.	Складний згин. Косий згин.....	116
10.1.1.	Визначення напружень при косому згині. Умова міцності.....	116
10.1.2.	Визначення переміщень при косому згині.....	118
10.2.	Позацентровий стиск (розтяг).....	119
10.2.1.	Напруження при позацентровому стиску (розтягу). Розрахунок на міцність.....	119
10.2.2.	Ядро перерізу.....	121
10.3.	Сумісна дія згину та кручення.....	123
11.	Розрахунок статично-невизначених систем, що працюють на згин.....	125
11.1.	Основи методу сил.....	125
11.2.	Канонічні рівняння методу сил.....	125
12.	Криві стержні.....	128
12.1.	Загальні поняття.....	128
12.2.	Обчислення згинаючих моментів, нормальних і поперечних сил.....	128
12.3.	Обчислення напружень від сил Q і N	130
12.4.	Обчислення напружень від згинаючого моменту M	131
12.5.	Визначення радіуса кривизни нейтрального шару для різних перерізів.....	136
12.5.1.	Прямокутний переріз.....	136
12.5.2.	Круговий переріз.....	137
12.5.3.	Трапецевидний та трикутний перерізи.....	137
12.6.	Аналіз формули нормальних напружень в кривому стержні.....	138
12.7.	Деформації кривих стержнів.....	140
12.8.	Приклад розрахунку кривих стержнів.....	141
13.	Перевірка стиснутих стержнів на стійкість.....	144
13.1.	Поняття про стійкість стиснутих стержнів.....	144
13.2.	Формула Ейлера для критичної сили.....	146

13.3.	Вплив способу закріплення кінців стержня.....	150
13.4.	Межі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень.....	152
13.5.	Перевірка стиснутих стержнів на стійкість.....	155
13.6.	Вибір типу перетину і матеріалу.....	156
13.6.1.	Вибір типу перетину.....	156
13.6.2.	Вибір матеріалу.....	158
14.	Врахування сил інерції та коливань.....	159
14.4.	Вступ.....	159
14.5.	Обчислення напружень при рівноприскореному русі.....	160
14.6.	Обчислення напружень при коливаннях.....	161
14.6.1.	Власні коливання.....	161
14.6.2.	Колівання за наявності збудуючої сили.....	163
15.	Напруження при ударі.....	166
15.4.	Основні положення.....	166
15.5.	Загальний метод обчислення напружень при ударі.....	166
15.6.	Окремі випадки обчислення напружень і перевірки міцності при ударі.....	170
15.6.1.	Випадок поздовжнього удару.....	170
15.6.2.	Згинаючий удар.....	171
15.6.3.	Удар, який скручує.....	173
15.7.	Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі.....	174
15.8.	Практичні висновки з одержаних результатів.....	176
15.9.	Механічні властивості матеріалів при ударі.....	177
16.	Опір матеріалів дії повторно змінних напружень.....	179
16.1.	Явище втоми матеріалів.....	179
16.2.	Методи визначення межі витривалості.....	182
16.2.1.	Діаграми втоми.....	182
16.2.2.	Діаграма граничних напружень.....	184
16.3.	Вплив деяких конструктивно-технологічних факторів на межу витривалості.....	187
16.3.1.	Вплив концентрації напруження.....	188
16.3.2.	Вплив розмірів (масштабний фактор).....	189
16.3.3.	Вплив стану поверхні.....	191
16.3.4.	Вплив температури.....	191
16.4.	Розрахунок на міцність при повторно змінних напруженнях.....	192
17.	Основи механіки руйнування.....	197
17.2.	Загальні поняття.....	197
17.3.	Крихке руйнування. Задача Гріффітса.....	197
17.4.	Методика експериментального визначення тріщиностійкості конструкційних матеріалів.....	201
18.	Контактні напруження.....	202
18.2.	Основні поняття.....	202
18.3.	Обчислення контактних напружень.....	203
18.3.1.	Стиск куль.....	203
18.3.2.	Стиск циліндрів.....	205
18.3.3.	Загальний випадок контакту двох тіл.....	206
18.4.	Перевірка міцності при контактних напруженнях.....	208
19.	Висновки. Сучасні проблеми опору матеріалів.....	210
	Використана література.....	212

Редактор Гриценко Є.І.

Видавництво Тернопільського державного
технічного університету імені Івана Пулюя

46001 м.Тернопіль, вул.Руська, 56

Формат 60×90/16. Папір ксероксний.
Наклад 150 прим. Зам. № 502-06.05

© Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя
Навчально-методична література