Навчально-методична література

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. ІВАНА ПУЛЮЯ

КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Конспект лекцій
для студентів
освітнього рівня бакалавр за спеціальністю
151"Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Тернопіль 2023

УДК 519.816

ББК 30.211

укладачі:

Левицький В.В., канд. техн. наук, доцент,

Микитишин А.Г., канд. техн. наук, доцент

Рецензент

Коноваленко І.В., канд. техн. наук, доцент

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні кафедри (протокол №12 від 07.06.2023р.)

Схвалено та рекомендовано до друку НМК факультету прикладних інформаційних технологій та електроінженерії (протокол №11 від 07.06.2023 р.)

Відповідальний за випуск *Левицький В.В.*, канд. техн. наук, доцент,

Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів: конспект лекцій для студентів освітнього рівня бакалавр за спеціальністю 151 „Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології“/ ТНТУ ім. І. Пулюя; уклад. В.В. Левицький, А.Г. Микитишин. – Тернопіль: ТНТУ, 2020. – 66 с.

Зміст

	Стр.
Лекція №1. Вступ. Загальні відомості про ідентифікацію ……	4
Лекція №2. Ідентифікація об’єктів……	10
Лекція №3. Постановка задачі ідентифікації……..	15
Лекція №4. Ідентифікація структури і параметрів об’єкта …….....	23
Лекція №5. Класифікація методів ідентифікації……	27
Лекція №6. Математичні моделі об’єктів……	31
Лекція №7. Моделювання давачів та перетворювачів вимірювальних каналів……	57
Список літературних джерел…….	65

Лекція №1

Вступ. Загальні відомості про ідентифікацію.

З давніх часів людство витрачає великі зусилля на встановлення закономірностей явищ, що відбуваються у природі. Первинними у процесі пізнання завжди є результати спостереження. Вони є основою для створення моделі, а уже від моделі здійснюють перехід до практичної діяльності. Цю схему пізнання застосовують для природних явищ і для штучних об'єктів.

Побудова моделі за результатами спостереження є наслідком формалізації, яка необхідна для визначення основних ознак, зв'язків, закономірностей, що властиві об'єкта – оригіналу. При цьому формалізація об'єкта є основою відсіювання його несуттєвих ознак. Для одного і того ж об'єкта, залежно від конкретних вимог практики і типу поставленої задачі, може бути побудовано кілька моделей, здійснено формалізацію різних функцій цього об'єкта або зовнішніх впливів на нього. Для реалізації технологічних процесів також будують моделі функціонування, які відображають технічні, економічні, психологічні, соціальні та інші аспекти процесу, що забезпечує отримання необхідного продукту. Розроблення нових технологічних процесів було б неможливим без наявності відповідних моделей, які будують на основі спостереження і узагальненого досвіду.

У другій половині XX ст. значно зросла роль науки, яка узагальнює установлені процеси управління і експлуатації машин та механізмів цілеспрямованою діяльністю людського суспільства. Появі цих ідей і методів керування передували, з одного боку, узагальнення високоефективних принципів теорії автоматичного керування, а з другого боку, підвищені технічні можливості, у зв'язку з широким розвитком обчислювальної техніки. У області керування виникла необхідність використання нових принципів побудови моделей, формалізації результатів спостереження. У теорії автоматичного керування принципи побудови системи керування розробляли на основі заданої моделі. У подальшому виявили, що, у багатьох випадках, модель, прийнята при проектуванні, суттєво відрізнялась від реального

об’єкта. Це значно зменшувало або зводило нанівець ефективність розробленої системи керування. У зв’язку з цим виник один із важливих напрямків теорії керування, пов’язаний з побудовою моделі на основі спостереження. При цьому результати спостереження було отримано в умовах функціонування об’єкта під впливом зовнішніх критеріїв за його вхідними і вихідними змінними. Цей напрямок відомий на сьогодні як *ідентифікація систем* (виник біля 50-ти років тому).

Задача ідентифікації формулюється таким чином: за результатами спостереження над вхідними і вихідними змінними системи повинна бути побудована оптимальна у деякому розумінні модель, тобто формалізоване представлення цієї системи. Звідси стає очевидним зв’язок між задачею ідентифікації і вказаною загальною схемою встановлення закономірностей за результатами спостереження. Задача ідентифікації ґрунтується на сучасній теорії керування. Для її вирішення використовують сучасні обчислювальні машини. Останні, маючи велику швидкодію і практично необмежений об’єм пам’яті, створюють передумови для отримання, передачі і оброблення великих масивів спостереження, які необхідні для побудови адекватних моделей реальних об’єктів.

Ідентифікація складних виробничих об’єктів останнім часом стала одним із центральних питань, які виникають при побудові систем керування цими об’єктами. Без вирішення задачі ідентифікації неможливо ні здійснити цілеспрямоване проектування системи керування, ні побудувати адаптивну систему, яка працює в умовах неповної апріорної інформації і нестаціонарності об’єктів.

При вирішенні різноманітних задач аналізу і синтезу систем управління виникає необхідність опису (моделювання) властивостей об’єкта. Більшість сучасних технологічних, екологічних, біологічних та інших об’єктів, для яких необхідно проектувати системи керування, є складними багатоелементними системами. Спроби їх опису, які ґрунтуються на властивостях складових елементів, часто приводять до розроблення складних моделей. Великих успіхів можна досягнути не вникаючи у внутрішню структуру керованого

об’єкта. У цьому випадку об’єкт характеризують як єдине ціле і моделюють зв’язок між його вхідними і вихідними процесами. Звичайно, така модель не показує особливостей фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів, які відбуваються у об’єкті при його функціонуванні. Але отримані за допомогою такої моделі результати спостереження дозволяють проаналізувати зв’язки між входом і виходом об’єкта, що, у свою чергу, утворює сукупність тих відомостей, які достатні для проектування системи керування.

Модель об’єкта, яка описує цей зв’язок, характеризує властивості об’єкта при деяких припущеннях або при певних діапазонах зміни вхідного і вихідного процесів об’єкта.

Для цілеспрямованого керування поведінкою об’єкта необхідно знати його характеристики, щоб правильно побудований сигнал керування міг перевести об’єкт з деякого початкового стану у необхідний. Визначенням характеристик об’єкта за результатами вимірювань вхідних і вихідних сигналів займається один із найважливіших напрямків теорії автоматичного керування, який називають *ідентифікацією.*

Ідентифікація (від лат. – *identifico* – ототожнення) – це процес побудови математичної моделі об’єкта, адекватній (від лат. *adaequatus* – зрівняний) об’єкту з точністю до заданого критерію. Розрізняють ідентифікацію у вузькому і широкому змісті.

Під ідентифікацією у вузькому змісті розуміють оцінювання параметрів математичної моделі при заданій її структурі за результатами вимірювань вхідних і вихідних сигналів.

Під ідентифікацією у широкому змісті розуміють як побудову самої моделі об’єкта, так і визначення її параметрів. Ідентифікація у широкому змісті є, як правило, довготривалим процесом.

Суттєве значення при розв’язку задач ідентифікації має апріорна інформація. Апріорна (від лат. *apriori – із* попереднього) інформація буває трьох видів:

- про фізико-механічні властивості об’єкта;
- про зовнішнє середовище;

- про виміряні змінні.

Зазвичай при ідентифікації опираються на накопичений досвід, знання, інтуїцію дослідників.

Ідентифікацію поділяють на ідентифікацію у реальному часі і післяекспериментальну. У першому випадку при ідентифікації накладають жорсткі обмеження, у другому таких обмежень немає, але для створення адекватної моделі необхідно мати значну кількість апріорних даних. Крім того, обмеження накладають на час експлуатації і можливості ЕОМ.

Післяекспериментальна ідентифікація поділяється на два види:

- ідентифікація в режимі нормальної експлуатації;
- ідентифікація з подачею на об’єкт пробних вхідних впливів.

При цьому незалежно від виду ідентифікації на вхідні сигнали накладають обмеження за інформативністю. Зокрема, часові характеристики сигналів є інформативними, якщо сигнал разом зі своїми похідними складає незалежну лінійну функцію, а кількість частот на вхідному сигналі є більшою від половини оцінюваних параметрів.

1. **Загальні відомості про ідентифікацію.**

Розроблення систем автоматизації будь-яких технологічних процесів і об’єктів передбачає реалізацію таких взаємозв’язаних етапів:

- загальне вивчення керованого технологічного процесу і автоматизованого технологічного устаткування, за допомогою якого цей процес реалізується;
- ідентифікацію технологічного процесу як об’єкта автоматизації – розроблення нової або обґрунтування однієї з відомих його математичних моделей; крім того, ідентифікація технологічного процесу передбачає вибір його параметрів відповідно до вибраних критеріїв і обмежень, що накладаються;

- інженерний синтез системи автоматизованого керування технологічним процесом, що реалізує прийнятий алгоритм управління з бажаним ступенем точності його відтворення;
- розроблення і конструювання усього комплексу автоматизованої технологічної системи з урахуванням додаткових вимог енергетичного, експлуатаційного, найдійнісного, екологічного і техніко-економічного характеру.

Ідентифікація об’єкта автоматизації є одним з необхідних і первинних етапів роботи.

Задача ідентифікації, як задача визначення (або, точніше, оцінювання) параметрів і структури об’єкта виникає у двох випадках:

- по-перше, у процесах пізнання, коли будують пізнавальні моделі об’єктів і явищ, з якими стикається людина;

- по-друге, у процесах керування, пов’язаних з цілеспрямованою зміною об’єкта, тобто з досягненням мети, поставленої людиною.

Ідентифікація у процесах пізнання

У процесах пізнання об’єкт ідентифікують, внаслідок чого створюють пізнавальну модель, яка відображає у необхідній мірі механізм функціонування об’єкта. Прикладом такого виду ідентифікації може бути вивчення оточуючої нас природи. Пояснення явищ природи, їх взаємний зв’язок і обумовленість, аналіз механізмів і т.д. – це основні задачі ідентифікації, які відображають важливу для людини специфіку об’єктів у оточуючому нас світі. Ця специфіка відображається у своєрідності причинно-наслідкових зв’язків кожного об’єкта або явища, які зручно представити у вигляді деякого “перетворювача” причини у наслідок (рис. 1.1). Опис “експлуатації” такого перетворювача будемо називати *моделлю.* Отже, під

моделлю будемо розуміти судження (на будь-якій мові – математичній, графічній, алгоритмічній, розмовній і т.д.), які дозволяють імітувати явище, що спостерігається. Тобто, наприклад, ефективно передбачати наслідки за причинами. Проблема створення моделей характерна для процесу пізнання. Крім того, метою такого процесу є синтез моделей, що відображають специфічні особливості явища чи об'єкта, що вивчається.

Рис. 1.1. Об'єкт пізнання.

Очевидно, що конкретні цілі аналізу поведінки об'єкта конкретизують і мову, на якій описується модель. Зокрема, мовою значної кількості фізичних і технічних моделей є математика, а більшість біологічних моделей описано на звичайній природній людській мові. Прикладами пізнавальних моделей, сформульованих на математичній мові, є закон Ньютона, Ома, Фарадея, Ленца і т.д. Такі моделі відображають специфічні взаємозв'язки причин і наслідків об'єктів при визначених припущеннях.

Надалі введемо термінологію, прийняту у теорії і практиці ідентифікації об'єктів. Формалізуємо сказане про причинно-наслідкові зв'язки. Позначимо причину буквою *X*, а наслідок – *У*. Зв'язок між ними запишемо умовно у вигляді формули:

$$Y=F_м(X),$$

де:
$F_м$ – правило перетворення причини X у наслідок Y.

Це і є модель. Назвемо $F_м$ оператором моделі.

Модельним оператором $F_м$ описуються причинно-наслідкові зв'язки, що існують у об'єкті згідно наших уявлень про його властивості. При цьому зв'язки X і Y у реальному об'єкті аналогічно можна представити, використовуючи оператор об'єкта F_0.

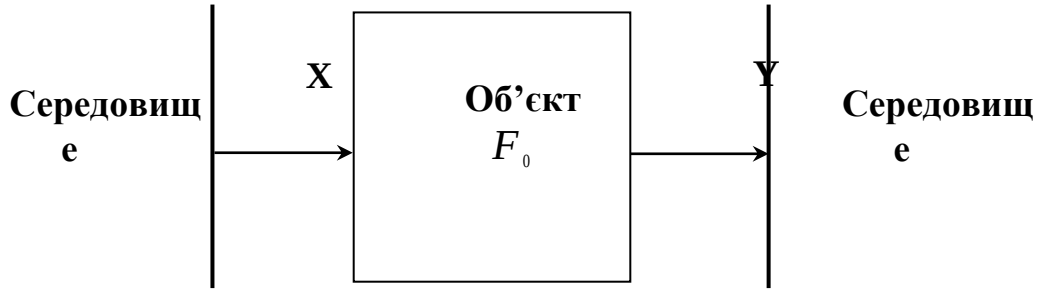


Рис. 1.2. Взаємодія об'єкта з середовищем.

На рис. 1.2 показано взаємодію об'єкта, що ідентифікується, з середовищем. Ця взаємодія відбувається по каналах X і Y. По каналу X середовище діє на об'єкт, а по каналу Y об'єкт діє на середовище. Задача ідентифікації зводиться до визначення оператора F_0, який зв'язує вхід і вихід об'єкта [1].

Нехай $(X_1,...,X_N)$ – спостереження входу об'єкта, а $(Y_1, ...,Y_N)$ – відповідні їм спостереження його виходу у дискретні моменти часу $(1,...,N)$. Ці спостереження пов'язані невідомим оператором об'єкта F_0, тобто:

$$Y_i = F_0 (X_i), (i = 1, \ldots, N).$$

Задача ідентифікації полягає у побудові (синтезі) модельного оператора $F_м$, достатньо близького за деяким попередньо вибраним критерієм до оператора об'єкта F_0. Тобто, у результаті ідентифікації повинна існувати можливість на основі оператора $F_м$ достатньо точно передбачити зміну Y у реальному об'єкті. Отже, процесом ідентифікації у широкому змісті є розроблення моделі і, як наслідок, процес синтезу модельного оператора $F_м$, який має бути максимально близьким до оператора об'єкта F_0, тобто:

$$F_м \approx F_0.$$

Для пізнавальних моделей, що є найширшим класом моделей, характерне використання значного спектру мов опису (форм і способів представлення оператора $F_м$) – від словесних до спеціальних мов (схем, графіків і математичних формул). Друга (основна) особливість пізнавальних моделей полягає у тому, що у таких моделях прагнуть вказати всі причинно-наслідкові зв'язки, які є у об'єкті або виявлені в процесі його вивчення. Іншими словами, у таких моделях в структурі оператора $F_м$ відображають механізм об'єкта або явища. При цьому намагаються визначити не тільки взаємозв'язок між X і Y, але й вирішити проблему формування причинно-наслідкових зв'язків у об'єкті, що вивчається [2].

Інший тип моделей – це кібернетичні та інформаційні, які синтезують для цілей управління. Такі моделі можуть і не відображати внутрішніх механізмів явищ та об'єктів, що абсолютно є необхідним для пізнавальних моделей. Інформаційні моделі повинні лише встановлювати певний формальний зв'язок між входом і виходом об'єкта, а не копіювати його фізичну суть. Тому інформаційні моделі об'єкта різної фізичної природи можуть бути однакові. Так, наприклад, у теорії автоматизованого управління широко використовують поняття типових динамічних ланок. При цьому елементи, які є різними за структурою і фізичною природою, об'єднують у одну групу типових ланок за рахунок того, що їх динамічні властивості описуються однаковими диференціальними рівняннями, тобто мають аналогічні моделі.

Лекція №2
Ідентифікація об'єктів

Проблема ідентифікації складається з багатьох аспектів і для її реалізації необхідно вирішити широкий спектр теоретичних та практичних завдань. На початковому етапі слід чітко усвідомити зміст поняття – "об'єкт ідентифікації", тобто дати відповідь на питання: "Які загальні характеристики моделі об'єкта?" Друге питання пов'язано з постановкою задачі ідентифікації, її аналізом і особливостями. Третє питання – як встановити зв'язок проблеми ідентифікації з проблемою керування? І останнє питання полягає у тому, як визначити ефективність процедури ідентифікації [3, 4].

1. Об'єкт ідентифікації

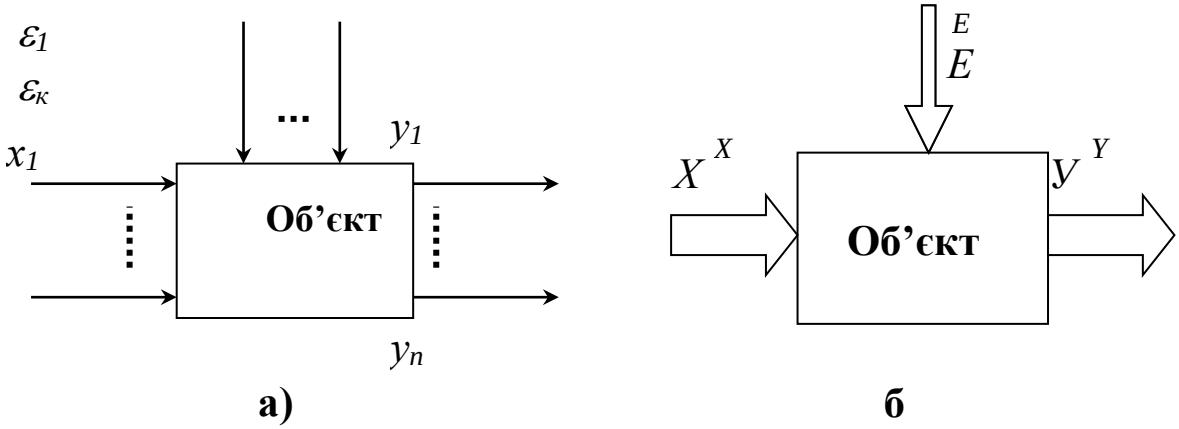
Об’єкт ідентифікації зручно представляти у вигляді багатополюсника, показаного на рис. 1.3,а, де:

$x_1, \ldots, x_n$ – входи об’єкта, за якими спостерігають;

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_к$ – входи, за якими не спостерігають;

$y_1, \ldots, y_м$ – виходи об’єкта, за якими спостерігають.

$Y = (y_1, \ldots, y_м)$ – виходи об’єкта, за якими спостерігають.



а) **б**

Рис. 1 Зображення об’єкта ідентифікації.

Багатовимірний об’єкт зручно описувати у векторній формі (рис. 1.3,б).
У цьому випадку:

$X = (x_1, \ldots, x_n)$ – входи об’єкта, за якими спостерігають;

$E = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_к)$ – входи, за якими не спостерігають;

Всі входи об’єкта є видами впливу зовнішнього середовища на об’єкт. Водночас входи об’єкта є визначеними функціями стану середовища й часу. Оскільки відсутня модель ідентифікації, тоді входи об’єкта можна розглядати як випадкові функції часу, статичні властивості яких в загальному випадку невідомі. Тобто:

$$X = X(t), \quad E = E(t),$$

При цьому є відомими результати спостереження входу і виходу об’єкта, тобто є можливість реалізації функцій $X(t)$ і $Y(t)$ у неперервній або дискретній формі. Відносно входу $E(t)$, за яким не спостерігають, можна

вважати, що є відомою його структура, тобто характер цієї випадкової функції. Обмежимось випадком, коли *E(t)* є нормальним випадковим процесом, безпосереднє спостереження якого неможливе.

Об'єкт пов'язує входи *X* і *E* з виходом *Y* з допомогою деякого апріорно невідомого оператора F_0:

$Y=F_0(X, E)$.

При цьому ідентифікується не він, а оператор моделі $F_м$, який зв'язує входи і виходи, за якими спостерігають:

$Y=F_м(X)$.

Фактор *E(t)*, який не спостерігається, розглядається як випадкова завада, яка утруднює визначення оператора $F_м$.

Отже, можна вважати, що об'єкт ідентифікації у загальному випадку можна представити у вигляді багатополюсника, частина входів якого не спостерігається.

2. Відомості про об'єкт

Всі відомості про об'єкт ідентифікації, які необхідно мати для того, щоб почати процес ідентифікації, поділяються на два види: апріорні *A* і апостеріорні *B*. Отже, у комплексі набір факторів та критеріїв <*A, B*> характеризує всю інформацію про поведінку об'єкта.

Апріорна інформація

Апріорну інформацію необхідно мати ще до спостереження за входами і виходами об'єкта. Вона повинна містити інформацію про те, що представляє собою структура ідентифікованого об'єкта. Структуру будемо характеризувати значеннями чотирьох ознак:

$A=<\alpha, \beta, \gamma, \delta>$.

Ці ознаки кодують об’єкт за чотирма характеристиками. Водночас необхідно зазначити, що структура об’єкта повністю не вичерпується цими чотирма ознаками [5].

Розглянемо вказані ознаки типу об’єкта детальніше і уточнимо їх зміст.

1.Ознака динамічності a.

Будемо об’єкт називати динамічним (a=1), якщо поведінка його виходу залежить не тільки від значень входу у даний момент часу, але й від попередніх значень входу. Це означає, що об’єкт має пам’ять (або інерційність), яка і визначає залежність виходу від попередніх значень входу.

У протилежному випадку об’єкт будемо називати статичним (a=0).

2.Ознака стохастичності β.

Будемо об’єкт називати стохастичним ($\beta = 1$), якщо поведінка його виходу залежить від входів об’єкта, що не контролюються або (що те саме) сам об’єкт має неконтрольоване джерело випадкових факторів збурень. У іншому випадку будемо об’єкт називати детермінованим ($\beta = 0$).

Зазначимо, що детермінованих об’єктів не існує у природі, позаяк будь-яке вимірювання вносить свою похибку у результат спостереження. Тому правильніше стверджувати про “*малу*” і “*велику*” стохастичність об’єкта, розуміючи, що “малу” стохастичність можна не враховувати і називати такий об’єкт детермінованим.

3.Ознака нелінійності γ.

Об’єкт будемо називати нелінійним ($\gamma = 1$), якщо його реакція на два різних збурення входу не є еквівалентною сумі реакцій на кожне з цих збурень незалежно. Для випадку системи без завад нелінійність визначається умовою:

$$F_0(X_1+X_2) \neq F_0(X_1)+F_0(X_2).$$

При невиконанні цієї умови, тобто при рівності у цьому випадку, об’єкт будемо називати лінійним (γ =0).

4.Ознака дискретності δ.

Будемо об’єкт називати дискретним (δ =1), якщо стан його входів і виходів змінюється чи вимірюється лише у дискретні моменти часу $t = (1,2, ...,n)$. Якщо ж значення входу і виходу змінюються чи вимірюються

неперервно, тоді об’єкт називатимемо неперервним (δ=0). Отже, спосіб вимірювання може змінити цю ознаку об’єкта.

Як видно, апріорна інформація (*A***)** у деякій мірі може спрогнозувати вид моделі, а для її повного проектування і кінцевої реалізації необхідно мати відомості про характер динамічності об’єкта (при *a*=1), вид його нелінійності (при β=1) і ймовірні властивості стохастичності (при γ=1).

Вид моделі, який визначається апріорною інформацією, може змінитися після аналізу апостеріорної інформації, тобто після спостереження за поведінкою входу і виходу об’єкта при різному наборі керованих факторів або при різних діапазонах їх зміни.

Апостеріорна інформація

Якщо апріорна інформація (*A*) має якісний характер, то апостеріорна – кількісний, що є результатом (протоколом) спостереження входу і виходу об’єкта. Цей протокол має вигляд:

$B = <X,Y>,$

де:

X – результати усіх вимірів входів об’єкта;

Y – результати вимірів його виходів за той же період спостереження.

Для неперервних об’єктів (A=$\alpha\beta\gamma\delta$) маємо значення неперервних даних:

X=X(t), Y=Y(t) у інтервалі часу $0=\le t \le T$.

Таким чином, отримуємо:

$B_0 = (<X(t), Y(t)>(0 \le t \le T))$.

Це означає, що поведінку об’єкта зареєстровано у вигляді (*n*+*m*) різних кривих: $(x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots, y_m(t))$ у цьому інтервалі.

Зазначимо, що величини *X* і *X(t)* у даному випадку не є тотожними, позаяк *X* охоплює всю залежність *X(t)* у заданому інтервалі, а *X(t)* може мати

тільки конкретне значення цієї залежності у момент часу *t*. Аналогічною є тотожність *Y* і *Y(t)*.

У дискретному випадку (A= $\alpha\beta\gamma 1$) маємо:

$X=(X_1, \ldots, X_N)$, $Y=(Y_1, \ldots, Y_N)$.

Тоді протокол записують у вигляді:

$B_1=(<X_i, Y_i> (i=1, \ldots, N))$.

Протокол можна представити у вигляді таблиці чисел з (*n*+*m*) стовпчиків і *N* рядків:

$$B_1 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} \ldots x_{n1} & y_{11} & y_{21} \ldots y_{m1} \\ & \ldots \ldots \ldots & & \\ x_{12} & x_{22} \ldots x_{n2} & y_{12} & y_{22} \ldots y_{m2} \\ & \ldots \ldots \ldots & & \\ x_{1N} & x_{2N} \ldots x_{nN} & y_{1N} & y_{2N} \ldots y_{mN} \end{vmatrix}$$

де:
$X_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})$;
$Y_i = (x_{1i}, \ldots, x_{mi})$.

Очевидною є відповідність цих двох форм запису. Зокрема, протокол B_1 може бути отримано з протоколу B_0 шляхом отримання інформації у дискретні моменти часу:

$t=0, \delta, 2\delta, \ldots, (N-1)\delta$,

де:

δ - інтервал дискретності (δ =N/T).

Необхідно зазначити, що зворотній перехід можливий не завжди.

Отже, параметри *X, Y* достатньо повно у комплексі характеризують апостеріорну інформацію (*B*), що, у свою чергу, дозволяє на наступному етапі

дослідження детальніше оцінити об’єкт для встановлення мети його ідентифікації.

Лекція №3
Постановка задачі ідентифікації

Задачею ідентифікації є визначення оператора F_0 об’єкта, тобто побудова такого оператора моделі $F_м$, який був би у деякому змісті близький до оператора об’єкта F_0, тобто:

$F_м \approx F_0$.

Зауважимо, що вказане “наближення” зовсім відносне, позаяк оператори F_0 і $F_м$ можуть мати різну структуру, можуть бути сформульовані на різних мовах і мати різну кількість входів. Близькість операторів безпосередньо оцінити дуже важко або просто неможливо ще й тому, що про оператор об’єкта F_0 недостатньо апріорних даних. У зв’язку з цим, близькість операторів переважно оцінюють за їх реакціями на одну і ту ж дію вхідних факторів X. Тобто – на виходах об’єкта:

$$Y(t) = F_0[X, E(t)],$$

і згідно моделі:

$$Y^M(t) = F(X).$$

Ступінь близькості цих реакцій у кожний момент часу можна оцінити, наприклад, значенням квадрата модуля різниці векторів виходу:

$$q(t) = |Y(t) - Y^M(t)|^2 = \sum_{i=1}^{m} [y_i(t) - y^M_j(t)]^2, \qquad (1.1)$$

де:
$Y^M = (y^M_1, \ldots, y^M_m)$ – вектор виходу моделі.

В загальному випадку близькість об’єкта і моделі оцінюють так званою **функцією нев’язки ρ** [6]**.** Це скалярна функція двох векторних аргументів-виходів об’єкта і моделі:

$$q(t) = \rho(Y(t), Y^M(t)). \qquad (1.2)$$

Функція нев’язки має такі властивості:

1. Невід'ємна для будь-яких значень $Y(t)$ і $Y^M(t)$, тобто:

$$\rho(Y(t), Y^M(t)) \geq 0;$$

2. Дорівнює нулю при $Y(t) = Y^M(t)$, тобто:

$$\rho(Y(t), Y^M(t)) = 0;$$

3. Неперервна і випукла вниз за обома аргументами, тобто:

$$\left.\begin{aligned} &\rho((1-\lambda)Y_1 + \lambda Y_2, Y^M) \leq (1-\lambda)\rho(Y_1, Y^M) + \lambda\rho(Y_2, Y^M), \\ &\rho(Y,(1-\lambda)Y^M{}_1 + \lambda Y^M{}_2) \leq (1-\lambda)\rho(Y, Y^M{}_1) + \lambda\rho(Y, Y^M{}_2) \quad , \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

де: $0 \leq \lambda \leq 1$.

Ця функція завжди лежить нижче (точніше, не вище) відрізка прямої, яка з'єднує дві будь-які точки (Y_1, Y_1^M) і (Y_2^M),

де:

$Y_1 i Y_1^M$ – довільні вектори.

Задовольнити ці вимоги неважко. Зокрема, рівняння (1.1) відповідає їм. Саме воно і буде найчастіше застосовуватись нами надалі.

Тепер детальніше сформулюємо задачу ідентифікації. Вона полягає у побудові оператор моделі F, який би реагував на збудження входу X аналогічно до реакції об'єкта. Реакція оператора моделі на вхід X має вигляд:

$$Y^M = F(X).$$

Оператором перетворення (об'єкта або моделі) прийнято називати алгоритм трансформації функції у функцію. Найпростішими прикладами операторів є оператори диференціювання:

$$F(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$$

і інтегрування:

$$F(\cdot) = \int_0^t (\cdot)dt$$

У найпростішому випадку оператор перетворюється у звичайну функцію. З точки зору об'єктів ідентифікації оператор, як правило, характеризує динамічну систему, а функція – статичну. Отже, модельний оператор *F* повинен бути таким , щоб виконувалась умова:

$Y^M \sim Y,$

де:

~ знак еквівалентності, тобто виходи моделі і об'єкта при однакових вхідних діях *X* повинні бути еквівалентними.

Цього можна досягнути, якщо ввести єдину міру близькості на усьому інтервалі спостереження, а не тільки у кожній точці, як це було показано у рівнянні (1.2).

Такою мірою у неперервному випадку (коли об'єкт характеризується апріорною інформацією: A= $\alpha\beta\gamma$ 0) може бути інтеграл:

$$Q = \int_0^T \rho(Y(t), Y^M(t))dt,$$

Дійсно, відповідно до визначення функції $\rho(.\ ,\ ,)$ величина *Q* відображає ступінь близькості функцій *Y(t)* і $Y^M(t)$ у інтервалі $0 \le t \le T$. Значення *Q* суттєво залежить від *F*:

$$Q(F) = \int_0^T \rho\{(t), F(X)\}dt.$$

Тоді, задача ідентифікації полягає у її мінімізації шляхом відповідного вибору оператора моделі *F*. Якщо за фізичним змістом задачі важливість апостеріорної інформації *B* у різні моменти часу не є однаковою, тоді варто ввести величину змінної маси $h(t) > 0$:

$$Q(F) = \int_0^T \rho\{Y(t), F(X)\}h(t)dt. \qquad (1.4)$$

Після звичайного нормування:

$$\int_0^T h(t)dt = const. \qquad (1.5)$$

Вибір функції *h(t)* визначається цінністю інформації. Наприклад, для стохастичного неперервного об'єкта (А=$\alpha 1 \gamma 0$) при недостатньо точних спостереженнях, тобто коли дисперсія помилки (σ^2) спостереження виходу залежить певним чином від часу:

$\sigma^2 = f(t) \neq 0,$

де:

f(t) – задана функція.

Вага (або маса) *h(t)* повинна змінюватись таким чином:

$h(t) = k/f(t),$

де:

k – нормуючий член, який забезпечує виконання умови звичайного нормування (1.5).

Це означає, що цінність інформації обернено пропорційна мірі дисперсії випадкових завад.

Величину *Q(F)* часто називають нев'язкою виходів об'єкта і моделі. Ця нев'язка є функціоналом, який залежить від оператора моделі *F* [7].

Зазначимо, що функціоналом навивається перетворення функції у число (яке називають значенням функціоналу). Типовим прикладом функціоналу є визначений інтеграл:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dt.$$

Вираз (1.4) є також функціоналом.

За своїм фізичним змістом нев'язка виходів невід'ємна і дорівнює нулю при:

$Y(t) = F(X), (0 \leq t \leq T),$

тобто при співпаданні виходів об’єкта і моделі у досліджуваному інтервалі часу.

Якщо об’єкт є статичним і неперервним (А=$0\beta\gamma 0$), тобто F(.) є функцією, тоді нев’язка виходів об’єкта і моделі (1.4) приймає вигляд:

$$Q(F) = \int_0^T \rho\{Y(t), F(X)\}h(t)dt.$$

Для дискретного об’єкта (А=$\alpha\beta\gamma 1$) функціонал нев’язки виходів об’єкта і моделі записується у такій формі:

$$Q(F) = \sum_{i=1}^{N} \rho\{Y_i, F(X)\}h_i. \qquad (1.6)$$

Статичний дискретний об’єкт (А=$\alpha\beta\gamma 1$) має функціонал нев’язки виходів об’єкта і моделі, що записується у вигляді:

$$Q(F) = \sum_{i=1}^{N} \rho\{Y_i, F(X_i)\}h_i,$$

де:

$h_i>0$ $(i=1,...,N;\ \sum_{i=1}^{N} h_i = N)$ – вага інформації у *i*-й момент часу.

Якщо об’єкт стохастичний і дискретний (А=$\alpha 1\gamma 1$) і вимірювання, наприклад, містить випадкові завади з дисперсією помилки (σ_i^2), яка змінюється у межах ($i==1, ... ,N$), тоді вагу потрібно визначати таким чином:

$h_i = k/\sigma_i^2$,

де:

k – нормуючий член.

Отже, ступінь невідповідності (ступінь нев’язки) операторів моделі та об’єкта можна виразити у вигляді функціоналів типу (1.4) і (1.6), які суттєво залежать від оператора моделі *F*.

Процес ідентифікації, тобто процес визначення оператора моделі, потрібно проектувати так, щоб мінімізувати вказану нев'язку. Для цього необхідно розв'язати задачу мінімізації функціоналу *Q(F)* стосовно оператора *F*:

$$Q(F) \to \min_{F \in \Omega} \Rightarrow F^*. \qquad (1.7)$$

Цей символічний запис має такий фізичний зміст: необхідно мінімізувати функціонал *Q(F)*, змінюючи оператор (або у найпростішому випадку функцію) *F* не довільно, а у деякому визначеному класі операторів (або функцій) Ω. У співвідношенні (1.7) це позначено залежністю:

$$F \in \Omega.$$

Тобто *F* належить класу Ω, де:

Ω – заданий клас операторів або функцій.

Результатом процесу мінімізації є деякий оператор (або функція) *F** (не обов'язково єдиний), який має властивість:

$$Q^* = Q(F^*) = \min_{F \in \Omega} Q(F), \qquad (1.8)$$

Тобто нев'язка виходів оператора і об'єкта (*Q**) на цьому операторі мінімальна (точніше, не перевищує усіх можливих нев'язок, які можна одержати у класі операторів Ω).

Крім того, зауважимо, що подвійну стрілку ($\Rightarrow$) у формулі (1.7) слід читати як "є розв'язком".

Отже, для ідентифікації у заданому класі операторів Ω необхідно знайти оператор (функцію) *F*, який мінімізує функціонал нев'язки виходів об'єкта і моделі *Q(F)* у цьому класі операторів.

Твердження про те, що ідентифікація завжди зводиться до операції знаходження мінімуму, звичайно, перебільшене. Дійсно, легко уявити собі статичний об'єкт, який ідентифікується шляхом розв'язку системи лінійних або, у загальному випадку, нелінійних рівнянь. Однак, твердження про зведення задачі ідентифікації до задачі мінімізації має загальний характер для

усіх випадків ідентифікації з будь-якими класами допустимих операторів і функцій. У деяких найпростіших випадках задача розв'язується без залучення операції мінімізації, що еквівалентно зведенню задачі мінімізації до задачі визначення кореня рівняння шляхом прирівнювання до нуля похідних функції, яка мінімізується.

Отже, використання процесу мінімізації для розв'язування задачі ідентифікації об'єктів є принциповим і важливим етапом, який необхідний, як правило, при розв'язуванні складних задач ідентифікації.

Лекція №4

Ідентифікація структури і параметрів об'єкта

Структурна ідентифікація – це процес визначення структури оператора моделі *F*. Якщо ж структура цього оператора *F* визначена або апріорно відома, то процес ідентифікації зводиться до визначення параметрів цієї структури, тобто – до простішої задачі, ніж попередня. Таку ідентифікацію назвемо параметричною ідентифікацією (іноді перший процес називають ідентифікацією у широкому змісті, а другий – у вузькому) [8-11].

Отже, ідентифікація структури пов'язана, перш за все, з попереднім вибором структури моделі, а ідентифікація параметрів – тільки з визначенням параметрів цієї моделі при заданій структурі. Перший етап структурної ідентифікації передує другому і часто містить у собі другий, як складову частину.

На жаль поняття "*структура*" немає чіткого визначення. Під структурою моделі будемо розуміти вид оператора з точністю до його коефіцієнтів. Зазначимо, що структура об'єкта, яка кодується як (*A*), в загальному, може не співпадати зі структурою моделі. Зокрема, стохастичні властивості об'єкта, звичайно, не відображаються у моделі (модель вибирається попередньо і є детермінованою). При цьому стохастичні

властивості об’єкта лише визначають вибір методу ідентифікації параметрів моделі. Крім того, модель може попередньо мати менше входів і виходів, ніж об’єкт. Такий підхід часто використовують при незначному об’ємі спостереження, оскільки у цьому випадку параметри моделі визначити неможливо. Наведемо приклади.

Приклад 1. *Будь-який статичний неперервний об’єкт (A =0010) визначається функцією $y=F_0(x)$. Модель такого об’єкта можна зобразити у вигляді:*

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x).$$

В умовах визначеної системи функцій:

$$\Phi(x)=[\varphi_1(x),...,\varphi_k(x)].$$

Тут структура моделі задається системою функцій Ф(x) і числом k, а її параметрами є коефіцієнти: C_i, ..., C_k. Ідентифікація структури такого об’єкта полягає у пошуку системи функцій Ф(x), яка описує цей об’єкт, а параметрична ідентифікація зводиться до визначення параметрів коефіцієнтів при вибраній системі функцій.

Приклад 2. *У загальній формі модель динамічного детермінованого нелінійного неперервного об’єкта (A=1010) може бути представлена у вигляді розподілу за системою операторів:*

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i F_i(x)$$

де:

$F_i(x)$ (i=1,...,k) – система нелінійних операторів, визначення якої є основною метою структурної ідентифікації. Пошук чисел c_i (i=1,...,k) складає задачу параметричної ідентифікації.

Тепер уточнимо задачу ідентифікації. Попередньо було доведено, що задача ідентифікації зводиться до розв’язування задачі мінімізації функціоналу *Q(F)* стосовно оператора *F*:

$$Q(F) \to \min_{F \in \Omega} \Rightarrow F^*.$$

У цьому випадку проблема ідентифікації сформульована у загальному вигляді, коли ідентифікуються і структура, і параметри моделі. Нехай структура моделі відома, тобто задача структурної ідентифікації вирішена. Тоді оператор *F(x)* може бути представлений у вигляді:

F(x)=f(x,C),

де:

f(x₁,…,xₙ) – заданий оператор;

C=(cᵢ…,cₖ) – вектор невідомих параметрів моделі.

Задача ідентифікації параметрів моделі може бути записана у вигляді задачі мінімізації функції (а не функціоналу) нев'язки виходів об'єкта і моделі:

$$Q(C) \to \min_{c \in R^k} \Rightarrow C. \qquad (1.9)$$

Розв'язком такої функції є вектор $C^*=(c_1^*, c_2^*,\ldots,c_k^*)$.

У цьому випадку функція:

$$Q(C) = \int_0^T \rho\{Y(t),\, f[X(t), C]\} h(t) dt$$

є функцією нев'язки виходів об'єкта і моделі, а R^k – k-вимірний евклідовий простір векторів C.

Труднощі розв'язку задачі полягають у організації ефективного процесу мінімізації заданої функції багатьох значень (k) змінних. Зазначимо, що коли структура моделі відома, то число змінних k визначено наперед.

Часто структуру можна зашифрувати, ввівши структурні параметри. У загальному випадку позначимо ці параметри вектором:

D=(d₁,…,d_q).

Це означає, що структура шифрується q величинами ($d_1,\ldots,d_q$). Тоді оператор моделі буде мати такий вигляд:

$F(X)=f(X,C,D),$

де:
f – заданий оператор.

Отже, оператор моделі визначається двома видами параметрів:
- структурними (D);
- параметрами об'єкта (C).

Функція нев'язки виходів об'єкта і моделі у такому випадку прийматиме вигляд:

$$Q(C,D)=\int_0^T \rho\{Y(t),\, f(X,C,D)\}h(t)dt.$$

Тоді, задача ідентифікації у широкому змісті зводиться до розв'язку наступної задачі мінімізації функції (k+q) змінних:

$$Q(C,D)\to \min_{\substack{c\in R\\ D\in S^k}} \Rightarrow C^*, D^*,$$

де:
S – область визначення структурних параметрів.

Зазначимо, що зведення задачі загальної ідентифікації (1.7) до параметричної ідентифікації (1.9) і (1.10) має умовний характер. Метою такого перетворення є спрощення задачі і зведення теперішньої задачі до раніше відомої з добре розробленими методами розв'язку. Такою задачею є задача математичного програмування: мінімізація функції багатьох змінних, що належать заданій множині [12]. Саме так можна сформулювати задачу параметричної ідентифікації.

Однак, не слід вважати, що таке зведення задачі ідентифікації до задачі математичного програмування вирішує усі проблеми ідентифікації. У цьому

випадку виникає спектр нових питань. Наприклад, яким чином таке зведення зробити для конкретного випадку постановки задачі або як розв'язати отриману задачу мінімізації? Наведені питання на кожному етапі конкретизації моделі є причиною виникнення нових питань і т.д. Водночас, зв'язок ідентифікації з математичним програмуванням, який наведено вище, слід завжди мати на увазі, позаяк це може бути одним із векторів знаходження оптимальної кількості вхідних факторів при моделюванні поведінки об'єктів.

Лекція №5
Класифікація методів ідентифікації

Будемо розрізняти методи ідентифікації за трьома класифікаційними ознаками і характеризувати будь-який вибраний метод значеннями цих ознак:

$$C =< \xi, \eta, \zeta >,$$

де:
ξ, η, ζ – структурні ознаки, які можуть приймати два значення.

Зазначимо, що структура методу повністю не характеризується цими трьома ознаками. Вказані ознаки призначені, швидше, для визначення методу, а ніж для його опису. Розглянемо і охарактеризуємо ці ознаки.

1. **Ознака активності** ξ. Метод ідентифікації будемо називати *активним* (ξ=1), якщо при його реалізації можливо задавати і змінювати, певним чином, стан входів об'єкта, тобто опосередковано змінювати стан середовища. У цьому випадку відбувається так зване керування об'єктом для досягнення мети ідентифікації. Якщо умови середовища, в якому міститься об'єкт, не дозволяють керувати станом його входу, тоді метод його ідентифікації будемо називати *пасивним* (ξ=0). Тоді, стан входів об'єкта можна охарактеризувати апостеріорною інформацією (B), що ґрунтується на результатах дослідження, отриманих у процесі нормальної експлуатації

об’єкта. Блок-схема реалізації активного методу показана на рис. 1.4. У даному випадку вхід об’єкта керується у процесі ідентифікації таким чином, щоб підвищити її ефективність.

2. **Ознака адаптивності** η. Якщо апріорна інформація β про поведінку об’єкта використовується у процесі ідентифікації не зразу ж, а у процесі її поступлення чи циклічно і при цьому значення параметрів, що ідентифікуються, коректуються на кожному етапі (дискретно) чи неперервно, тоді такий метод будемо називати *адаптивним* (модель при цьому ніби адаптується до об’єкта таким чином, щоб її реакція (на виходах) на вплив факторів зовнішнього середовища мінімально відрізнялась від реакції самого об’єкта). У протилежному випадку метод називається неадаптивним (η =0).

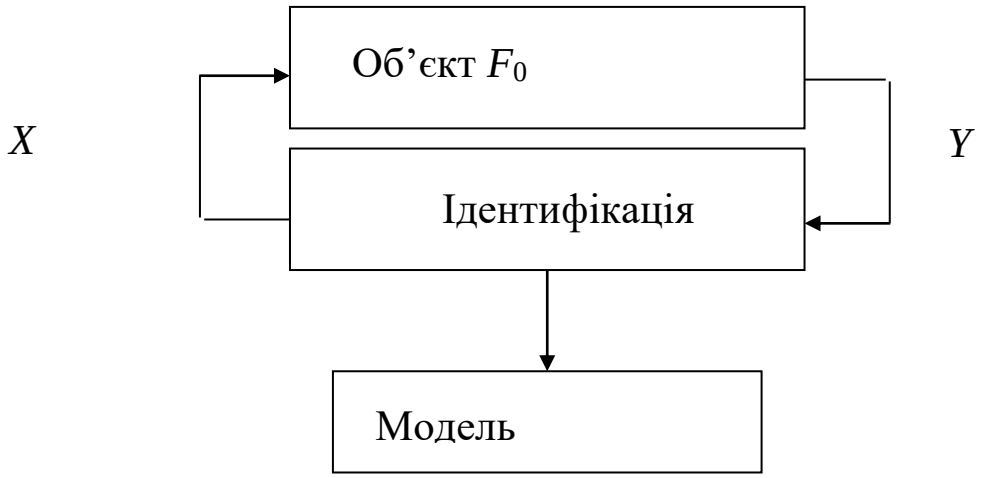


Рис. 1.4. Блок-схема активного методу ідентифікації.

Якщо адаптивний метод параметричної ідентифікації застосовувати у реальному масштабі часу, використовуючи безпосередньо вимірювання входу і виходу об’єкта, тоді його називають методом самонастроюваної моделі. Суть цього методу полягає у наступному (рис. 1.5).

У кожен момент часу зіставляють виходи об’єкта і моделі, при цьому квадрат різниці виходів мінімізується шляхом відповідного вибору параметрів (*C)* оператора моделі. Для підвищення ефективності процесу мінімізації використовують інформацію про стан середовища (*X)*. Як видно з

рис. 1.2, модель таким чином постійно підлаштовується до об'єкта, щоб їх реакції на один і той же вхід у кожен момент часу відрізнялись мінімально.

Адаптивний метод для дискретних об'єктів *(A=αβγ1)* завжди описується рекурентною формулою виду:

$$C_i = I(C_{i-1}, X_i, Y_i), \qquad (1.11)$$

де:

C_i – вектор ідентифікуючих параметрів на *i*-му кроці адаптації;

I – алгоритм адаптації.

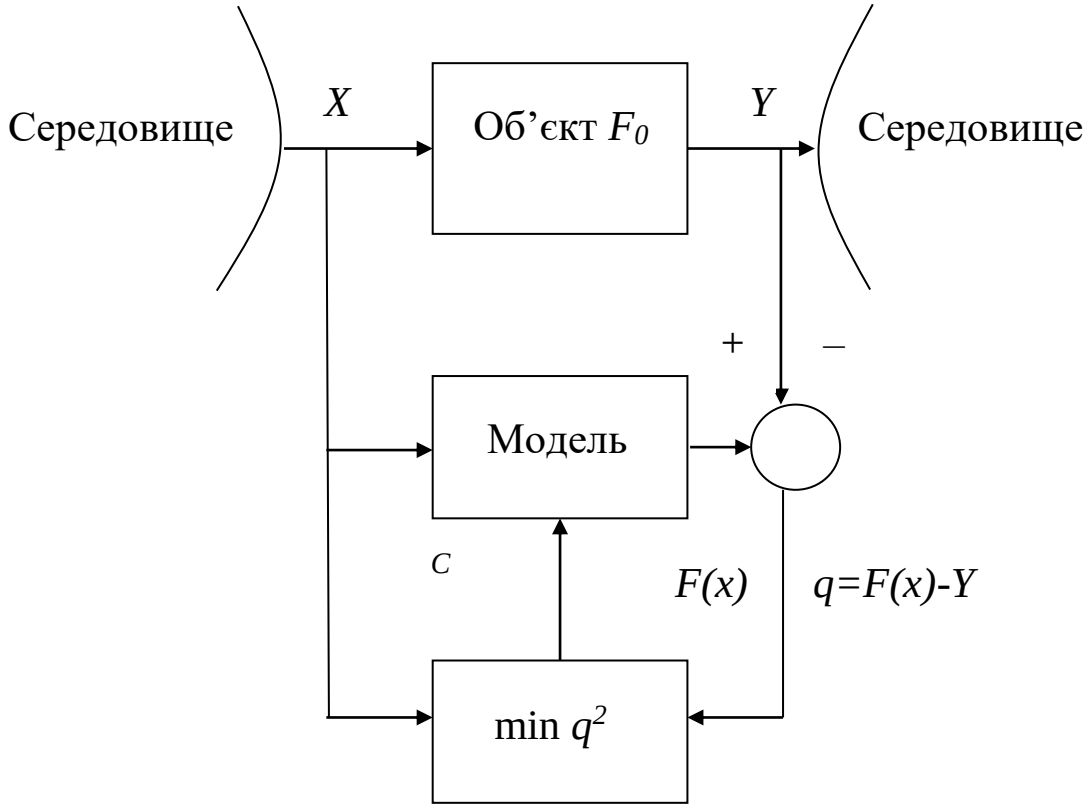


Рис. 1.5. Блок-схема реалізації методу самоналаштовування моделі.

Наведений вираз зручно записати у вигляді:

$$C_i = C_{i-1} + \Delta C_i, \qquad (1.12)$$

де:

ΔC_i – приріст, що реалізується алгоритмом адаптації:

$$\Delta C_i = \varphi(C_{i-1}, X_i, Y_i).$$

У *k*-вимірному просторі ідентифікуючих параметрів $C = (c_1, ..., c_k)$ процес адаптації ілюструється ламаною $(C_0,...,C_{i-1}, C_i,C_{i+1}, ...)$, яка прямує до певної точки $C^* = (c_i,...,c_k)$ – точному значенню параметрів (рис. 1.6).

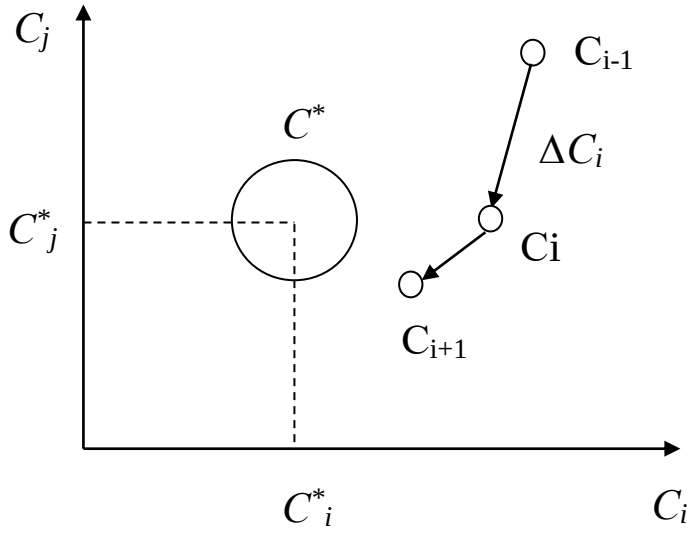


Рис. 1.6. Приклад функціонування адаптивного методу.

Для неперервного об’єкта *(A=αβγ0)* процес адаптивної ідентифікації реалізується диференціальним рівнянням:

$$\frac{dC}{dt} = \varphi(C, X(t), Y(t)). \qquad (1.13)$$

Водночас режим адаптивної ідентифікації може реалізовуватись не тільки за схемою моделі самоналаштовування, тобто – у режимі реального масштабу часу.

Якщо об’єм спостереження є незначним, тобто величини N (у дискретному випадку) і T (у неперервному випадку) не є достатньо великими, тоді однократне використання інформації (β) може не вирішити задачі ідентифікації. У цьому випадку доцільно створити цикл значень $\beta' = \beta\beta\beta\ldots$, використання якого забезпечить розв’язок поставленої задачі.

Зазначимо ще одну особливість адаптивного методу. Використання цього методу майже ніколи не забезпечить розв’язок задачі ідентифікації абсолютно точно, принаймі у пасивному варіанті (ξ=0). Зате вказаний метод дозволяє постійно поліпшувати значення ідентифікуючих параметрів. Тому адаптивний метод доцільно застосовувати для ідентифікації “дрейфуючих”

об’єктів, параметри яких повільно змінюються. У цьому випадку адаптивний метод дозволить простежити повільні зміни над виходами об’єктів.

3. ***Ознака кроку*** *ζ.* Якщо ідентифікуючі параметри у процесі адаптивної ідентифікації (η=0) змінюються дискретно, тоді такий метод будемо називати *кроковим* (ζ=1). У протилежному випадку метод є неперервним (ζ=*0*). Зокрема, адаптивний метод (1.11) має кроковий характер, а (1.13) – неперервний.

З наведеного вище можна зробити висновок, що за трьома ознаками метод ідентифікації описати просто неможливо, однак, описані ознаки характеризують структурні особливості методу, які визначаються специфікою поведінки об’єкта.

Лекція №6

Математичні моделі об’єктів

Попередньо показано, що об’єктом ідентифікації є все те, що пізнається внаслідок аналізу інформації, яку отримують у процесі оброблення даних. Дані отримують у процесі вимірювання змінних на деякому кінцевому інтервалі спостереження, а також у процесі обчислення відомих функцій, які задають аналітично або алгоритмічно. При ідентифікації отримують інформацію у найбільш стислому вигляді. Цього досягають внаслідок побудови математичних моделей. При цьому будують моделі двох типів.

Перший тип – це математичні моделі, які детально описують внутрішні і зовнішні процеси у об’єкті. Такі моделі опосередковано імітують об’єкт, тому їх називають *імітаційними* [18-20].

Другий тип – це математичні моделі, які ґрунтуються на взаємозв’язку виміряних або обчислених змінних. Такі моделі дозволяють отримати передбачуване значення виходів об’єкта із заданою точністю. Математичні

моделі відрізняються, як правило, простотою опису, порівняно з імітаційними моделями.

Надалі будемо розглядати тільки математичні моделі другого типу. Цей тип математичних моделей будують виходячи з таких міркувань.

Вихідний сигнал досліджуваного лінійного об'єкта $y_0(t)$ можна подати у вигляді суми двох складових – вільної і вимушеної: $y_{віл}(t)$ і $y_{вим}(t)$, тобто:

$$y_0(t) = y_{віл}(t) + y_{вим}(t).$$

Вільна складова характеризує перехідний процес, а отже, і вагову функцію $K(t)$, яку можна записати як реакцію досліджуваного об'єкта на вхідний сигнал типу дельта-функції $\sigma(\tau)$, тобто:

$$K(t)= y_{віл}\,(\sigma(\tau),t),$$

де:

τ – час, який визначає момент прикладання вхідного сигналу дельта-функції $\sigma(\tau)$ до входу досліджуваного об'єкта.

Вагова функція $K(t)$ є розв'язком відповідного диференціального або інтегрального рівняння, яку можуть задавати у неперервній або дискретній формі. Тому математична модель вільної складової може мати різні форми запису, які відрізняються як структурою, так і параметрами. Вибір математичної моделі залежить від поставленої дослідником задачі і його індивідуальних особливостей.

Вимушена складова $y_{вим}(t)$ є реакцією досліджуваного об'єкта у встановленому режимі, тобто у такому режимі, коли перехідний процес закінчено, а зміна вихідного сигналу відбувається лише під дією вхідного сигналу. При дослідженні процесу функціонування об'єкта вимушену складову записують як функцію часу:

$$y_{вим}(t)=P_M u_{вх}(t).$$

У цьому випадку функція часу характеризує процес відслідковування об’єктом вхідного сигналу $u_{вх}(t)$ конкретної форми. Зокрема:

- якщо $u_{вх}(t)=C = const$, а досліджуваний об’єкт лінійний, тоді $y_{вим}(t)= C_1$.
- якщо $u_{вх}(t)=asin\omega t$, тоді $y_{вим}(t)=Asin(\omega t+\varphi)$ і т.д.

Для нелінійних об’єктів вказаний процес є дещо складнішим. Розділити вихідний сигнал на вільну і вимушену складову не завжди можливо, тому розглядають ці системи разом. При цьому часто зустрічаються об’єкти, коли вільною складовою можна знехтувати. Тоді розглядають тільки вимушену складову.

Аналіз характеристик “вхід-вихід” у параметричному вигляді, тобто аналіз залежностей $y_{вим}(t)=F(u_{вх})$, також не потребує розділення вихідного сигналу на складові. У цьому випадку будують математичну модель не для вхідного сигналу конкретної форми, а залежно від амплітуди вихідного сигналу. Очевидно, що крім амплітуди велике значення мають швидкість, прискорення та інші характеристики вхідного сигналу. Наявність практичних вимог до опису структури і параметрів об’єктів зумовлює появу широкого спектру класів моделей. Розглянемо конкретніше математичні моделі, які застосовують на практиці.

Лінійні динамічні моделі. Ці моделі мають вигляд лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1}(t)\frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1(t)y(t) + b_0(t)y(t) =$$

$$a_n(t)\frac{d^m u(t-\tau)}{dt^n} + \ldots + a_1(t)\frac{du}{dt}(t-\tau) + a_0(t-\tau)u(t-\tau), \quad (1.14)$$

де:

$\{b_{m-1t}),b_{m-2}(t),\ldots,b_0(t),a_n(t),\ldots,a_0(t)\}$ – вектор невідомих параметрів моделі;

{m,n} – вектор невідомих параметрів структури;

τ – запізнення.

На практиці часто справедливе припущення, що параметри $a_i(t)$ і $b_i(t)$ під час розв'язування задачі оцінювання приймають постійними. Тоді лінійні диференціальні рівняння (1.14) спрощуються і приймають вигляд:

$$\frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_0 y(t) = a\frac{d^m u(t-\tau)}{dt^m} + ... + a_0 u(t-\tau). \quad (1.15)$$

Якщо у рівнянні (1.15) початкові умови нульові, тоді застосовуючи до нього перетворення Лапласа, визначаємо *передавальну функцію* системи:

$$W(s) = \frac{a_n s^n = a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0} \quad (1.16)$$

Широке застосування на практиці має модель, яка задається у вигляді *інтеграла згортки* [21]*:*

$$y(t) = y(t_0) + \int_0^t K(\tau) u(t-\tau) dt, \quad (1.17)$$

де:
$K(\tau)$ – вагова функція;
$y(t_0)$ – початкова умова.

Особливість рівняння (1.17) полягає у тому, що його застосовують для лінійних систем як із змінними параметрами, так і з постійними. Крім того, це рівняння є справедливим і для лінійних систем з розподіленими і нерозподіленими параметрами.

Будь-яку систему з математичної точки зору можна представити у вигляді оператора, за допомогою якого вхідний сигнал $u(t)$ перетворюється у вихідний сигнал $y(t)$. Цю залежність можна описати у вигляді:

$y(\tau) = A\{ u(t)\},$

де:

$A\{,\}$ – оператор .

Оператор *A{,}* може залежати від часу. Якщо оператор *A{,}* не залежить від часу, тоді стверджують, що система не залежить від часу (необхідно відрізняти від вихідного сигналу системи *y(τ)*). Для лінійних систем, незалежних від часу, вихідний сигнал записують у вигляді:

$$y(t) = \int_0^{\infty} K(\tau)u(t-\tau)dt.$$

Модель, яка характеризує динаміку лінійної системи, можна записати у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11}x_1(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t)+b_1u(t) \\ x_2(t) &= a_{21}x_1(t)+\ldots+a_{2n}x_n(t)+b_2u(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t) &= a_{n1}x_1(t)+\ldots+a_{nn}x_n(t)+b_nu(t) \end{aligned} \qquad (1.18)$$

$$y(t) = c_1x_1 + c_2x_2 +\ldots+ c_nx_n +du, \qquad (1.19)$$

де:
a_{ij}, b_i, c_j – параметри моделі.

Рівняння (1.18) називають рівнянням стану, а рівняння (1.19) – рівнянням вимірювань. Систему (1.18) і (1.19) зручно записати у математичному вигляді:

$$X(t) = AX(t) + Bu(t); \qquad (1.20)$$
$$y(t) = CX(t) + Du(t) \qquad (1.21)$$

Перехід від моделі (1.20) і (1.21) до моделі (1.16) здійснюють таким чином.

Припустимо, що $X(0) = 0$. Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння (1.20) і враховуючи нульові початкові умови, отримаємо:

$$X(s) = AX(s) + Bu(s).$$

Групуючи подібні члени, знаходимо значення *X(s)* у вигляді:

$$X(s) = [sE - A]^{-1} Bu(s),$$

де:
E – одинична матриця.

Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння (1.21) після підстановки у нього значення $X(s)$, отримаємо значення вимірюваного сигналу:

$$Y(s) = [\, C[sE - A]^{-1} B + D]u(s).$$

Отже, передавальну функцію $W(s)$ можна записати у вигляді:

$$W(s) = C[sE - A]^{-1} B + D.$$

Характерним для лінійних рівнянь є справедливість принципу суперпозиції, який, у більшості випадків, використовують при дослідженні об'єкта. Принцип суперпозиції використовують, аналізуючи реакцію об'єкта на окремі вхідні сигнали, що особливо важливо при вивченні складних систем.

Виходячи з того, що змінні $u(t)$ і $y(t)$ є випадковими функціями у результаті накладення завад або похибок обчислень, і взаємозв'язок між змінними визначають за усередненими значеннями, тому такі рівняння будемо називати *рівняннями регресії*. Розрізняють лінійні і нелінійні, динамічні і статичні рівняння регресії.

Лінійна статична регресія – це регресія, яка має вигляд:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N} a_m u_m(n) + \xi(n), \qquad (1.22)$$

де:
$\xi(n)$ – завада, виміряна у n-й момент часу.

Лінійна динамічна регресія – це залежність, яка має вигляд:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N} a_m u_m(n-m) + \xi(n). \qquad (1.23)$$

У регресивному аналізі розрізняють *авторегресивні моделі*, які мають вигляд:

$$y(n) + \sum_{m=0}^{N} b_m y(n-m) = \xi(n). \qquad (1.24)$$

З рівняння (1.24) видно, що на вході авторегресивних моделей присутній тільки сигнал завади.

Нелінійні моделі. Широке розповсюдження отримали математичні моделі у вигляді функціональних рядів. Це зумовлено тим, що для будь-якої неперервної на обмеженому інтервалі функції при заданій точності можна знайти алгебраїчний поліном, який буде апроксимувати цю функцію з заданою точністю [22].

Статичні нелінійні моделі. Розрізняють функціональні ряди однієї і багатьох змінних. Поліном однієї змінної можна описати у вигляді:

$$y(x) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n, \qquad (1.25)$$

а поліном багатьох змінних має вигляд:

$$y(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i u_j + \ldots \qquad (1.26)$$

Загальний вигляд моделі, заданої функціональним рядом, можна зобразити таким чином:

$$y(u) = \sum_{i=0}^{n} a_1 f_i(u),$$

де:

$u=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$; $f_i(n)$ – функції багатьох аргументів.

Модель у вигляді тригонометричного полінома описується двома виразами:

- тригонометричним поліном з кратними частотами:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t) \qquad (1.27)$$

- тригонометричним поліном з некратними частотами:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \qquad (1.28)$$

Ряд Тейлора. Якщо значення функції *F(x)* і ряд її похідних можуть бути обчислені у точці *x=a*, тоді функція *F(x)* є поліномом *n*-го степеня, який має вигляд:

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Інтерполяційна формула Лагранжа. Якщо можна обчислити значення функції *F(x)* у *(n+1)*-ій точці, тоді для наближеного обчислення функції *F(x)* у проміжних точках будують поліном *n*-го порядку:

$$F(x) = A_0 + A_1(x) + \ldots + A_n x^n = f(x). \qquad (1.29)$$

Значення функції *F(x)* і полінома у точках $a_1,\ldots,a_{n+1}$ співпадають, тобто:

$F(a_1) = f(a_1)$, $F(a_2) = f(a_2)$,...., $F(a_{n+1}) = f(a_{n+1})$.

Поліном *F(x)* можна записати у дещо іншій формі:

$$F(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n+1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_{n+1})} f(a_1) +$$
$$\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n+1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_{n+1})} f(a_2) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{1n+}-a_n)} f(a_{n+1}).$$

Такий поліном будемо називати *інтерполяційним багаточленом Лагранжа*.

Приклад.
За умови, коли:
f(-1)=2, f(0)=1, f(1)=4, f(2)=11,
отримаємо:

$$F(x)=\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)}2+\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)}+\frac{(x+1)x(x+2)}{2\cdot 1\cdot(-1)}4+$$

$$\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 11=2x^2+x+1$$

З наведеного прикладу видно, що степінь інтерполяційного багаточлену може бути меншим від (*n)*, де (*n+1*) – кількість точок інтерполяції.

Найпростішою статичною моделлю є лінійна залежність вихідного сигналу від вхідного:

$$y(t) = k(t)u(t) \qquad (1.30)$$

де:
k(t) – коефіцієнт пропорційності.

Для моделей, що мають один вихід і декілька входів, ця залежність описується виразом, який має вигляд:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i(t)u(t). \qquad (1.31)$$

Коефіцієнти $k_i(t)$ можуть і не залежати від часу, тоді модель (1.31) суттєво спрощується. У цьому випадку рівняння моделі описується виразом, який має вигляд:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i(t). \qquad (1.32)$$

Нелінійна статична модель при *n* вхідних сигналах і одному вихідному описується у вигляді багатовимірного степеневого поліному:

$$y(t)=a_0+\sum a_iu_i+\sum\sum b_{ij}u_iu_j+\ldots \qquad (1.33)$$

Або у вигляді ряду:

$$y(t)=a_0+\sum b_i f_i(u), \qquad (1.34)$$

де:
$u(t) = \{u_1(t), u_2(t),..., u_n(t)\}$.

Модель, описана виразом (1.33), шляхом заміни змінної може бути зведена до моделей, описаних виразами (1.32) чи (1.34).

Нелінійні динамічні моделі об'єктів. Спектр нелінійних моделей значно ширший, ніж лінійних. Практично кожна "нелінійність" потребує своєї математичної моделі, отже, кожна нелінійна система має свій математичний опис. Наприклад, рівняння руху ракети, яка вертикально стартує, можна записати у вигляді:

$$m(t)\frac{d^2h}{dt^2} + k(\frac{dh}{dt})^2 + m(t)g = c\frac{dm(t)}{dt}, \qquad (1.35)$$

де:
h – висота ракети над точкою старту;
m – миттєва маса ракети;
k і c –позитивні коефіцієнти.

У наведеному рівнянні "нелінійність" визначається квадратичною залежністю швидкості зміни висоти.

Динамічні нелінійні системи з гладкими "нелінійностями" описуються за допомогою рядів Вольтера. Побудова рядів Вольтера відбувається таким чином.

Зобразимо нелінійну систему у вигляді двох послідовно з'єднаних блоків: лінійного ($W_л$) і нелінійного ($W_{нл}$) (рис. 1.11).

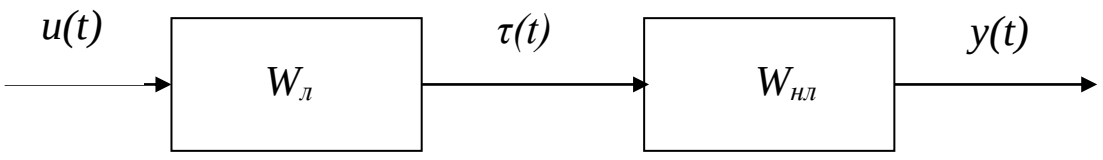


Рис. 1.11. Зображення нелінійної системи у вигляді послідовного з'єднання лінійної і нелінійної ланки.

Вихідний сигнал лінійної ланки $W_л$ записують у вигляді інтеграла згортки (1.17):

$$z(t)\int_0^t K(\tau)u(t-\tau)d\tau. \qquad (1.36)$$

Оскільки вихідний сигнал: *y(t) = y (z(t))*, тоді, розкладаючи (1.36) за степенями *z(t),* отримаємо ряд:

$$y(t) = \sum_i z^i(t). \qquad (1.37)$$

Підставляючи (1.36) у (1.37), отримаємо вираз:

$$y(t) = \int_o^t K_1(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^t K_2(\tau,\theta)u(t-\tau)d\tau x$$

$$x\ u(t-\theta)d\tau d\theta, \qquad (1.38)$$

який і визначає ряд Вольтера. У ньому:

$K_1(\tau) = K(\tau);\ K_2(\tau,\theta) = K(\tau)\ K(\theta),...$

Із розглянутих математичних моделей об'єктів важливим для ідентифікації є те, що моделі поділяють на параметричні (1.16), (1.31) і непараметричні (1.30). Параметричні моделі, у свою чергу, поділяють на лінійні за параметрами (1.26), (1.27) і нелінійні (1.16), (1.23), (1.38).

Методи синтезу математичних моделей

Методика синтезу математичних моделей суттєво залежить від об'єму апріорної інформації. У кожному конкретному випадку під апріорною інформацією розуміють інформацію про об'єкт спостереження, що є у наявності до початку проведення поточного етапу дослідження об'єкта.

Припустимо, що яка-небудь інформація про об'єкт спостереження відсутня. У цьому випадку об'єкт спостереження відносять до об'єктів типу "чорний ящик". Тоді єдиною можливістю дослідження об'єкта є спостереження за його входами і виходами і побудова на цій основі математичної моделі.

Зазвичай розглянута ситуація зустрічається рідко. Як правило, на початковому етапі ідентифікації є відомими принципи функціонування об’єкта, принаймні ті, які закладалися у структуру об’єкта при його створенні (у цьому випадку об’єкт є “сірим ящиком”). Тоді задачу розроблення математичної моделі вирішують у два етапи.

На першому етапі на основі апріорних відомостей про физико-хімічні процеси, що відбуваються у об’єкті ідентифікації, складають початкову структурну модель. Зазвичай ця модель містить невідомі параметри, знаходження яких за апріорними даними є дуже складним або неможливим процесом. Крім того, така модель часто містить деякі елементи структури, необхідність введення яких у модель не є обов’язковою.

Під час реалізації другого етапу на підставі експериментальних досліджень визначають невідомі параметри об’єкта ідентифікації і уточнюють його структуру.

Зазначимо, що процес синтезу математичної моделі на основі спостереження (експериментальних досліджень), тобто процес виявлення структури і параметрів оператора моделі $F_м$, називають ідентифікацією у широкому змісті.

Принципові труднощі виявлення оператора $F_м$ пов’язані з тим, що у процесі експериментальних досліджень деякі змінні входів об’єкта (вектор E) залишаються непередбачуваними, а, відповідно, і некерованими.

Водночас можливий випадок, коли є повна апріорна інформація про об’єкт (у цьому випадку об’єкт розглядають як “прозорий ящик”). При цьому можлива побудова математичної моделі аналогічним шляхом. За аналогією до попереднього методу такий спосіб знаходження $F_м$ оператора називають *аналітичною ідентифікацією*. Аналітичний шлях отримання математичної моделі, в основному, застосовують лише для добре вивчених простих об’єктів ідентифікації. Для складних об’єктів після аналітичного конструювання математичних моделей, як правило, необхідні додаткові експериментальні дослідження. Метою цих досліджень є:

- перевірка правильності основних теоретичних положень, прийнятих

при розробленні математичної моделі;

- виявлення за необхідності деяких параметрів моделі.

Така “комбінована” схема дослідження об’єкта ідентифікації дуже близька до схеми ідентифікації об’єкта типу “сірий ящик”. Відмінність полягає лише у тому, що при “аналітичному” методі формування моделі основним об’ємом дослідження є глибокий теоретичний аналіз причинно-наслідкових зв’язків між змінними і виявлення закономірностей, що визначають перебіг процесів у об’єкті. Це дозволяє суттєво зменшити об’єм експериментальних досліджень.

У процесі розроблення математичних моделей, на початкових етапах ідентифікації виникає питання, як оцінити “близькість” оператора $F_м$ операторові об’єкта F_0. Властивості об’єкта і моделі порівнюють за їхніми реакціями (відгуком) на одну і ту ж вхідну дію.

Припустимо, що реакція одновимірного об’єкта описується деякою функцією $y_0(t)$, а реакція моделі – $y_м(t)$. Тоді ступінь близькості цих реакцій у кожен момент часу можна оцінити їх різницею:

$$\Delta y(t) = y_0(t) - y_м(t), \qquad (1.39)$$

або модулем цієї різниці.

Для оцінювання близькості $y_0(t)$ і $y_м(t)$ на усьому інтервалі спостереження $(0, T_k)$ часто використовують інтегральний показник:

$$q = \int_0^{T_k} [\Delta y(t)]^2 dt. \qquad (1.40)$$

У цьому випадку $\Delta y(t)$ беруть у квадраті для того, щоб відхилення різних знаків взаємно не компенсувалися.

Для багатовимірних об’єктів відхилення векторів $Y_м(t)$ виходу моделі від вектора $Y_0(t)$ виходу об’єкта у кожен момент часу можна оцінити, наприклад, значенням квадрату різниці цих векторів:

$$q(t) = [Y_0(t) - Y_м(t)]^2 = \sum_{i=1}^{m} [y_{0i}(t) - y_{мi}(t)]^2 , \qquad (1.41)$$

де:
m – кількість вихідних змінних об’єкта.

Залежно від властивостей моделі і об’єкта використовують також інші форми оцінювання близькості їх реакцій. Очевидно, що у загальному випадку при розробленні математичної моделі необхідно мінімізувати вибране оцінювання близькості.

У разі, коли можна визначити структуру моделі об’єкта, невідомі коефіцієнти цієї моделі вибирають, використовуючи *метод найменших квадратів* [23]. Використання цього методу можна пояснити на прикладі.

Приклад. *Нехай структура моделі об’єкта задана у такому вигляді:*

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + . + a_n x_n \qquad (1.42)$$

де:

y – вихідна величина;

$x_i (i = 1, \overline{n})$ *– вхідні параметри;*

$a_i (i = 1, \overline{n})$ *– коефіцієнти моделі.*

Зазначимо, що модель (1.42) є загальною, тобто її параметри можуть бути різними функціями (наприклад: $x_i = x_i'^2$; $x_k = x_i' x_k'$; $x_p = s_{in}\omega_q$ і т.д.). Очевидно, що модель є лінійною стосовно невідомих коефіцієнтів a_i.

Виходячи з формули (1.42) для кожної точки експериментальних даних можна скласти умовне рівняння:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \ldots + a_n x_{ni}$$

і визначити квадрат відхилення (помилки) за формулою:

$$\hat{\delta}_i = (y_i - \hat{y}_i) = (y_i - a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \ldots + a_n x_{ni})^2 , \quad (1.43)$$

де:

y_i, $\hat{y}_i$ – відповідно емпіричне і отримане згідно моделі значення вихідної величини у *i-й* точці;

x_{ki} ($k = 1, \overline{n}$) – значення вхідних параметрів у *i-й* точці. Фактично y_i і $\hat{y}_i$ – значення вихідної змінної, отримані за допомогою оператора об'єкта F_0 і оператора моделі $F_м$.

Рівняння (1.42) складається для усіх N точок таблиці експериментальних даних і утворюють систему головних рівнянь Гауса. При цьому після додавань рівнянь (1.43) для усіх N експериментальних точок, отримаємо:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + ... + a_n x_{ni})^2 \quad (1.44)$$

Метод найменших квадратів полягає саме у мінімізації виразу (1.44). Мінімальне значення Δ^2 називають *залишковою сумою квадратів*, або точністю за методом найменших квадратів. Інакше кажучи, метод найменших квадратів полягає у такому розрахунку оцінювання коефіцієнтів моделі a_0, a_1, a_2 ., a_n, для яких вираз (1.44) є мінімальним.

Для обчислення мінімуму у виразі (1.44) знаходимо вирази для часткових похідних за усіма відомими коефіцієнтами a_i і прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_0} = 0; \frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_1} = 0; \frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_2} = 0; \frac{\partial(\Delta^2)}{\partial a_n} = 0.$$

Звідси отримаємо систему рівнянь Гауса для рівняння (1.42):

$$\begin{cases} a_0 + a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \text{K} + a_n\overline{x}_n = \overline{y} \\ a_0\overline{x}_1 + a_1\overline{x}_1^2 + a_2\overline{x}_1\overline{x}_2 + \text{K} + a_n\overline{x}_1\overline{x}_n = \overline{x}_1\overline{y} \\ a_0\overline{x}_2 + a_1\overline{x}_1\overline{x}_2 + a_2\overline{x}_2^2 + \text{K} + a_n\overline{x}_2\overline{x}_n = \overline{x}_2\overline{y} \\ \text{K K K K K ..K K K K K K K K K K} \\ a_0\overline{x}_n + a_1\overline{x}_1\overline{x}_n + a_2\overline{x}_2\overline{x}_n + \text{K} + a_n\overline{x}_n^2 = \overline{x}_n\overline{y} \end{cases} \quad (1.45)$$

де:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{ik}\ ; \qquad \bar{x}_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{i\,k}^2\ ; \qquad \bar{x}_i\bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{ik}x_{j_k}\ ;$$

$$\bar{x}_i\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{ik}y_k\ .$$

Вирішуючи систему за методом Гауса, отримаємо оцінку коефіцієнтів моделі.

Систему умовних рівнянь Гауса для об'єкта ідентифікації можна представити у математичному вигляді:

$$X\,a = y \qquad (1.46)$$

де:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \text{K} & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \text{K} & x_{n2} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \text{K} & x_{nN} \end{vmatrix};$$

$$a = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \text{M} \\ a_n \end{vmatrix}; \quad y = \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \text{M} \\ y_n \end{vmatrix}, \qquad (1.47)$$

де:
X – N_{xn} – прямокутна матриця умовних рівнянь; зазвичай $N >> n$;
N – кількість дослідів;
n – кількість аргументів (вхідних змінних);
a – стовпець коефіцієнтів;
y – стовпець спостережень вихідної величини.

Для отримання системи нормальних рівнянь Гауса необхідно

помножити матрицю X на транспортовану:

$$X^T X a = X^T y. \qquad (1.48)$$

Результатом наведених дій над матрицями X^T та X є квадратна $n \times n$ нормальна матриця. Помноживши обидві частини матричного рівняння на обернену матрицю отримаємо:

$$(X^T X)^{-1} X^T X a = (X^T X)^{-1} X^T y \qquad (1.49)$$

де:
$(X^T X)^{-1} X^T X = E.$
Тепер отримаємо вирішення системи нормальних рівнянь:

$$a = (\mathrm{X}^{\mathrm{T}} X)^{-1} X^T y. \qquad (1.50)$$

Приклад.

1) Для прямої: $y=a_0+a_1x$

$$a_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N} - \frac{b\sum_{n=1}^{N} x_n}{N};$$

$$b = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n y_n - \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n \sum_{n=1}^{N} y_n}{N}}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n \sum_{n=1}^{N} x_n}{N}}.$$

У цілому пошук оптимальної моделі проводять у заданій множині структур S (клас опорних функцій). Вибір множини залежить від виду задачі, що вирішують. Розглянемо декілька класів функцій, придатних для складання математичної моделі об’єкта ідентифікації.

Клас алгебраїчних функцій. У цьому класі найбільш загальною формою моделі є поліном Колмогорова - Габора від *k* змінних:

$$y = a_o + \sum_{i=1}^{k} a_i U_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} U_i U_j + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{e=1}^{k} a_{ije} U_i U_j U_e + \mathrm{K} \qquad (1.51)$$

Наведений поліном є сумою лінійних, квадратичних, кубічних та інших членів. Після перетворення усіх наявних у ньому доданків отримаємо лінійний поліном:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + . + a_n x_n \qquad (1.52)$$

Члени цього полінома і складають початковий набір аргументів, а їх можлива лінійна комбінація – початковий базис моделей (множина структур *S*). Для збільшення різноманітності моделей змінні υ_i можна ввести у формулу (1.51) у прямому і зворотному ($1/\upsilon_i$) вигляді.

У класі алгебраїчних функцій можна задати й іншу загальну модель (мультиплікативну) від *k* змінних:

$$u = q U_1^{a_1} U_2^{a_2} \cdot \mathrm{K} \cdot U_n^{a_n} . \qquad (1.53)$$

Така функція після логарифмування прийме вигляд:

$$\ln u = \ln q + a_1 \ln U_1 + a_2 \ln U_2 + \mathrm{K} + a_n \ln U_n . \quad (1.54)$$

Вводячи у вираз (1.54) значення змінних ($a_0 = \ln q$, $x_i = \ln U_i$) отримаємо вираз (1.52).

Клас гармонійних функцій. Розглянемо клас функцій з дискретним набором гармонік. Інтервал головних значень частот початкових гармонік 2π розбивається (взагалі кажучи довільно) на *k* проміжків. Для коливальних процесів з періодичними повтореннями оптимальним є метод розкладання у гармонійний ряд з кратними частотами (ряд Фур'є). Тоді загальна модель у цьому класі має такий вигляд:

$$y = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) , \qquad (1.55)$$

де:

$$a_0' = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)dt;$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\cos k\omega_1 t dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\sin k\omega_1 t dt; \qquad (1.56)$$

Параметр *t* може бути як тимчасовою, так і просторовою координатою. Верхню межу в сумі виразу (1.55) вибирають, виходячи з необхідної точності моделі.

Після перетворення змінних у перетвореному виразі (1.55):

$$y = \frac{a_0'}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega_1 t + \sum_{i=1}^{\infty} b_j \sin j\omega_1 t;$$

$$\frac{a_0'}{2} = a_0;\ x_i = \cos i\omega_1 t;$$

$$x_j = \cos j\omega_1 t;\ b_j = a_j;$$

отримаємо:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} a_j x_j. \qquad (1.57)$$

Клас експоненціальних функцій. У даному класі виділяють такі функції:

$$y = e^{A+Bx};\ y = A(1-e^{-Bx}) + c;\ y = Ae^{\frac{B}{x}}.$$

Розглянемо кожну з них.

1. Експоненціальна функція:

$$\hat{y} = e^{A+Bx}. \qquad (1.58)$$

Якщо безпосередньо використати метод найменших квадратів, тоді Δ^2 має вигляд:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N}(e^{A+Bx_i} - y_i) \to \min.$$

Перейдемо до системи нелінійних, відносно коефіцієнтів *A* і B, системі алгебраїчних рівнянь. Таку систему вирішити набагато важче, ніж лінійну.

Прологарифмуємо функцію (1.58), внаслідок чого отримаємо функцію *y**:

$$y^* = \ln y = A + Bx. \qquad (1.59)$$

Відповідно прологарифмуємо і величини y_i, які визначено експериментально:

$$\hat{y}_i^* = \ln \hat{y}_i. \qquad (1.60)$$

Після перетворення необхідно мінімізувати суму квадратів:

$$\Delta^{*2} = \sum_{i=1}^{N}(A + Bx_i - \ln \hat{y}_i) \to \min. \qquad (1.61)$$

Для визначення коефіцієнтів *A* і B замість величин y_i необхідно підставити $y_i^* = \ln y_i$.

2. Експоненціальна функція:

$$y = A(1-e^{-Bx}) + c \qquad (1.62)$$

Ця формула відрізняється від попередньої незалежними від *x* членами *A* і *C*. Для їх визначення продиференціюємо функцію (1.62) згідно *x*.

Отримаємо:

$$\hat{y}' = ABe^{-Bx}. \qquad (1.63)$$

Також, експериментально отримаємо величини $y_i (i = \overline{1, N})$. Для цього знайдемо відношення різниць:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \qquad (1.64)$$

З формули (1.64) видно, що з N величин можна обчислити лише (N-1) похідних. Після цього прологарифмуємо рівняння (1.63), (1.64), причому рівняння (1.63) знову перетвориться на рівняння прямої:

$$\hat{y}^* = \ln \hat{y}' = \ln(AB) - Bx, \qquad (1.65)$$

$$\hat{y}_i^* = \ln \hat{y}_i' = \ln \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \qquad (1.66)$$

Співвідношення різниць $\hat{y}_i'$ у загальному випадку не приводить до приросту абсцис x_i або x_{i+1}, хоча в деякій точці у інтервалі між x_i і x_{i+1} такий приріст можливий. Для отримання точніших наближень вводили значення абсциси x_i*.

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Невідомі коефіцієнти прямої у рівнянні (1.65) отримаємо за допомогою таких перетворень:

$$\ln(AB) = a_0;\ e^{a_0} = AB;\ A = \frac{e^{a_0}}{B} \qquad (1.67)$$

$$B = -\,a_1 \qquad (1.68)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 також обчислюють шляхом заміни:

x_n через x_i^*; y_n через y_i^*; N через (N-1). (1.69)

На останньому етапі визначаємо константу *C*, яка забезпечує переміщення *y* паралельно осі *X*. Вказану константу знайдемо з рівняння:

$$\sum_{i=1}^{N} y_1 = \sum_{i=1}^{N} \hat{y}_1 \qquad (1.70)$$

тоді:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} \left[A\left(1 - e^{-Bx_i}\right) \right] + NC, \qquad (1.71)$$

і

$$C = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \hat{y}_i - \sum_{i=1}^{N} \left[A\left(1 - e^{-Bx_i}\right) \right] \right\}. \qquad (1.72)$$

3. Експоненціальна функція:

$$\hat{y} = Ae^{\frac{B}{x}}. \qquad (1.73)$$

Для лінеаризації виконують такі кроки:

- у експоненті $\frac{1}{x}$ замінюють на *z* з обчисленням цього аргументу;

- нову функцію $y = Ae^{Bz}$ логарифмують:

$$\ln \hat{y} = \ln A + Bz \qquad (1.74)$$

(це рівняння прямої з нахилом $a_1 = B$, яка перетинає вісь ординат у точці $a_0 = \ln A$);

- експериментально отримані величини $\hat{y}_i$ логарифмують:

$$y_i^* = \ln y_i^*;$$

- коефіцієнти обчислюють за формулами:

$$a_1 = \frac{\sum_1^N z_i \hat{y}_i^* - \frac{\sum_1^N z_i \sum_1^N \hat{y}_i^*}{N}}{\sum_1^N z_i^2 - \frac{\sum z_i \sum z_i}{N}}, \qquad (1.75)$$

$$a_0 = \frac{\sum_1^N \hat{y}_i^*}{N} - \frac{a_1 \sum z_i}{N}. \qquad (1.76)$$

- звідси отримують невідомі коефіцієнти:

$$A = e^{a_0};\ B = a_1. \qquad (1.77)$$

Зазначимо, що опис статичних стохастичних об'єктів з шифром 0=(01γλ) може бути виконано тільки ймовірнісним методом. Вихідна координата такого об'єкта може бути визначена тільки з певним ступенем ймовірності.

Крім того, динамічний детермінований об'єкт має шифр 0=(10γλ). Вихідна змінна такого об'єкта залежить від стану його входу не тільки у миттєвий момент часу.

Водночас модель одновимірного лінійного безперервного об'єкта (γ=0, λ=0) є звичайним диференціальним рівнянням, яке має вигляд:

$$A_m \frac{d^m y}{dt^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \mathrm{K} + A_1 \frac{dy}{dt} A_0 y =$$

$$B_l \frac{d^l x}{dt^l} + B_{l-1} \frac{d^{l-1} x}{dt^{l-1}} + \mathrm{K} + B_1 \frac{dx}{dt} + B_0 x \qquad . \qquad (1.78)$$

Очевидно, що різницевим аналогом даного диференціального рівняння є різницеве рівняння, що має вигляд:

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \mathrm{K} + a_{m-1} y_{n-m+1} + a_m y_{n-m} =$$

$$b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \mathrm{K} + b_{l-1} x_{n-l+1} + b_l y_{n-l} \quad . \quad (1.79)$$

Переведення диференціального рівняння у його звичайно-різницевий аналог і навпаки можна здійснити, наприклад, за допомогою формул Ейлера. Тоді для перетворення маємо:

$$y = y_n ; \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} ; \frac{d^2 y}{dt^2} \approx \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta t^2} , \ldots .$$

Або у загальній формі:

$$\frac{d^m y}{dt^m} \approx (\Delta t)^{-m} \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu C_m^\nu y_{n-\nu} \quad , \qquad (1.80)$$

де:
Δt – крок дискретизації у часі.

Аналогічно:

$$\frac{d^l x}{dt^l} \approx (\Delta t)^{-l} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu y_{n-\nu} \, . \qquad (1.81)$$

Для зворотного перетворення, тобто переходу від різницевого рівняння до початкового диференціального, на основі формул (1.80) і (1.81) можна записати такі формули:

$$y = y_n ; \; y_{n-1} \approx -\Delta t \frac{dy}{dt} + y ;$$

$$y_{n-2} \approx -\Delta t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - -2\Delta t \frac{dy}{dt} + y \; .$$

У загальній формі ці вирази можна записати таким чином:

$$\frac{d^l x}{dt^l} \approx (\Delta t)^{-l} \sum_{v=0}^{l} (-1)^v C_l^v y_{n-v} \ . \qquad (1.82)$$

Аналогічно:

$$X_{n-l} = \sum_{v=0}^{l} (-\Delta t)^v C_l^v \left(\frac{d^v x}{dt} \right). \qquad (1.83)$$

Коефіцієнти A_i і B_i з рівняння (1.78) і коефіцієнти a_i, b_i рівняння (1.79) пов'язані таким чином:

$$A_i = (-\Delta t)^i \sum_{k=i}^{m} C_k^i a_k \ ; \ B_i = (-\Delta t)^i \sum_{k=i}^{m} C_k^i b_k \ . \qquad (1.84)$$

На підставі формул (1.84) можна здійснити перехід від різницевого рівняння до (вихідного) диференціального.

Запишемо рівняння (1.79) у такому вигляді:

$$y_n = \frac{1}{a_0} [b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \text{K} + b_{l-1} x_{n-l+1} + b_l x_{n-l}$$

$$- a_1 y_{n-1} - \text{K} - a_{m-1} y_{n-m+1} - a_m y_{n-m}] \qquad . \quad (1.85)$$

Перевівши змінні у формулі (1.85) отримаємо рівняння (1.52).

Для опису властивостей нелінійних об'єктів, поряд з диференціальними рівняннями, широко використовують *передавальні функції*. Під передавальними функціями розуміють відношення зображення (за Лапласом) вихідної величини до зображення (за Лапласом) вхідної величини за нульових початкових умов:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} \ , \qquad (1.86)$$

де:

p – комплексна змінна у перетворенні Лапласа.

Передавальні функції об’єкта, що описують звичайним диференціальним рівнянням (1.78), є раціональною функцією, яка має вигляд:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \text{K} + A_1 p + A_0}{B_l p^l + B_{l-1} p^{l-1} + \text{K} + B_1 p + B_0} \cdot \quad (1.87)$$

Диференціальне рівняння (1.79) і передавальну функцію (1.87) називають параметричною формою задання математичної моделі, оскільки при ідентифікації доводиться виявляти коефіцієнти (параметри) A_i і B_j.

Як непараметричну форму завдання математичної моделі використовують такі характеристики, як реакція об’єкта ідентифікації на типові сигнали:

1. Реакція системи на *одиничне стрибкоподібне збудження,* яке називають перехідною характеристикою. Стрибкоподібне збудження (функція) має вигляд:

$$x(t) = A[1] = \begin{cases} A, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \cdot \quad (1.88)$$

При $A = 1$ функція називається одиничною: x(t)= 1(t).

2. Реакцію системи на імпульсну або δ-функцію називають імпульсною перехідною характеристикою або ваговою функцією. Імпульсну або δ-функцію визначають виразом:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}; \ \delta(t-\xi) = \begin{cases} \infty, t = \xi \\ 0, t \neq \xi \end{cases} \cdot \quad (1.89)$$

Вона є похідною від одиничної функції $1'(t)$

$$\delta(t) = 1'(t), \quad (1.90)$$

і має властивість:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1; \ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\xi)dt = 1. \quad (1.91)$$

З формул (1.91) видно, що її площа дорівнює одиниці. Імпульсну функцію можна трактувати як межу прямокутного імпульсу, у якого висота направлена до нескінченності, а час його дії – до нуля.

Слід зауважити, що вагова і перехідна функції дозволяють оцінити тимчасові характеристики системи.

3. Важливими і поширеними критеріями для створення непараметричної математичної моделі лінійного (лінеаризованого) динамічного об'єкта ідентифікації є його амплітудна і фазова частотні характеристики: $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$.

Під *амплітудною частотною характеристикою* розуміють залежність відносної амплітуди вихідного сигналу об'єкта від частоти ω у режимі сталих гармонійних коливань.

Під *фазовою частотною характеристикою* розуміють зрушення за фазою вихідного сигналу щодо вхідного, залежно від частоти, у тому ж режимі.

Вхідний гармонійний сигнал можна представити у вигляді:

$$x = B\cos\omega t\,. \qquad (1.92)$$

Тоді вихідний сигнал можна записати таким чином:

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)\,,\ y = A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]\,. \qquad (1.93)$$

Опис властивостей одновимірних лінійних об'єктів ідентифікації у формі вагової функції і частотної характеристики є еквівалентними, і кожна з них дає вичерпну інформацію про статичні і динамічні властивості об'єкта.

При синтезі математичних моделей доводиться також вирішувати питання про те, на яких саме вхідних і вихідних змінних будуть ґрунтуватися моделі об'єктів ідентифікації. Для цього, перш за все, виявляють всі можливі змінні, які можуть бути входами і виходами об'єктів. На наступному етапі з них виділяють найважливіші. Водночас виникає питання, як оцінювати

“вагу” змінних. Відповідь на це питання визначається цілями автоматизації: вагомими слід вважати ті змінні, які найсуттєвіше впливають на досягнення поставленої мети. Тому завдання розроблення математичної моделі тісно пов’язано з формуванням критеріїв оптимізації автоматизованого технологічного процесу.

Лекція №7.
Моделювання давачів та перетворювачів вимірювальних каналів

Під час моделювання елементів вимірювальних каналів автоматичних інформаційних та керуючих систем важливе значення має отримання адекватної математичної моделі чутливих елементів первинного вимірювального перетворювача і давача у цілому, тому що вони здійснюють перетворення вимірювальних фізичних величин у вимірювальний сигнал, тобто фізичне перетворення. Більшість давачів вимірювальних каналів автоматичних систем мають на виході електричний сигнал, а наступні перетворювачі виконують масштабні перетворення вимірювальних сигналів, які неважко реалізувати за наявності обчислювальної техніки і відповідних алгоритмів з прийнятими похибками або взагалі без похибок. Основні похибки з’являються під час моделювання давачів та їх елементів або безпосередньо пов’язаних з ними наступних перетворювачів, які часто містять давачі.

Сучасні технології характеризуються різноманітними параметрами, які мають різну фізичну і хімічну природу. Вказані параметри відображають у більшості випадків, неелектричні процеси (механічні, теплові, хімічні та ін.). Інформацію про миттєві значення технологічних параметрів отримують за допомогою давачів, чутливі елементи яких взаємодіють із зовнішнім середовищем. Реакції взаємодії перетворюють у придатні для подальшого оброблення сигнали. Як правило, такі сигнали є електричними (напруга, струм, частота та ін.).

У загальному вигляді давач можна розглядати як перетворювач енергії, у якому певна вхідна величина (x) (технологічний параметр) перетворюється

у вихідний сигнал (y) (як правило, електричний, а іноді – пневматичний, гідравлічний або сигнал іншої фізичної природи). Зв'язок між цими величинами у *статичному* режимі можна описати за допомогою формули:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots a_nx^n, \qquad (1.100)$$

де:

$a_0,a_1,a_2,\dots a_n$ – коефіцієнти градуйованої характеристики.

До статичної характеристики перетворювача чи вимірювального каналу ставлять основну вимогу, щоб залежність між вхідною величиною і вихідним сигналом була якомога ближчою до лінійної, хоча у практичних умовах ця вимога не завжди реалізується і вихідний сигнал (y) приймає вигляд (1.100). У ідеальному випадку усі коефіцієнти рівняння (1.100), крім коефіцієнта a_1, дорівнюють нулю і статична характеристика має вигляд прямої: $y=a_1x$, яка проходить через початок координат під кутом, тангенс якого дорівнює a_1.

У динамічному режимі залежність "вхід-вихід" вимірювального перетворювача або каналу від інерційних властивостей ланок може бути описана диференціальним рівнянням:

$$ax(t)=by(t)+b_1\frac{dy(t)}{dt}+\dots+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+b_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}, \qquad (1.101)$$

де:

$b_0, b_1, b_2,\dots b_n$ – коефіцієнти, які залежать від внутрішніх властивостей (інерційності, пружності, тертя та ін.) перетворювальних ланок;

a – коефіцієнт, який залежить від зовнішніх чинників і коефіцієнта підсилення.

Контрольований параметр, залежно від перебігу технологічного процесу (або з інших причин), може мати сталий характер або змінюватись у

часі. Це стосується не лише механічних величин (сили, швидкості, прискорення та ін.), але й таких як температура, освітленість, концентрація та ін. Якщо вхідна величина *x(t)* є функцією часу, то й вихідний сигнал *y(t)* також буде змінюватись з плином часу.

Перетворення енергії здавачем можна здійснювати двома способами:

1. Енергія вхідної величини (*x*) безпосередньо перетворюється у енергію вихідного сигналу (*y*). На цьому принципі працюють *енергетичні* або *генераторні* давачі.

Наприклад. *Термопара є генератором термо-ЕРС. Величина цієї ЕРС функціонально пов'язана з температурою робочого і вільного кінців термопари, що є інформативним параметром температурного поля, яке вимірюють.*

Водночас зауважимо, що у генераторних давачах використовують термо-, п'єзо- фотоелектричний, електромагнітний та інші ефекти.

2. Вхідна величина (*x*) забезпечує лише керування передачею енергії від деякого додаткового джерела енергії до вихідного сигналу (*y*). Таке керування здійснюють у результаті зміни таких параметрів електричного ланцюга, як активний, індуктивний чи ємнісний опір, або ж їхніх комбінацій. Такі давачі називають *параметричними*, тому що вони під впливом досліджуваної величини змінюють свій параметр (прикладом такого давача може бути терморезистор). Отже, застосовуючи принцип керування потоком енергії, можна змоделювати резистивні, індуктивні, ємнісні, фоторезистивні, магнітопружні, радіоактивні та інші давачі.

Усі давачі можна поділити на дві групи: енергетичну і параметричну. З іншого боку, їх можна також класифікувати за виглядом вхідного сигналу або вхідної величини.

Щоб отримати вихідний сигнал параметричного давача, у відповідний електричний ланцюг подають зондуючий або випробувальний сигнал, яким може бути електрична напруга постійного або змінного струму, електромагнітні хвилі широкого частотного діапазону або електричні імпульси різної форми.

Якщо зондуючий сигнал має гармонійну форму: $U(t) = U_m \cos(wt + \varphi)$, тоді його можна охарактеризувати амплітудою (U_m) , початковою фазою (φ) і частотою (w). Кожний з цих параметрів після перебігу сигналу через електричне коло давача стає функцією вимірювального параметра (x). Інформацію, що вимірюється, про технологічний параметр можна отримати, аналізуючи значення амплітуди, фази або частоти вихідного сигналу давача. Параметр сигналу, який надає інформацію про технологічний параметр є інформативним. Інші параметри сигналу не є інформативними. Водночас вони впливають на давач, створюючи завади. Якщо використати як зондуючий сигнал постійну напругу ($w=0$, $\varphi=0$) , інформацією, яку вимірюють, буде значення напруги на виході давача. При імпульсній формі зондуючого сигналу інформативними може бути тривалість імпульсу або інші параметри.

У багатьох випадках при ($x=0$) інформативний параметр сигналу не перетворюється у нуль, тому вихідний сигнал первинного вимірювального перетворювача при гармонійному вхідному сигналі можна описати виразом:

$$U(t) = [U_n + \Delta U(x)] \cos\{[w_n + \Delta w(x)]t + \Delta\varphi(x) + \varphi_n\},$$

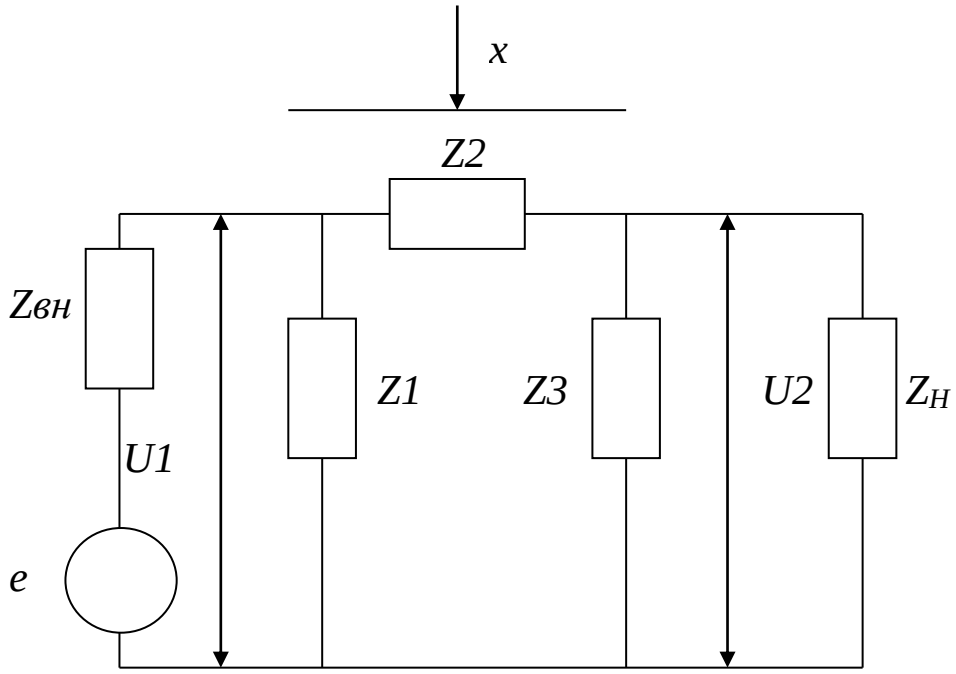
де:

U_n, w_n, φ_n – початкові значення параметрів сигналу;

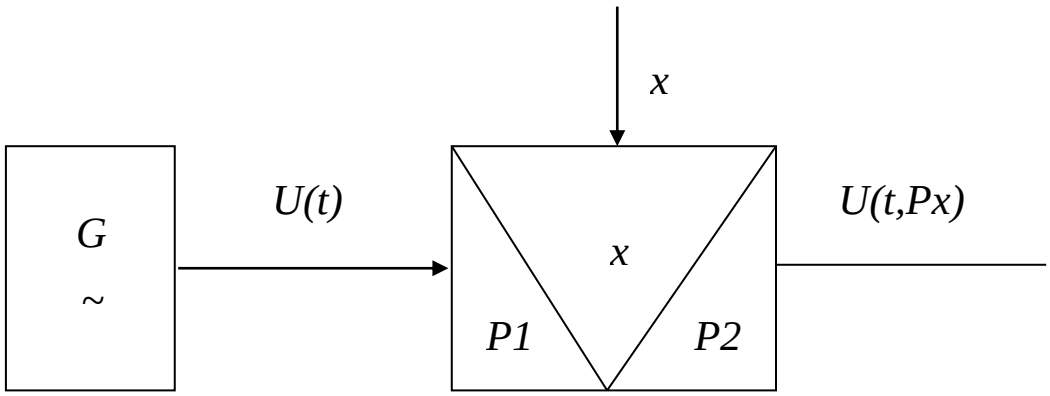
$\Delta U(x)$, $\Delta w(x)$, $\Delta \varphi(x)$ – інформативні зміни параметрів.

Інформація на виході може міститися у абсолютних або відносних змінах амплітуди, фази або частоти вихідного сигналу первинного вимірювального перетворювача. При зміні технологічних параметрів у часі (тобто, при динамічному вимірюванні) інформативні параметри вихідних сигналів первинного вимірювального перетворювача є змінними величинами і вимірювальні сигнали набувають форми амплітудно-модульованих, фазо-модульованих або частотно-модульованих коливань. Більшість давачів можна віднести до групи параметричних модуляторів (рис. 1.13), які, у загальному випадку, є чотириполюсником з П- або Т-

подібною схемою заміщення, узагальнені параметри якої A_{11}, A_{12}, A_{21} A_{22} змінюються під впливом величини (x).



а)



б)

Рис. 1.13. Схема параметричного давача:
а) схема заміщення керованим чотириполюсником;
б) структурна схема.

Коли давач працює в режимі параметричного модулятора, тоді у результаті дії вимірюваної величини (x) змінюється комплексний коефіцієнт передачі чотириполюсника, який визначається коефіцієнтом *k(jw)*. Якщо навантаження давача невелике, тобто $Zp \to \infty$, тоді:

$$k_0 = [k_n + \Delta k(x)] \exp\, j[\Delta\varphi(x) + \varphi_n],$$

де:
k_n, φ_n – початкові значення модуля і фази коефіцієнта передачі;
$\Delta k(x), \Delta\varphi(x)$ – інформативні зміни.

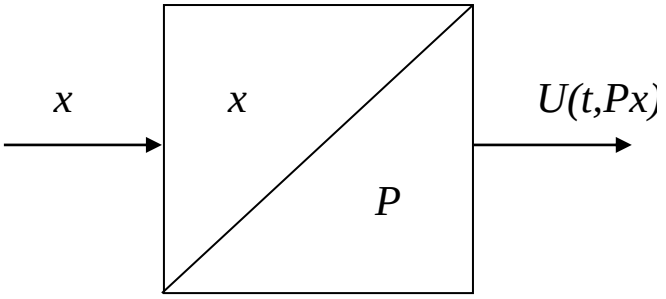
Ці величини визначають узагальненими опорами чотириполюсника та їх чутливістю до контрольованого технологічного параметра. У цьому випадку електричне коло параметричного давача можна представити у вигляді двополюсника з комплексним опором:

$$Z = Zn + \Delta Z(x),$$

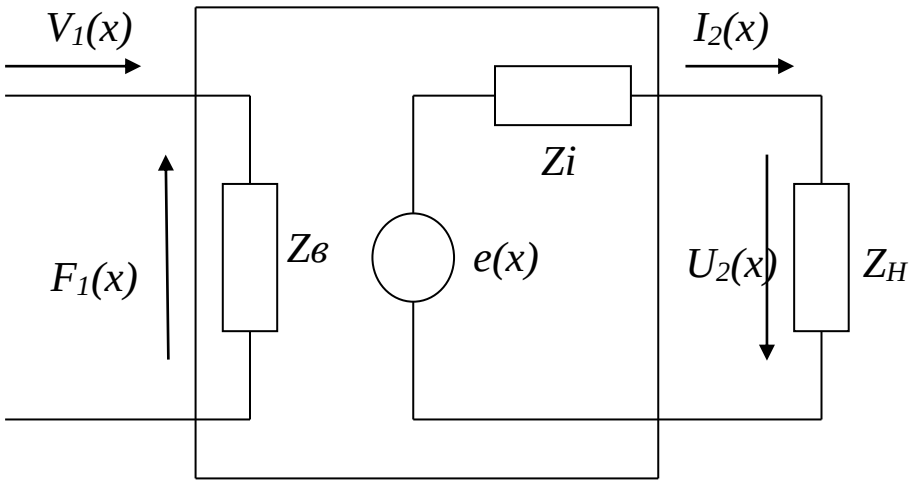
де: Zn – початковий опір;
$\Delta Z(x)$ – інформативна зміна опору.

Властивості перетворення параметричних давачів також суттєво залежать від внутрішнього опору навантаження давача $Z_н$. У цьому випадку коефіцієнт передачі давача *k(jw)* можна обчислити аналітично, використовуючи результати експериментальних досліджень давача.

Крім того, параметричний давач зображають модулятором (рис. 1.14, а), який живиться від генератора змінного чи постійного струму. Генераторні давачі на виході характеризуються внутрішньою ЕРС *e(x),* яка є функцією вимірюваного технологічного параметра (x) (рис. 1.14, б).



а)



б)

Рис. 1.14. Схема генераторного давача:

а) структурна схема;

б) схема заміщення енергетичним чотириполюсником із входами різної фізичної природи.

Цей параметр у більшості випадків має неелектричну фізичну природу, тому на вході чотириполюсника його можна вважати за узагальнену силу (*F*) або узагальнену швидкість (V), які будуть еквівалентними вхідній напрузі й струму електричного чотириполюсника. Опис генераторного давача в узагальнюючих координатах (сили і швидкості) можна здійснити за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду, що дає можливість представити такий давач у вигляді узагальненої енергетичної моделі. Така модель ґрунтується на системі з двох рівнянь, які уособлюють два канали зв’язку об’єкта з навколишнім середовищем, причому параметрами каналів будуть імпеданси різної фізичної природи.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.

1. Букетов А.В. Ідентифікація і моделювання технологічних об’єктів та систем. – Тернопіль: СМП «Тайп».- 2009.- 260с.
2. Романенко В.Д. Методи автоматизації прогресивних технологій .-К.: Вища школа, 1995.- 228с.
3. Таланчук П.М., Скрипник Ю.О., Дубровський В.О. Засоби вимірювання в автоматичних інформаційних і керуючих системах.-К.: Райдуга, 1994.- 326с.
4. Любарецкий Г.Я., Слабоспицкий Р.П., Хаммурадов М.А., Абдушкіна Р.М. Математичне моделювання та експеримент. -К.: Вища школа, 1987.- 234с.
5. Мур Дж., Уэдерфорд Л., Лари Л. и др. Моделювання прийняття рішень з використанням Microsoft Excel. – Наука, 2004-.286с.
6. Стохастичне моделювання та прогнозування / Під ред. И. Г. Гранберга. - Фінанси и статистика, 1990. - 381 с.

Для нотаток

Формат 60х90/16. Ум.друк. арк. 2.0. Тираж 10 пр.

Видавництво Тернопільського національного
технічного університету імені Івана Пулюя.
46001, Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво субєкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11