

УДК 517.9

Драбик І. – ст. гр. ЕТ-31

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПРО ЧИСЛЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Габрусев Г. В.

Drabyk I.

Ternopil Ivan Puluj National Technical University

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Supervisor: Habrusiev H. V.

Ключові слова: чисельний метод, диференціальне рівняння, точність.

Keywords: numerical method, differential equation, stiffness calculation, precision.

Більшість прикладних інженерних задач зводяться до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). При цьому їх точний аналітичний розв'язок інколи знайти неможливо або занадто складно. Наприклад таке просте на вигляд ЗДР

$$y' = \cos(y^2 + x^2)$$

неможливо розв'язати аналітично. А при моделюванні різноманітних фізичних процесів таких як теплообмін, рух тіл, електромагнітних процесів, хімічних реакцій, демографічних процесів тощо, рівняння настільки складні, часто нелінійні, що застосування чисельних методів стає практично єдиною правильним рішенням, якщо задача допускає використання наближеного розв'язку із деякою наперед заданою точністю.

Існує величезна кількість чисельних методів. Кожен із них має свої певні переваги та недоліки порівняно із іншими. Проведемо порівняння найпопулярніших із них – методів Ейлера, Гойна (метод середньої точки) та Рунге-Кутти (4-го порядку).

Метод Ейлера – це найпростіший числовий метод для розв'язання ЗДР. Його легко зрозуміти і запрограмувати оскільки основна обчислювальна формула досить проста:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n).$$

На кожному кроці проводиться лише одне обчислення, що є важливим при обмежених обчислювальних ресурсах. Проте ця «простота» зумовлює основний недолік методу Ейлера – низьку точність. Даний метод має лише перший порядок точності, тобто його похибка пропорційна кроку розбиття. Крім цього, помилка обчислень «акумулюється» на кожному кроці, і швидко накопичується при їх великій кількості. Також для деяких задач (особливо жорстких рівнянь) метод може «вибухнути» або дати повністю некоректний результат.

Метод Гойна – це простий, але значно точніший за метод Ейлера числовий метод розв'язування ЗДР, він є методом другого порядку точності. Це його основна перевага порівняно із методом Ейлера.

Проте це покращення точності не привело до значного ускладнення він все ще є досить простим у реалізації, оскільки вимагає всього два обчислення правої частини на крок:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n)) \right].$$

Крім того метод Гойна дає кращу поведінку при довших інтегруваннях та менш схильний до «вибуху» при жорстких рівняннях.

Метод Рунге-Кутти (найчастіше – 4-го порядку, або RK4) – це один з найпопулярніших числових методів для розв’язування ЗДР. Він поєднує високу точність з відносною простотою реалізації:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Це вже метод четвертого порядку точності. Вища точність методу поєднується із хорошою числовою стабільністю для широкого класу задач (хоча не для дуже жорстких рівнянь – там більш ефективні спеціальні імпліцитні методи). Також важливою перевагою цього методу є його «самодостатність». Він не потребує попередніх значень, як у багатоетапних методах типу Адамса. Такі суттєві переваги методу Рунге-Кутти зумовили його широке застосування в науці, техніці, комп’ютерній графіці, фізичних симуляціях тощо. Проте як і будь-який інший метод Рунге-Кутти також має певні недоліки, про які необхідно знати, а саме:

1. Більша кількість обчислень на кожному кроці. На кожному кроці потрібно проводити вже чотири обчислення правої частини. Тобто він значно «дорожчий» у плані продуктивності, ніж метод Ейлера або Гойна.

2. Як і розглянуті раніше методи Ейлера та Гойна він досить погано справляється із жорсткими рівняннями, тобто такими в яких деякі розв’язки змінюються дуже швидко, а інші – повільно.

3. Стандартна версія методу Рунге-Кутти має фіксований крок, а це іноді не оптимально (для складних функцій краще використовувати його варіації із адаптивним кроком).

Отже, метод Ейлера – це простий в реалізації і досить точний метод, але його не варто використовувати для серйозних обчислень через не високу точність та нестабільність. Він хороший для ідейного розуміння, але на практиці краще використовувати більш точні методи, наприклад Метод Рунге-Кутти (особливо 4-го порядку), який можна назвати золотим стандартом для розв’язування ЗДР.

Література

1. Габрусев Г. В. Звичайні диференціальні рівняння: навчальний посібник / Г. В. Габрусев, О. М. Самборська. – Тернопіль : ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.
2. Самборська О. М. Числові методи : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / О. М. Самборська, Б. Г. Шелестовський. – Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя, 2008. – 140 с.