

Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Кафедра автоматизації
технологічних процесів
і виробництв

Лабораторна робота № 7
з курсу
*”Цифрова обробка сигналів та
зображень”*

Цифрові фільтри

Тернопіль 2023

Методичні вказівки до лабораторної роботи № 7 "Цифрові фільтри" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". Пісьціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М. Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 18 с.

Для студентів напряму: 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автори: Пісьціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 30.08.2023 року)

Лабораторна робота №7

Тема роботи

Цифрові фільтри.

Мета роботи

Набути практичні навички розрахунку та аналізу цифрових фільтрів.

Загальні поняття

Мета фільтрації полягає в усуненні завад, що містяться у сигналі, або у виділенні окремих складових сигналу, які відповідають тим чи іншим властивостям досліджуваного процесу. У принципі, для найбільш простого варіанту фільтрації сигналу достатньо провести пряме перетворення Фур'є сигналу, виконати необхідні дії із спектральним представленням, наприклад помножити сигнал на певну функцію, що характеризує фільтр і виконати зворотне перетворення Фур'є. Проте така послідовність дій є досить затратною за програмними та апаратними ресурсами, тому частіше використовують спеціальні алгоритми і пристрої - цифрові фільтри (ЦФ). За допомогою останніх у сигналі виділяють, послаблюються певні частоти з метою покращання відношення сигнал/шум. Крім цього, ЦФ широко використовують як структурні елементи пристроїв та систем обробки сигналів.

Класифікація фільтрів

Класифікація за видом частотної характеристики

Фільтри можуть класифікуватися за різними особливостями. Здебільшого для поділу фільтрів використовують такі ознаки. За цією ознакою фільтри поділяються на:

фільтри низьких частот (ФНЧ) - пропускають низькочастотні складові спектра і затримують високочастотні;

фільтри високих частот (ФВЧ) - пропускають тільки високочастотні складові;

смугові фільтри (СФ) - пропускають складові сигналу лише в певній смузі частот;

смугозагороджувальні або режекторні фільтри (РФ) - пропускають усі складові сигналу, окрім тих, частоти яких входять в певну смугу;

всепропускні фільтри (ВФ) - пропускають усі без винятку складові сигналу, але змінюють фазові співвідношення між ними.

У назву фільтра входить звичайно та частотна смуга, яку фільтр пропускає. Так, фільтр нижніх частот - це фільтр, що пропускає нижні частоти сигналу.

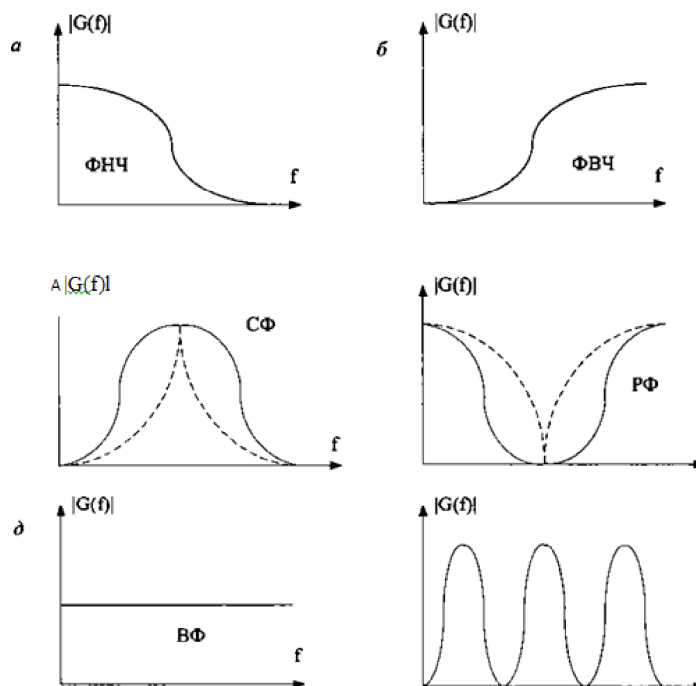


Рис. 1. АЧХ фільтрів (фрагмент)

Графіки амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) згаданих фільтрів наведено на рис. 1 (а-д). Крім перерахованих, основних за цією ознакою груп фільтрів, існують ще і інші їх

різновидності. Наприклад, резонансний фільтр є окремим випадком СФ фільтра, але з дуже вузькою смугою пропускання (штрихована АЧХ на рис. 1, в). Фільтр-пробка на визначену частоту - це РФ фільтр з вузькою смугою загороджування (штрихова АЧХ на рис. 1, г). Гребінчастий фільтр - фільтр, який має декілька смуг пропускання (рис. 1, е).

Необхідно зазначити, що під час аналізу і синтезу фільтрів фільтр ФНЧ звичайно використовують як базовий саме ФНЧ, як правило, розглядають в різноманітних публікаціях, для нього розробляють методики синтезу. Інші види фільтрів можуть бути побудовані на основі ФНЧ. Так, якщо з повного сигналу вирахувати вихідний сигнал ФНЧ, то в результаті отримаємо ФВЧ, СФ можна побудувати, якщо ввімкнути паралельно ФНЧ1 і ФНЧ2 з різними частотами зрізу. Для побудови РФ достатньо з'єднати послідовно відповідно розраховані ФНЧ та ФВЧ фільтри.

Лінійні стаціонарні фільтри

Цифрові фільтри розділяють на лінійні та нелінійні, а також на стаціонарні та нестаціонарні. Зараз обмежимося розглядом лінійних стаціонарних фільтрів.

Властивість лінійності означає, що вихідна реакція на суму сигналів дорівнює сумі реакцій на ці сигнали;

Властивість стаціонарності - що затримка будь-якого вхідного сигналу призводить лише до такої ж затримки вихідного сигналу, не змінюючи його форми.

При цифровій фільтрації у лінійних стаціонарних фільтрах можна проводити над даними операції сумування, множення на константу та затримкою сигналу на 1 такт. Фізично здійсненні ЦФ, які працюють в реальному масштабі часу, для формування вихідного сигналу в i -й дискретний момент часу можуть використовувати такі дані:

а) значення вхідного сигналу в момент i -го відліку, а також деяке число «минулих» вхідних відліків $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$;

б) деяке число попередніх відліків вихідного сигналу $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$

Максимальне із чисел m та n визначають порядок ЦФ.

У такому випадку на виході будь-якого стаціонарного лінійного фільтра сигнал буде визначатись рівнянням:

$$y(t_k) + a_1 y(t_{k-1}) + \dots + a_n y(t_{k-n}) = b_0 x(t_k) + b_1 x(t_{k-1}) + \dots + b_m x(t_{k-m}) \quad (1)$$

або

$$y(t_k) = b_0 x(t_k) + b_1 x(t_{k-1}) + \dots + b_m x(t_{k-m}) - a_1 y(t_{k-1}) - \dots - a_n y(t_{k-n}) \quad (2)$$

де a_i, b_j - дійсні коефіцієнти. Таке рівняння називається різницевим.

Попередні вихідні відліки можуть і не використовуватися при розрахунках, тоді все $a_i = 0$ і фільтр називається нерекурсивним. Якщо попередні вихідні відліки використовуються, фільтр називається рекурсивним.

Для Фур'є аналізу довизначимо $y(t)$ та $x(t)$ на проміжках $(t_k, t_k + \Delta t)$ значеннями $y(t_k)$ і $x(t_k)$ відповідно, і для однозначності при зворотному перетворенні Фур'є під $s(t_k)$ будемо вважати границю: $s(t_k) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} s(t_k + \alpha)$.

Проведемо перетворення Фур'є вхідного і вихідного сигналу, у результаті отримаємо алгебраїчне рівняння відносно $Y(\omega)$:

$$Y(\omega) + a_1 Y(\omega) \exp(-j\omega\Delta t) + \dots + a_n Y(\omega) \exp(-j\omega n\Delta t) = b_0 X(\omega) + b_1 X(\omega) \exp(-j\omega\Delta t) + \dots + b_m X(\omega) \exp(-j\omega m\Delta t) \quad (3)$$

Тепер можна визначити передавальну функцію цифрового фільтра звичайним чином:

$$W(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_0 + b_1 \exp(-j\omega\Delta t) + \dots + b_m \exp(-j\omega m\Delta t)}{1 + a_1 \exp(-j\omega\Delta t) + \dots + a_n \exp(-j\omega n\Delta t)} \quad (4)$$

Амплітудно-частотна характеристика фільтра є періодичною функцією, але практично вона має сенс лише в інтервалі частот від 0 до $\omega = \pi/\Delta t$ так як на верхній частоті цього інтервалу кожному періоду дискретизованого гармонійного сигналу відповідають лише два відліки. Відзначимо, що передавальна функція цифрового фільтра у загальному випадку є трансцендентною функцією частоти і не виражається у вигляді відношення двох поліномів.

Позначимо $z = \exp(j\omega\Delta t)$ і перепишемо вираз передавальної функції у вигляді

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (5)$$

Такий запис передавальної функції називають **системною функцією** фільтра. Також системну функцію фільтра можна отримати без прив'язки до перетворення Фур'є і згаданих вище додаткових припущень, якщо використати апарат z-перетворення. У такому випадку системна функція цифрового фільтра буде відношенням z-перетворень вихідного і вхідного сигналів і вона все одно буде рівна наведеному вище виразу.

Зауважимо, що відміну від передавальної функції, системна функція є відношенням двох поліномів

Імпульсна характеристика фільтра

Важливою характеристикою фільтра є його імпульсна характеристика - сигнал на виході фільтра при подачі на його вхід сигналу подібного на дельта-функцію. Для цифрових фільтрів такою функцією буде 1 значення у момент часу $t=0$.

Розглянемо зв'язок між імпульсною характеристикою і передавальною функцією фільтра. Довизначимо як і раніше $h(t)$ та $x(t)$ на проміжках $(t_k, t_k + \Delta t)$ значеннями $h(t_k)$ і $x(t_k)$ відповідно і проведемо перетворення Фур'є вхідного і вихідного сигналу.

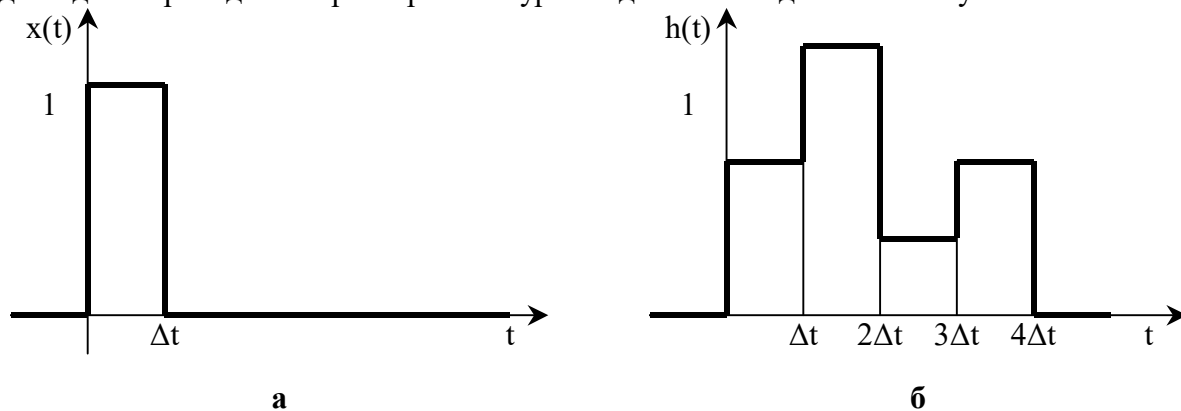


Рис. 2. Вхідний та вихідний сигнали фільтра при побудові імпульсної характеристики

Позначимо спектральну щільність сигналу $q(t)$, зображеного на рис. 2 а через $Q(\omega)$, тоді сигнал $x(t)$ теж має спектральну щільність

$$X(\omega) = Q(\omega) \quad (6)$$

З іншого боку вихідний сигнал фільтра $H(\omega)$ є ступінчатою функцією, тобто представляється у вигляді

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k q(t - \Delta t k) \quad (7)$$

Тобто є суперпозицією сигналів $q(t)$, зміщених на інтервали $\Delta t k$ і помножених на значення сигналу у точках t_k у сенсі $h(t_k) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} h(t_k + \alpha)$, тому його спектральна щільність може бути представлена у вигляді:

$$H(\omega) = \sum_k h_k Q(\omega) \exp(-j \omega \Delta t k) \quad (8)$$

Враховуючі визначення передавальної функції отримаємо інший запис передавальної функції:

$$W(j\omega) = \sum_k h_k \exp(-j \omega \Delta t k) \quad (9)$$

Отже передавальна функція цифрового фільтра може завжди бути визначена за допомогою відомої імпульсної характеристики. Позначимо $z = \exp(j\omega\Delta t)$ і перепишемо вираз передавальної функції у вигляді системної функції

$$H(z) = \sum_k h_k z^k \quad (10)$$

Отже системна функція фільтра може бути отримана як z-перетворення імпульсної характеристики фільтра.

Приклад фільтра

Цифровий фільтр має імпульсну характеристику, що складається з двох ненульових відліків: $\{h_k\} = (1, -1, 0, 0, \dots)$. Обчислити передавальну функцію фільтра.

Системна функція

$$H(z) = 1 - z^{-1} \quad (11)$$

звідки

$$W(j\omega) = 1 - \exp(-j\omega\Delta t) = 1 - \cos(\omega\Delta t) + j \sin(\omega\Delta t) \quad (12)$$

АЧХ фільтра має вигляд

$$\left| W(j\omega) = \sqrt{(1 - \cos(\omega\Delta t))^2 + \sin(\omega\Delta t)^2} = 2 \left| \sin(\omega\Delta t / 2) \right| \right. \quad (13)$$

а ФЧХ

$$\varphi_k(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\omega\Delta t)}{1 - \cos(\omega\Delta t)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega\Delta t}{2} \quad (14)$$

Зауважимо, що якщо на вхід такого фільтра надходить гармонійний сигнал з частотою, значно нижчою, ніж частота дискретизації, так що $\omega\Delta \ll 1$, то

$$W(j\omega) \approx \left[\frac{1}{2} (\omega\Delta t)^2 - \dots \right] + j \left[\omega\Delta t - \frac{1}{6} (\omega\Delta t)^3 + \dots \right] \approx j\omega\Delta t \quad (15)$$

Отже фільтр наближено виконує операцію диференціювання.

Класифікація фільтрів за імпульсною характеристикою

За тривалістю імпульсної характеристики фільтри розділяють на фільтри із скінченною імпульсною характеристикою - СІХ-фільтри (рос. КИХ-фильтры - фильтры с конечной импульсной характеристикой; англ. FIR-filter - finite impulse response filter).

Якщо ж імпульсна характеристика не стає тотожно рівною нулю (хоча і загасає в часі), на протязі скінченного інтервалу, то такі фільтри називають НІХ - фільтрами (рос. БИХ-фильтры - фильтры с бесконечной импульсной характеристикой; англ. IIR-filter - interminable impulse response filter).

Можна показати, що фільтри із скінченною імпульсною характеристикою аргіогі стійкі і можуть бути побудовані без використання зворотних зв'язків. З іншого боку фільтри із нескінченною імпульсною характеристикою більш подібні на аналогові кола і звичайно організуються у виді схеми (алгоритму) із зворотнім зв'язком. Вони зазвичай потребують меншого обсягу пам'яті для збереження проміжних даних, простіші у реалізації, проте алгоритм побудови НІХ-фільтрів може давати нестійкі реалізації, котрі не можна використати на практиці.

Трансверсальні цифрові фільтри

Фільтр у котрому у формуванні вихідного сигналу беруть участь лише скінченна множина вхідних відліків називають трансверсальним або не рекурсивним.

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m} \quad (16)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ — послідовність коефіцієнтів.

Перетворюючи за z-перетворенням маємо

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) X(z). \quad (17)$$

Звідки слідує що системна функція

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{z^m} \quad (18)$$

є дробово-раціональною функцією z, що має m - кратний полюс при z = 0 та m нулів, координати котрих залежать від коефіцієнтів фільтра.

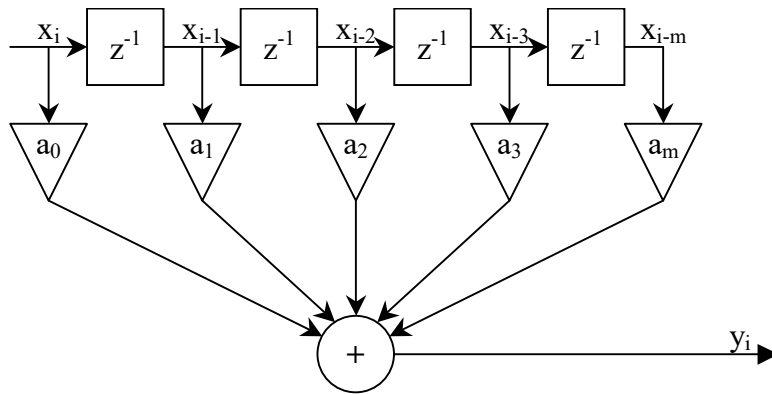


Рис. 3. Структура трансверсального фільтра

Основними елементами фільтру служать блоки затримки відлікових значень на один інтервал дискретизації (прямокутники з символами z^{-1}), а також масштабні блоки, виконують в цифровій формі операції множення на відповідні коефіцієнти. З виходів масштабних блоків сигнали надходять в суматор, де, складаючись, утворюють відлік вихідного сигналу.

Імпульсна характеристика фільтра

Легко бачити, що при подачі на вхід сигналу $(1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ на виході фільтра будуть отримані значення

$$\{h_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad (19)$$

а далі h_k стане тотожно рівною 0.

З іншого боку враховуючі затримки у часі вхідного і вихідного сигналів можна записати передавальну функцію фільтра у вигляді

$$W(j\omega) = a_0 + a_1 \exp(-j\omega\Delta t) + a_2 \exp(-2j\omega\Delta t) + \dots + a_m \exp(-mj\omega\Delta t) \quad (20)$$

Для прикладу знайдемо частотну характеристику трансверсального цифрового фільтра 2-го порядку, що виконує усереднення поточного значення вхідного сигналу і двох попередніх відліків по формулі

$$y_i = 1/3(x_i + x_{i-1} + x_{i-2}) \quad (21)$$

Системна функція цього фільтра

$$H(z) = 1/3(1 + z^{-1} + z^{-2}) \quad (22)$$

звідки підстановкою $z = \exp(j\omega\Delta)$ знаходимо передавальну функцію

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{3}(1 + \exp(-j\omega\Delta t) + \exp(-2j\omega\Delta t)) = \\ &= \frac{1}{3}(1 + \cos(\omega\Delta t) + \cos(2\omega\Delta t)) - \frac{j}{3}(\sin(\omega\Delta t) + \sin(2\omega\Delta t)) \end{aligned} \quad (23)$$

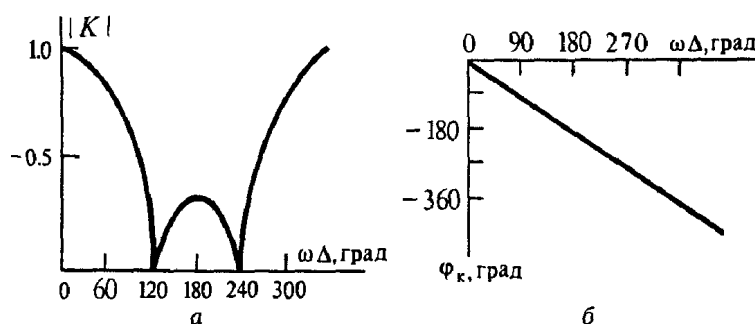


Рис. 4. Частотні характеристики трансверсального ЦФ: а- АЧХ; б - ФЧХ

Графіки АЧХ та ФЧХ відповідного фільтра представлені на рисунку вище, де по горизонтальних осях відкладена величина $\omega\Delta t$ - фазовий кут інтервалу дискретизації при поточному значенні частоти.

При $\omega\Delta t < 120^\circ$ фільтр згладжує вхідну послідовність і може грати роль ФНЧ. Однак частотна характеристика фільтра періодична і немонотонна. Якщо ж аналоговий сигнал не був фільтрований і у ньому присутні складові, для котрих $\omega\Delta > 120^\circ$, вони можуть не послаблюватись ЦФ.

Рекурсивні ЦФ

Більш загальний вигляд цифрових фільтрів у обчисленні значення вихідного відліку використовує попередні значення і вхідних і вихідних відліків.

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m} + b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + b_3 y_{i-3} + \dots + b_n y_{i-n} \quad (24)$$

Так як значення y_i залежать від значень y_i у попередні моменти часу такий фільтр називають рекурсивним.

Провівши z -перетворення сигналу отримаємо

$$Y = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z) + \dots + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) + b_3 z^{-3} Y(z) + \dots \quad (25)$$

звідки система функція

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_n z^{-n}} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_m z^{n-m}}{z^n - b_1 z^{n-1} - b_2 z^{n-2} - \dots - b_n} \quad (26)$$

Отже системна функція має на комплексній площині n полюсів, котрі відповідають кореням характеристичного рівняння $z^n - b_1 z^{n-1} - b_2 z^{n-2} - \dots - b_n = 0$. Одночасно передавальна функція фільтра рівна

$$H(j\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega\Delta t n} + a_1 e^{j\omega\Delta t(n-1)} + a_2 e^{j\omega\Delta t(n-2)} + \dots + a_m e^{j\omega\Delta t(n-m)}}{e^{j\omega\Delta t n} - b_1 e^{j\omega\Delta t(n-1)} - b_2 e^{j\omega\Delta t(n-2)} - \dots - b_n} \quad (27)$$

Реалізація такого фільтра може бути показана на наступному рисунку.

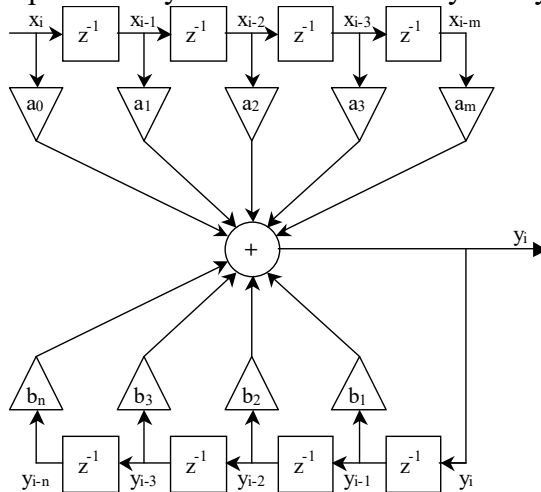


Рис. 5. Структура рекурсивного фільтра

Дана структурна схема може бути також накреслена у вигляді. Така реалізація потребує меншої кількості запам'ятовуючих елементів.

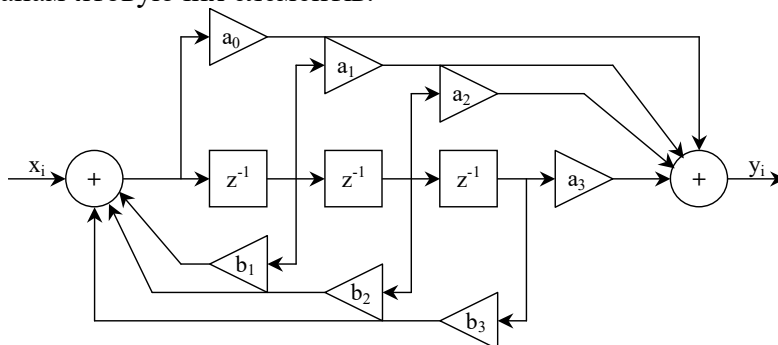


Рис. 6. Канонічна структура рекурсивного фільтра
Стиійкість рекурсивних фільтрів.

Рекурсивний фільтр є системою із зворотнім зв'язком і як інші системи із зворотними зв'язками він може стати нестійким. Вільні колювання у такому фільтрі будуть розв'язком різницевого рівняння

$$y_i = b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + b_3 y_{i-3} + \dots + b_n y_{i-n} \quad (28)$$

Розв'язок такого рівняння природно шукати у формі

$$y_i = \sum_k C_k \alpha_k^i \quad (29)$$

із невідомими коефіцієнтами C_k та основою степені α_k .

Підставивши вираз для y_i у рівняння і виносячи за дужки C_k отримаємо

$$\sum_k C_k (\alpha_k^i - b_1 \alpha_k^{i-1} - b_2 \alpha_k^{i-2} - b_3 \alpha_k^{i-3} - \dots - b_n \alpha_k^{i-n}) = 0 \quad (30)$$

звідки

$$\alpha_k^i - b_1 \alpha_k^{i-1} - b_2 \alpha_k^{i-2} - b_3 \alpha_k^{i-3} - \dots - b_n \alpha_k^{i-n} = 0 \quad (31)$$

розділивши рівняння на α_k^{i-n} отримаємо характеристичне рівняння

$$Q(\alpha_k) = \alpha_k^n - b_1 \alpha_k^{n-1} - b_2 \alpha_k^{n-2} - b_3 \alpha_k^{n-3} - \dots - b_n = 0 \quad (32)$$

Легко бачити, що якщо корені цього рівняння $|\alpha_k| < 1$ то $\alpha_k^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і отже перехідний процес у ЦФ затухає, у випадку коли $|\alpha_k| > 1$ то $|\alpha_k^n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ і ЦФ не є стійким. Зрозуміло, що використання не стійкого фільтра можливо лише у якості блока у системах охоплених додатковими зворотними зв'язками.

Задачу про стійкість цифрового фільтра можна звести до задачі аналізу стійкості розв'язків деякого неперервного характеристичного рівняння $D(w)$, де $D(w)$ отримується якщо

покласти, що $\alpha = \frac{w+1}{w-1}$. Легко довести що значенням $|\alpha| < 1$ відповідають значенням w , котрі

мають дійсну складову меншу 0, а значення $|\alpha| > 1$ - значенням w , котрі мають дійсну складову більшу 0.

Задача синтезу цифрових фільтрів.

Задача синтезу цифрових фільтрів досить складна і полягає у визначенні коефіцієнтів i , можливо, вигляду цифрового фільтра. Нажаль, принципово не можливо створити цифровий фільтр частотна характеристика котрого повністю співпадає із частотною характеристикою аналогового кола. Причина цього в тому що частотна характеристика цифрового фільтра є періодичною. Проте у більшості випадків є потреба, щоб цифровий фільтр був "подібний" на аналоговий лише у діапазоні частот від 0 до $\omega_d/2$.

Найчастіше використовують наступні методи синтезу

- 1) синтез на основі скінченої імпульсної характеристики,
- 2) синтез на основі заданої імпульсної перехідної функції аналогового фільтру-прототипу. Зміст такого синтезу полягає у більш-менш точному визначенні значень імпульсної перехідної функції аналогового фільтра-прототипу і побудові на основі отриманої імпульсної характеристики відповідного фільтра-аналога.
- 3) синтез цифрового фільтра на основі фільтра-прототипу із використанням білінійного перетворення
- 4) прямий синтез цифрового фільтра на основі заданих вимог до частотної характеристики.

При прямому синтезі можливі різні постановки задачі.

- 1) Задається «коридор АЧХ» i , виходячи з коридору i обраного способу апроксимації ідеального ФНЧ, розраховується порядок фільтра i , власне, сам фільтр.
- 2) Задається порядок фільтра N і деякі найбільш важливі параметри «коридору АЧХ», наприклад придушення в смузі загородження і частота зрізу, а інші параметри не обмежують. Наприклад не накладають обмеження на перехідну смугу фільтра. Ця постановка задачі розрахунку фільтра знайшла найбільше поширення.
- 3) Задається бажана АЧХ фільтра i , можливо, вимоги на ФЧХ у заданому діапазоні частот, наприклад, що фільтр має у робочому діапазоні частот (або при усіх частотах) групову затримку заданого рівня.

Синтез цифрового фільтра на основі скінченої імпульсної характеристики

У випадку скінченої імпульсної характеристики задача синтезу фільтра зводиться до задачі побудови трансверсального цифрового фільтра, що був описаний вище із системною функцією виду:

$$H(z) = \frac{h_0 z^m + h_1 z^{m-1} + h_2 z^{m-2} + \dots + h_m}{z^m} \quad (33)$$

де h_n - значення сигналу на виході у момент часу $t = n\Delta t$.

При цьому порядок фільтра повністю визначається тривалістю перехідного процесу на виході фільтра при подачі на вхід імпульсного сигналу.

Синтез цифрового фільтра на основі нескінченної імпульсної характеристики фільтра

Синтез цифрового фільтра на основі заданої аналітично нескінченної імпульсної характеристики $h(n)$ можливий у тому випадку, коли можна виписати z -перетворення для $h(n)$ у вигляді відношення двох поліномів від z .

Наприклад нехай відома імпульсна характеристика потрібного фільтра

$$h(n) = \exp(-\alpha \Delta t n) \quad (34)$$

її z -перетворення визначається за формулою

$$h(z) = \frac{z}{z - \exp(-\alpha \Delta t)} \quad (35)$$

тому системна функція фільтра рівна

$$H(z) = \frac{z}{z - \exp(-\alpha \Delta t)} \quad (36)$$

Синтез цифрового фільтра на основі аналогового фільтра-прототипу.

Найбільш простим варіантом синтезу є синтез на основі аналогового фільтра-прототипу. Нехай $W(j\omega)$ - комплексна передавальна функція деякого аналогового фільтра, котру необхідно наблизити. Так як при цифровій обробці у лінійних фільтрах доступні лише операції множення на константу, зсуву на крок по часу і сумування для представлення $W(j\omega)$ необхідно так перетворити функцію, щоб вона наближалась виразом, що є відношенням двох поліномів від $z = \exp(j\omega \Delta t)$ на інтервалі 0 до $\omega_n/2$.

Звідки випливає що для перетворення передавальної функції фільтра-прототипу у передавальну функцію необхідно замість ω підставити $\omega = \frac{1}{j\Delta t} \ln(z)$. Проте підстановка у передавальну функцію наведеного вище разу перетворює дробово-раціональну функцію частоти у трансцендентну функцію від z , що у загальному не виражається як відношення двох поліномів і не може бути легко перетворена у структурні схеми фільтрів, що наведено вище. Тому необхідно наблизити $\ln()$ якимось зручним методом. Як відомо для наближеного обчислення $\ln()$ досить часто використовують розклад такого виду ($|x| < 1$):

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad (37)$$

Для спрощення обмежимося лише першою степеню x і запишемо, що

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2x \quad (38)$$

Тепер визначимось із виразом для x . Так як у нашому випадку $\frac{1+x}{1-x} = z$, легко можна показати, що $x = \frac{z-1}{z+1}$, отже $\ln(z) \approx 2 \frac{z-1}{z+1}$. Тепер можна легко сформулювати вираз для заміни ω у фільтрі-прототипі:

$$j\omega \approx \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (39)$$

Це наближення називають білінійним перетворення. Можна аналогічним методом будувати і більш точні наближення утримуючі більше членів у розкладі $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, проте практичні розрахунки показують, що у більшості випадків достатньо першого наближення.

Тепер розглянемо як змінюються характерні частоти фільтра при використанні такої заміни. Будемо позначати характерні частоти аналогового цифрового фільтра через ω_a , а їх образ для цифрового фільтра через $\omega_{\Delta t}$. Так як $z = \exp(j\omega_{\Delta t} \Delta t)$ можна записати

$$\omega_a = \frac{2}{j\Delta t} \cdot \frac{\exp(j\omega_c \Delta t) - 1}{\exp(j\omega_c \Delta t) + 1} = \frac{2}{\Delta t j} \cdot \frac{\exp(j\omega_c \Delta t / 2) - \exp(-j\omega_c \Delta t / 2)}{\exp(j\omega_c \Delta t / 2) + \exp(-j\omega_c \Delta t / 2)} = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(\omega_c \Delta t / 2)}{\cos(j\omega_c \Delta t / 2)}$$

$$\omega_a = \frac{2}{\Delta t} \cdot \operatorname{tg}(\omega_c \Delta t / 2) \quad (40)$$

Отже характерні частоти змінюють своє положення так

$$\omega_c = 2 \operatorname{arctg}(\omega_a \Delta t / 2) / \Delta t \quad (41)$$

якщо необхідно точно щось на характерній частоті ω_a можна завжди перед аналізом фільтра ввести спотворення аналогової частотної характеристики для того щоб частота ω_a у результаті лишилась на місці.

Синтез фільтра як задача оптимізації

Зміст оптимальних фільтрів заключний у наступному: оптимальним є той фільтр, для котрого максимальна похибка у полосі пропускання чи у полосі затримання мінімальна порівняно із іншими фільтрами того ж порядку.

Нехай $D(\exp(j\omega\Delta t))$ - задана (бажана) частотна характеристика, $H(\exp(j\omega\Delta t))$ - апроксимуюча функція, $R(\exp(j\omega\Delta t))$ - додатна вагова функція, що дозволяє врахувати помилку для різних інтервалів. Тоді зважена помилка апроксимацій $E(\exp(j\omega\Delta t))$ за визначенням рівна

$$E(\exp(j\omega\Delta t)) = R(\exp(j\omega\Delta t)) [D(\exp(j\omega\Delta t)) - H(\exp(j\omega\Delta t))] \quad (42)$$

Задачу апроксимації можна сформулювати як задачу пошуку $H(\exp(j\omega\Delta t))$ (а точніше коефіцієнтів, через котрі можна виразити $H(\exp(j\omega\Delta t))$), котра мінімізує максимум модуля помилки $E(\exp(j\omega\Delta t))$ у області частот де виконується апроксимація:

$$\|E(\exp(j\omega\Delta t))\| = \min_{(\text{коефіцієнти})} [\max_{\omega \in A} |E(\exp(j\omega\Delta t))|], \quad (43)$$

де A – сукупність всіх частот, що інтересують розробника. Зручно взяти ω_k розміщені з постійним кроком по шкалі частот від $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$. Звичайно таку задачу вирішують за допомогою ЕОМ

Синтез цифрового фільтра за правилами синтезу аналогових фільтрів

Коли встановлені вимоги до частотної характеристики фільтра задачу синтезу цифрового фільтра можна вирішити наступним шляхом:

- 1) створити аналоговий фільтр-прототип із необхідною і можливо, скоректованою частотною характеристикою,
- 2) на його основі побудувати цифровий фільтр за допомогою білінійного перетворення.

Проте принцип наближення функції $j\omega = \frac{1}{\Delta t} \ln(z)$ зручним апроксимуючим виразом

використати і у інший спосіб. Можна:

- 1) встановити вимоги до фільтра у частотній області;
- 2) перейти від частот до деякої площини показника, наприклад, $\alpha = 2 \operatorname{tg}(\omega\Delta t/2)/\Delta t$, що легко виражається через z , переносячи відповідні вимоги на параметри фільтра у площину параметра α ;
- 3) за звичайним алгоритмом побудувати апроксимацію необхідного фільтра, але комплексну частоту позначити символом $j\alpha$;
- 4) повернутись від параметра α до параметра z .

Причому у випадку коли $\alpha = 2 \operatorname{tg}(\omega\Delta t/2)/\Delta t$ можна скористатись співвідношенням

$$\alpha = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg}(\omega\Delta t / 2) = \frac{2}{\Delta t} \frac{\sin(\omega\Delta t / 2)}{\cos(\omega\Delta t / 2)} = \frac{2}{j \Delta t} \frac{\exp(j\omega\Delta t / 2) - \exp(-j\omega\Delta t / 2)}{\exp(j\omega\Delta t / 2) + \exp(-j\omega\Delta t / 2)} =$$

$$= \frac{2}{j \Delta t} \frac{\exp(\omega\Delta t) - 1}{\exp(\omega\Delta t / 2) + 1} = \frac{2}{j \Delta t} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (44)$$

Розглянемо задачу прямого синтезу фільтра на прикладі ФНЧ. В ідеалі ми б хотіли отримати фільтр, який пропускає без спотворень всі частоти нижче ω_0 і повністю подавляє частоти вище ω_0 . Такий ФНЧ називають ідеальним. Реальні ФНЧ завжди вносять якісь

спотвори у полосі пропускання і не до кінця подавляють сигнал у полосі не пропускання.

На наступних рисунках (рис. 7) (рис. 8) показані ідеальна і реальна АЧХ ФНЧ у частотній та відображаючій координатах. Позначення 1 відповідає АЧХ ідеального фільтра, 2 - реального.

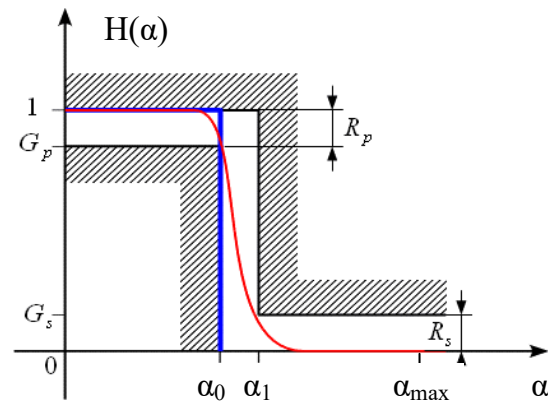
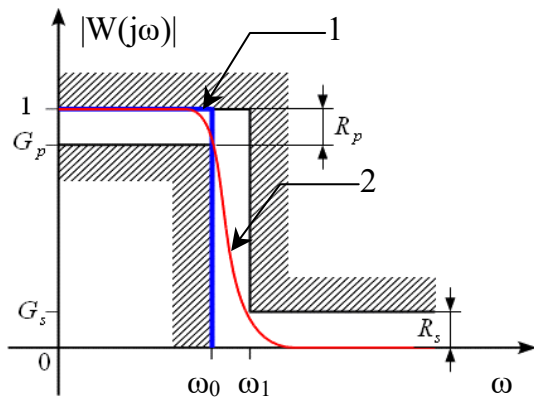


Рис. 7. Ідеальна і реальна АЧХ ФНЧ у частотній області

Рис. 8. Ідеальна і реальна АЧХ ФНЧ у α - області

Смугою частот від 0 до ω_0 називають смугою пропускання ФНЧ, смуга частот від ω_1 (α_1) і вище називається смугою подавлення або смугою не пропускання. Смугою між ω_0 (α_1) та ω_1 (α_1) - перехідною смугою фільтра. Параметр:

$$G_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon_p^2}} \quad (45)$$

визначає максимальні спотворення сигналу у смузі пропускання, а параметр

$$G_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon_s^2}} \quad (46)$$

задає потрібне поглинання у смузі поглинання. Таким чином маємо коридор у котрий поміщається АЧХ фільтра. Чим вужче коридор тим ϵ_p менше, а ϵ_s - більше. Прийнято спотворення і поглинання визначати у децибелах, тоді:

$$\begin{aligned} R_p &= -20 \log(G_p) = 10 \log(1 + \epsilon_p^2) \\ R_s &= -20 \log(G_s) = 10 \log(1 + \epsilon_s^2) \end{aligned} \quad (47)$$

Звідки можна визначити:

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \\ \epsilon_s &= \sqrt{10^{R_s/10} - 1} \end{aligned} \quad (48)$$

Після визначення вимог у частотній області необхідно перейти до α - області де і буде задана розрахункова характеристика фільтра. Для цього необхідно перекреслити границі коридору АЧХ. При цьому слід зауважити що ординати границь не змінюються, а абсциси перераховуються за формулою $\alpha = 2 \operatorname{tg}(\omega \Delta t / 2) / \Delta t$.

Таким чином, для розрахунку фільтра достатньо задати «коридор АЧХ». Часто також використовують ще два параметри:

$$k = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}; \quad k_1 = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_s} \quad (49)$$

параметр k визначає селективні властивості фільтра. Якщо звужувати перехідну смугу, то k буде прямувати до 1. З іншого боку k_1 визначає ступінь придушення фільтра з урахуванням спотворень.

Апроксимація АЧХ фільтрів

Апроксимація системної функції нормованого ФНЧ у площині α - параметра представляється у вигляді:

$$|H(\alpha)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N(\alpha)^2} \quad (50)$$

де $F_N(\alpha)$ - апроксимуюча функція порядку N . Таким чином, для апроксимації необхідно задати порядок фільтра. На функцію накладають умови:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{F_N(\alpha)}{\alpha^N} = 1$$

умова симетрії $F_N(\alpha)^2 = F_N(-\alpha)^2$, а також те що функція має дійсні значення при дійсних значеннях аргументу α і $F(j\alpha)$ не набуває уявних значень при жодному

Нормований фільтр називається так тому, що його параметр зрізу $\alpha_0 = 1$. Основними способами апроксимації є:

- ◇ Апроксимація за Батервортом, при якій $F_N(\alpha) = \alpha^N$.
- ◇ Апроксимація за Чебишевим: $F_N(\alpha) = T_N(\alpha)$, де $T_N(\alpha)$ - поліном Чебишева N -го порядку.
- ◇ Апроксимацій за Чебишевим другого роду: $F_N(\alpha) = 1/T_N(1/\alpha)$.

Для того щоб АЧХ фільтра $|H(\alpha)|$ розмітилась у заданому коридорі необхідно, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} G_p &\leq |H(\alpha)| \leq 1 \text{ при } \alpha \leq \alpha_0 \\ 0 &\leq |H(\alpha)| \leq G_s \text{ при } \alpha \geq \alpha_1 \end{aligned} \quad (51)$$

Вочевидь, що перша умова буде виконана якщо

$$0 \leq |F_N(\alpha)| \leq 1 \text{ при } \alpha \leq \alpha_0 \quad (52)$$

Щоб виконалась друга умова необхідно, щоб порядок фільтра забезпечував перехідну смугу заданої ширини із заданим подавленням тобто.

$$|H(\alpha_1/\alpha_0)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N(\alpha_1/\alpha_0)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_s^2}} \quad (53)$$

Звідки можна визначити:

$$1 + \varepsilon_p^2 F_N(\alpha_1/\alpha_0)^2 = 1 + \varepsilon_s^2 \text{ отже } F_N(\alpha_1/\alpha_0) = \varepsilon_s/\varepsilon_p \quad (54)$$

Таким чином, отримано рівняння, вирішуючи котре відносно N можна знайти потрібний порядок фільтра, при котрому АЧХ фільтра розміститься у заданому коридорі. При цьому розраховане значення N округлюється в більшу сторону до цілого.

Апроксимація за Чебишевим

У випадку апроксимації за Чебишевим функція

$$F_N(\alpha) = T_N(\alpha), \quad (55)$$

де $T_N(\omega) = \cos(N \arccos(\omega))$ - поліном Чебишева порядку N . Тоді квадрат модуля частотної характеристики при апроксимації за Чебишевим можна записати:

$$|H(j\alpha)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 T_N(\alpha)^2} \quad (56)$$

Параметр ε_p задає рівень пульсацій у смузі пропускання фільтра та розраховується виходячи із заданої нерівномірності АЧХ у полосі пропускання R_p згідно виразу (4).

На рис. 9 та рис. 10 показані апроксимуюча функція $F_N(\alpha) = T_N(\alpha)$ та квадрат модуля АЧХ фільтра Чебишева першого роду порядку $N = 4$ при $\varepsilon_p = 0.5$ (нерівномірність АЧХ фільтра у полосі пропускання $R_p = 1$ дБ). Апроксимуюча функція показана у логарифмічному масштабі.

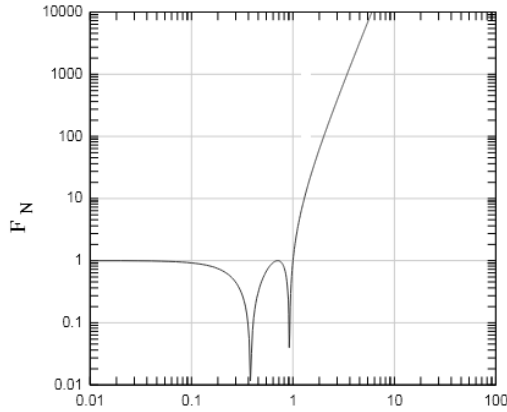


Рис. 9. Апроксимуюча функція фільтра Чебишева першого роду 4-го порядку

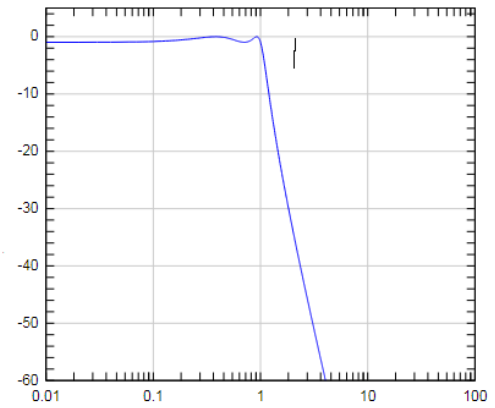


Рис. 10. Квадрат модуля АЧХ фільтра Чебишева першого роду 4-го порядку

Видно, що у полосі пропускання $|H(\alpha)|^2$ фільтра Чебишева першого роду здійснює хвилеподібні коливання, при цьому швидкість спаду АЧХ фільтра Чебишева вище ніж у фільтра Батерворта, котрий наведений нижче.

Апроксимація фільтром Батерворта

Для такого фільтру квадрат модуля системної функції задається виразом:

$$|H(\alpha)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_p^2 \alpha^{2N}} \tag{57}$$

На рис. 11 та рис. 12 показані апроксимуюча функція $F_N(\alpha) = \alpha^N$ і квадрат модуля системної функції $|H(\alpha)|^2$ при порядку фільтра $N=4$.

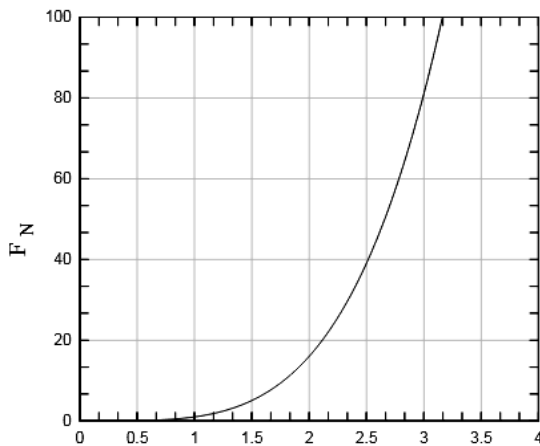


Рис. 11: Апроксимуюча функція фільтра Батерворта 4-го порядку

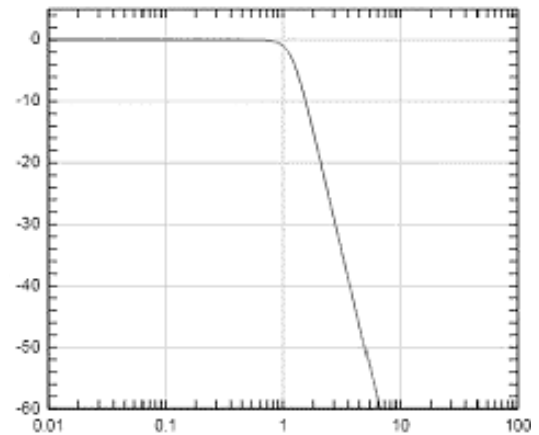


Рис. 12: Квадрат модуля системної функції Н(α) фільтрів Батерворта 4 -го порядку

Фільтри Батерворта є фільтрами з максимально гладкою АЧХ. Швидкість спаду квадрату модуля АЧХ складає $20 N$ дБ/дек.

При апроксимації за Батервортом, дуже часто задають $\epsilon_p = 1$, і на частоті $\omega = 1$ $|H(j\omega)|^2 = 0.5$ (-3 дБ). Тоді для розрахунку нормованого ФНЧ Батерворту при $\epsilon_p = 1$ задається лише порядок фільтра.

Для розрахунку нулів і полюсів підставимо у вираз для апроксимації квадрату системної функції замість $\alpha = s/j = -j s$, тоді

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_p^2 (-1)^N s^{2N}} \tag{58}$$

Вочевидь ні при жодних скінчених комплексних s вираз не рівний 0, тому фільтр Батерворта не має нулів. Для розрахунку полюсів прирівняємо знаменник до нуля:

$$1 + \varepsilon_p^2 (-1)^N s^{2N} = 0 \text{ і отже } (-1)^N s^{2N} = -\frac{1}{\varepsilon_p^2}$$

Розглянемо окремо парні і непарні N. При парних N $s^{2N} = -\frac{1}{\varepsilon_p^2}$, отже

$$s = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}} \cdot \exp\left(j \frac{2n+1}{2N} \pi\right), \text{ де } n = 1..2N \quad (59)$$

При непарних N: $s^{2N} = \frac{1}{\varepsilon_p}$, отже

$$s = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}} \cdot \exp\left(j \frac{n}{N} \pi\right), \text{ де } n = 1..2N \quad (60)$$

На рисунку (рис. 13) показане розміщення полюсів квадрату модуля системної функції, заданої виразом при парному N = 4 (зліва) і непарному N = 5 (справа) порядках фільтру Батерворта.

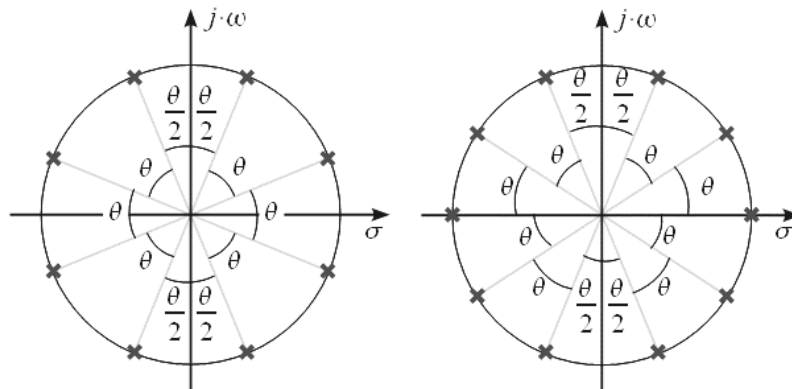


Рис. 13: Розміщення полюсів квадрату модуля системної функції $H(\alpha)$ при парному і непарному порядках фільтру Батерворта

Всі полюса квадрата модуля системної функції Батерворта розміщені на колі радіусу $1/\sqrt[N]{\varepsilon_p}$, та відстоять один від одного на кут $\theta = \pi/N$.

Для отримання стійкого та реалізованого фільтра необхідно, щоб усі нулі і полюси розміщались у лівій півплощині комплексної площини s. Тоді для розрахунку системної функції $H(s)$ фільтра Батерворта необхідно, із всіх полюсів обрати лише ті, що лежать у лівій півплощині. Тоді всі N полюсів, розміщених у в лівій півплощині можуть бути записані як для парного так і для непарного N у вигляді:

$$p_n = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}} \exp\left(j \left(\pi \frac{N+n-1}{2N}\right)\right) \quad n = 1..N \quad (61)$$

Або у тригонометричній формі

$$p_n = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}} \left(-\sin\left(\frac{2n-1}{2N} \pi\right) + j \cos\left(\frac{2n-1}{2N} \pi\right) \right) \quad (62)$$

Тоді системна функція фільтра Батерворта може бути записана у вигляді

$$H(s) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{s - p_n} = \prod_{n=1}^N \frac{1}{j\alpha - p_n} = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z+1} - p_n} \quad (63)$$

Порядок розрахунку фільтра Батерворта

Вихідними даними для розрахунку служать: частота зрізу ω_0 , перехідна смуга, ω_1 , допустимі спотворення у смузі пропускання R_p та потрібне придушення у смузі закриття R_s . Розрахунок проведемо у декілька кроків:

- 1) Здійснимо перехід від частот до параметра α за формулою $\alpha = 2 \operatorname{tg}(\omega \Delta t / 2) / \Delta t$,

2) З наведеними вище формулами розрахуємо параметри ε_p , ε_s k та k_1 .

3) Визначаємо порядок фільтра за виразом $F_N(\alpha_1/\alpha_0) = \varepsilon_s/\varepsilon_p$, а так як $F_N(\alpha) = \alpha^N$, то маємо

$$\text{вираз } \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^N = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}, \text{ звідки } N = \frac{\log(\varepsilon_s / \varepsilon_p)}{\log(\alpha_1 / \alpha_0)}$$

4) За відомими виразом для квадрату системної функції фільтра знаходимо положення полюсів за формулою

$$p_n = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}} \left(-\sin\left(\frac{2n-1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2n-1}{2N}\pi\right) \right) \quad (64)$$

5) За положенням полюсів знаходимо системну функцію фільтра

$$H(s) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{2 \cdot \frac{z-1}{\Delta t} - p_n} \quad (65)$$

Порядок виконання роботи

1) Згідно із варіантом записати передавальну функцію аналогового фільтра-прототипу, що описується диференціальним рівнянням.

№	Рівняння
1	$\frac{d}{dt}y(t) + 100 y(t) = 100 x(t)$
2	$10 \frac{d}{dt}y(t) + 10 y(t) = 100 x(t)$
3	$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 100 \frac{d}{dt}y(t) = 10 x(t)$
4	$10 \frac{d}{dt}y(t) + 3 y(t) = x(t)$
5	$100 \frac{d}{dt}y(t) + 10 y(t) = 10x(t)$
6	$80 \frac{d}{dt}y(t) + 20 y(t) = 40x(t)$
7	$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 20 \frac{d}{dt}y(t) = 100 x(t)$
8	$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 10 \frac{d}{dt}y(t) = 50 x(t)$
9	$20 \frac{d}{dt}y(t) + 10 y(t) = x(t)$
10	$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 20 \frac{d}{dt}y(t) = 100 x(t)$

2) На основі отриманого аналогового фільтра-прототипу за допомогою білінійного перетворення побудувати цифровий фільтр. Крок за часом Δt вважати величиною, що залежить від реалізації.

3) Засобами програми MathCad побудувати на одному графіку ЛАЧХ фільтра- прототипу та ЛАЧХ отриманого фільтра при різних значеннях кроку за часом. Пояснити отримані результати.

4) Отримати імпульсну перехідну функцію обох фільтрів, і пояснити наявність розбіжностей.

5) Обмежуючись 20 кроками за часом (крок Δt обрати користуючись вказівками викладача) побудувати СІХ фільтр, що реалізує аналогічну імпульсну характеристику, як і аналоговий фільтр-прототип. Побудувати графіки ЛАЧХ та ФЧХ фільтра. Пояснити відмінність ФЧХ фільтру і аналогового фільтра-прототипу.

б) Побудувати ФНЧ Батерворта із частотою зрізу і порядку, заданими у таблиці і кроком за часом $\Delta t = 0.3$. Зобразити у MathCad графіки ЛАЧХ та ФЧХ.

№	ω	N	№	ω	N
1	0.1	3	6	0.1	4
2	0.5	4	7	0.5	5
3	0.2	5	8	0.2	3
4	0.3	3	9	0.3	4
5	0.4	4	10	0.4	2

Контрольні питання.

1. Які типи цифрових фільтрів ви знаєте?
2. Що таке СІХ фільтр?
3. Що таке НІХ фільтр?
4. У чому суть білінійного перетворення при проектуванні фільтрів ?
5. Що таке імпульсна характеристика фільтра?
6. Які методи побудови цифрових фільтрів ви знаєте?
7. Який фільтр називається фільтром нижніх частот ?
8. Що таке частота зрізу для фільтра нижніх частот ?
9. Зобразіть ідеальну АЧХ фільтра нижніх частот.
10. Зобразіть реальну АЧХ фільтра нижніх частот.
11. Що таке гранична частота для фільтра нижніх частот ?

Література

1. Бабак В. П. Обробка сигналів: підручник для вузів / В. П. Бабак, А. І. Хандецький, Е. Шрюфер – Київ: Либідь, 1996. – 390 с.
2. Ваврук Є. Я. Цифрове опрацювання сигналів та зображень, алгоритми та реалізація: навчальний посібник / Є. Я. Ваврук, Р. Б. Попович – Національний університет “Львівська політехніка”, 2008. – 147 с.
3. Яцимірський М. М. Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень / М. М. Яцимірський // – Львів: Академічний Експрес, 1997. – 219 с.
4. Ваврук Є. Я. Моделі контролю і діагностики систем опрацювання сигналів / Є. Я. Ваврук, В. А. Коваль // Збірник наукових праць “Моделювання та інформаційні технології”. – Інститут проблем моделювання в енергетиці НАНУ, 2006 – Випуск 35. – С. 131–139.
5. Наконечний А. Й. Цифрова обробка сигналів: Навчальний посібник / А. Й. Наконечний, Р. А. Наконечний, В. А. Павлиш. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2010. – 368 с.
6. Дробик О. В. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О. В. Дробик, В. В. Кідалов, В. В. Коваль, Б. Я. Костік, В. С. Лазебний, Г. М. Розорінов, Г. О. Сукач. – К.: Наукова думка, 2008. – 144 с.
7. Бондарев В. Н. Цифрова обробка сигналів, методи і засоби: підручник для вузів / В. Н. Бондарев, Г. Трестер, В. С. Чернега. – Харків: Конус, 2001. – 398 с.
8. Рибальченко М.О. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник / М. О. Рибальченко, О. П. Єгоров, В. Б. Зворикін. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
9. Письціо В.П. Методичні вказівки до лабораторної роботи № 6 "Дослідження нестационарних сигналів спектральними методами" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". В.П. Письціо, В.Р. Медвідь, П.М. Микулик. –Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 8 с.
10. Письціо В.П. Методичні вказівки до лабораторної роботи №1 "Цифрові сигнали та зображення в системі Mathcad" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". В.П. Письціо, В.Р. Медвідь, П.М. Микулик. – Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 12 с.
11. Шрюфер Е., Обробка сигналів. Цифрова обробка дискретизованих сигналів / Е. Шрюфер. – Київ, Либідь, 1992. -294с.
12. Філатова Г.Є. Проектування цифрових фільтрів: навчальний посібник / Г.Є. Філатова. – Х. : НТУ «ХПІ», 2017. – 120 с.

Зміст

Лабораторна робота №7	3
Тема роботи	3
Мета роботи.....	3
Загальні поняття	3
Класифікація фільтрів	3
Класифікація за видом частотної характеристики	3
Лінійні стаціонарні фільтри	4
Імпульсна характеристика фільтра	5
Приклад фільтра	6
Класифікація фільтрів за імпульсною характеристикою.....	6
Трансверсальні цифрові фільтри	6
Імпульсна характеристика фільтра	7
Рекурсивні ЦФ	8
Стійкість рекурсивних фільтрів.	8
Задача синтезу цифрових фільтрів.	9
Синтез цифрового фільтра на основі скінченої імпульсної характеристики	9
Синтез цифрового фільтра на основі нескінченної імпульсної характеристики фільтра	10
.....	10
Синтез цифрового фільтра на основі аналогового фільтра-прототипу.....	10
Синтез фільтра як задача оптимізації.....	11
Синтез цифрового фільтра за правилами синтезу аналогових фільтрів	11
Апроксимація АЧХ фільтрів	12
Апроксимація за Чебишевим	13
Апроксимація фільтром Батерворта	14
Порядок розрахунку фільтра Батерворта	15
Порядок виконання роботи	16
Контрольні питання.....	17
Література	17
Зміст	18