ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІ СИСТЕМИ

УДК 681.5.04

Е.Ушаков, канд.техн.наук
Вінницький державний технічний університет

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ОДНОГО ВАРІАНТУ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

Розглядається задача оцінювання параметрів векторної регресійної моделі з корельованими похибками вимірів. Пропонується загальний метод оцінювання, що дозволяє при неповній інформації про кореляційну структуру похибок вимірів одержати адаптивну оцінку невідомих параметрів, асимптотично не менш точну, чим найкраща лінійна незміщена оцінка. Досліджуються статистичні властивості запропонованої оцінки, подаються результати численних експериментів.

Як моделі стохастичних систем при розв'язанні різноманітних прикладних задач опрацювання інформації у складних людино-машинних системах керування широко використовуються векторні регресивні моделі [1-4]. Основний недолік класичних оптимальних регресивних методів полягає у тому, що для їхнього обгрунтованого застосування необхідна достатньо повна апріорна інформація про характеристики похибок вимірів. Відомо, що практично найчастіше цієї інформації цілком або частково нема, що створює суттєві перешкоди для практичного використання цих методів. Тому велике значення має розробка алгоритмів при відсутності апріорної інформації. Структура моделі та характер апріорної інформації визначають метод розв'язування задачі оцінювання: робастний [5], мінімаксний [6] чи гарантного оцінювання [3]. На сьогодні зв'язок цих методів з векторними регресійними моделями із корельованими похибками вимірів вивчена недостатньо.

У роботі розглядається загальний підхід до параметричної ідентифікації моделей в умовах апріорної статистичної невизначеності, що є природним узагальненням двокрокового методу найменших квадратів (МНК) [7]. Застосування цього підходу фактично відповідає оптимізації алгоритму оцінювання за рахунок більш повного і гнучкого використання наявної вимірювальної інформації.

На прикладі задачі оцінювання параметрів векторної регресивної моделі з корельованими похибками показано, що навіть при дуже обмеженій апріорній інформації про кореляційну структуру похибок вимірів використання даного підходу дозволяє істотно поліпшити точність оцінок. Алгоритм оцінювання дуже просто реалізовується на ЕОМ, тому що спирається на добре відпрацьовану процедуру застосування методу найменших квадратів [8].

Розглянемо загальний підхід до оптимізації оцінок параметрів стохастичних моделей систем керування. Нехай модель має вигляд:

$$Y_t = F(t, \Theta_*) + E_t, \quad (t = 1, ..., T), \tag{1}$$

де $F(t,\Theta)$ - динамічна функціональна залежність вихідних параметрів системи від вектора невідомих параметрів Θ; $Y_t = \{y_{1t}, ..., y_{rt}\}^T$ - вектор вимірів на момент t, $(t=1,...,T)$; $E_t = \{\varepsilon_{1t}, ..., \varepsilon_{rt}\}^T$ - вектор випадкових похибок вимірів, $(t=1,...,T)$; $Q_* = \{Q_1, ..., Q_p\}'$ - вектор невідомих параметрів (штрих тут і далі означає операцію транспонування).

Нехай $F = \{\mathsf{F}(t,0), Q \in \infty \le R^p\}$ - клас параметричних моделей вимірів, де R^p - p-вимірний евклідовий простір (передбачається, що $F(t,Q_*) \in \mathsf{F}, \{E_t\}_{t=1}^{\infty} \in E(\chi)$, де $E(\chi)$ - клас випадкових процесів із дискретним часом, обумовлений якоюсь множиною χ ймовірносних характеристик; $\{Y_t\}_{t=1}^{T} = Y^T$ - вимірювальна інформація (множина даних).

Потрібно побудувати оцінку $\hat{Q}_T$ дійсного значення Q_* на основі опрацювання даних Y^T з урахуванням наявної інформації про F і $E(\chi)$. Метод одержання оцінки $\hat{Q}_T$ визначає оператор оцінювання A:

$$\hat{Q}_T = A(Y^T \mid \mathsf{F}, \chi). \tag{2}$$

Передбачається, що $A \in \mathsf{A}$, де А – якийсь достатньо широкий клас операторів оцінювання.

Для порівняння операторів оцінювання впровадимо критерій ефективності оцінок $I(\hat{Q}_T)$. Загалом значення критерію визначаються законом розподілу оцінок $\hat{Q}_T$, що позначимо через $\Phi[\hat{Q}_T]$. Тоді $I = I(\Phi[\hat{Q}_T])$. Далі символом $x_T \xrightarrow{P} x$ при $T \to \Theta$ позначимо збіжність по можливості послідовності випадкових величин $\{x_T\}_{T=1}^{\infty}$ до величини *x*.

Оператор оцінювання $A^* \in \mathrm{A}$ оптимальний у класі А у змісті критерію І, якщо $\tilde{Q}_T = A^*(Y^T | \mathsf{F}, \chi)$, причому:

а) $\tilde{Q}_T \xrightarrow{P} Q_*$ при $T \to \infty$;

б) існує послідовність $\{D_T(F,\chi)\}_{T=T_0}^{\infty}$ невироджених нормуючих матриць, таких, що $\Phi[D_T(F,\chi)(\tilde{Q}_T - Q_*)] \to \pi(x)$ при $T \to \infty$, де $\pi(x)$ - відомий невироджений розподіл;

в) $I(\Phi[\tilde{Q}_T]) \le I(\Phi[\tilde{Q}_T])$ при всіх T, де $\tilde{Q}_T = A(Y^T | F, \chi)$ для $\forall A \in \mathrm{A}$.

Вважатимемо, що $\tilde{Q}_T - (I, \mathrm{A})$ - оптимальна оцінка.

Спроможність оцінок гарантує їхнє уточнення із зростанням кількості вимірів, відомий граничний розподіл дозволяє будувати довірчі інтервали і визначати реальну точність оцінювання, а вибір адекватного критерію ефективності забезпечує одержання оцінок, найбільш точних в аналізованому класі. При визначених умовах оптимальними є МНК-оцінки, найкращі лінійні незміщені оцінки, оцінки максимальної правдоподібності й інші. Побудова оптимальних оцінок у достатньо широкому класі потребує точного знання множини ймовірнісних характеристик похибок вимірів.

У даній роботі розглядаються адаптивні оцінки, побудовані на основі такого евристичного методу:

1) теоретично знаходиться оптимальна оцінка $\tilde{Q}_T = A^*(Y^T | F, \chi_0)$, $A^* \in \mathrm{A}$ у припущенні, що χ_0 цілком відомо;
2) будуються певні оцінки $\chi_{2T} = \chi_2(Y^T | F, \chi_1)$ невідомих ймовірнісних характеристик процесу $\{E_t\}_{t=1}^{T}$;
3) будується евристичний оператор адаптивного оцінювання A_T:

$$A_T(Y^T | F, \chi_1) = A^*(Y^T | F, \{\chi_1, \chi_{2T}\}); \tag{3}$$

4) вказуються умови, що накладаються F на χ_1 і при виконанні яких A_T оператор (I, A) є адаптивним.

Розглянемо векторну лінійну параметричну модель, що описує багатоканальну вимірювальну систему:

$$Y_t = X_t'Q + V_t \qquad (t = 1,...,T), \tag{4}$$

де $Y_t = \{y_{1t},..., y_{rt}\}'$ - вектор вимірів; $X_t = \{X_{1t},..., X_{rt}\}$ - відома невипадкова матриця розміру $p \times r(t = 1,...,T); X_{it} = \{x_{it}^t,..., x_{ip}^t\}'$ - і-й стовпчик матриці $X_t (i = 1,...,r); Q = \{Q_1,...,Q_p\}'$ - вектор невідомих параметрів; $V_t = \{u_{1t},...,u_{rt}\}'$ - вектор випадкових корельованих у часі помилок вимірів $(t = 1,...,T); T$ - загальна кількість вимірів; r - сумарна кількість вимірювальних каналів.

Припустимо, що похибки вимірів описуються векторним різницевим стохастичним рівнянням авторегрессії:

$$V_t = \sum_{n=1}^{q} B_n V_{t-n} + E_t \qquad (t = 1,...,T), \tag{5}$$

де $E_t = \{\varepsilon_{1t},...,\varepsilon_{rt}\}'$ - векторний дискретний білий шум, причому $M[E_t] = 0, M[E_n E_m'] = G\delta_n^m, G\rangle 0; B_n = diag\{b_{n1},...,b_{nr}\}$ - діагональна матриця розміру $r \times r$ з елементами $\{b_{ni}\}_{i=1}^r$ на головній діагоналі. Передбачається, що рівняння (5) стійке, тобто корені характеристичного рівняння лежать всередині кола одиничного радіуса:

$$\det\left[Iz^q - \sum_{n=1}^{q} B_n z^{q-1}\right] = 0. \tag{6}$$

Модель (5) можна записати в координатній формі:

$$u_{it} = U_{it}' b_i + \varepsilon_{it} \qquad (i = 1,...,r; t = 1,...,T,), \tag{7}$$

де $b_i = \{b_{1i},...,b_{qi}\}', U_{it} = \{u_{i,t-1};...; u_{i,t-q}\}'$. Загалом порядок q моделі (7) може залежати від номера вимірювального каналу i. Зауважимо, що авторегресійні моделі останнім часом широко застосовуються для апроксимації випадкових процесів із дискретним часом при розв'язуванні різноманітних прикладних задач [10, 11].

Відомо, що МНК-оцінки параметрів моделі автогресії дійсні [9, 12], коли сам авторегресійний процес доступний для спостереження. Аналогічний результат справедливий, коли наявний не сам процес автогресії, а його суміш із лінійним трендом, що має невідомі параметри.

Якщо виконані умови [9], тоді оцінка $\theta_T(I_*, A_*)$ є адаптивною, а при гаусовських похибках вимірів - (I_*, A_0)-адаптивною, де A_0 - клас усіх незміщених оцінок. Тому при цих умовах оцінка θ_T є дійсною й асимптотично нормальною.

Адаптивна оцінка θ_T асимптотично не менш точна, ніж НЛНО $\hat{\theta}_T$, що може бути побудована в явному вигляді тільки при відомих параметрах моделі (7) похибок вимірів. Точність адаптивної оцінки визначається оцінкою її коваріаційної матриці:

$$K_{\theta_T} = \left[\sum_{t=1}^{T} \mathrm{X}_t(\hat{B})\hat{G}_T^{-1}\mathrm{X}_t'(\hat{B})\right]^{-1} = W_T^{-1}(\hat{B}, \hat{G}_T), \tag{8}$$

Для аналізу одного із можливих засобів вибору порядку q авторегресійної моделі у кожному вимірювальному каналі роздивимося будь-який із каналів. Нехай q_0 - дійсний порядок моделі шуму, а $q_{\max}$ - максимально можливий, $q_0 \le q_{\max}$. Необхідно оцінити розмір q_0 для достатньо великих T. На початковому етапі виберемо розмірність $q_0 = q_{\max}$ і оцінимо відповідні параметри моделі авторегресії:

$$\hat{b}_T = \left(\sum_{t=1}^{T} \hat{U}_t \hat{U}_t'\right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{U}_t u_t. \tag{9}$$

Впровадимо фіктивні МНК-оцінки вектора b, побудовані за процесом $\{u_t\}_{t=1}^{\infty}$, що не спостерігається :

$$\tilde{b}_T = \left(\sum_{t=1}^{T} U_t U_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} U_t u_t . \tag{10}$$

Тоді $\hat{b}_T$ має такий же граничний розподіл, що й оцінка $\tilde{b}_T$, для якої відомо, що при $q_0 \le q_{\max}$ вона асимптотично нормальна із середнім значенням b і коваріаційною матрицею $\delta^2 V^{-1}/T$, де $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} U_t U_t' \xrightarrow{P} V > 0$ при $T \to \infty$, а δ^2 - дисперсія шуму $\{E_t\}_{t=1}^{T}$, що в моделі (7). Також $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} \hat{U}_t \hat{U}_t' = \hat{V}_T \xrightarrow{P} V$, $s_T = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{u}_t - \hat{U}_t' b_T \right)^2 \xrightarrow{P} \delta^2$ при $T \to \infty$.

Можна вважати, що при достатньо великих T вектор $\hat{b}_T$ має нормальний розподіл із середнім b і коваріаційною матрицею $s_T \hat{V}_T^{-1}/T$. У цьому випадку перевірка гіпотези про рівність нулеві довільного числа компонент вектора b полягає у перевірці того, що відповідні компоненти оцінки $\hat{b}_T$ мають нульове середнє значення. Тому що $\hat{b}_T$ має нормальний розподіл, остання задача вирішується стандартними методами математичної статистики. Встановлення дійсного порядку моделі полягає у відкиданні тих компонент вектора b, для яких гіпотеза про рівність нулеві середнього значення оцінки визнана справедливою.

Як приклад, припустимо, що закон динаміки хіміко-технологічного процесу (ХТП) в системі координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ виглядає:

$$x_1(t) = 10000,\; x_2(t) = -50000 + 200t,\; x_3(t) = 10000 .$$

Виконуються виміри координат ХТП у дискретні моменти часу $\{t_n\}_{n=1}^{T}$:

$$y_{1n} = r(t_n) + u_{1n},\; y_{2n} = \beta(t_n) + u_{2n},\; y_{3n} = \varepsilon(t_n) + u_{3n},. \tag{11}$$

Похибки вимірів $\{u_{in}\}_{n=1}^{T}$ задовольняють рівнянню авторегресії першого порядку:

$$u_{in} = b_i u_{i,n-1} + \varepsilon_{in} \quad (i = 1,\dots,3;\; n = 1,\dots,T), \tag{12}$$

де $b_1 = 0{,}9;\, b_2 = b_3 = 0{,}8$. Похибки $\{\varepsilon_{in}\}_{n=1}^{T}$ незалежні, нормально розподілені і мають діагональну коваріаційну матрицю $G = diag\{10{,}9;\; 5{,}8*10^{-4};\; 5{,}8*10^{-4}\}$.

Будемо апроксимувати закон динаміки ХТП розкладанням за алгебраїчними поліномами до другого порядку:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \theta_1 + \theta_4 t + \theta_7 t^2, \\ x_2(t) &= \theta_2 + \theta_5 t + \theta_8 t^2, \\ x_3(t) &= \theta_3 + \theta_6 t + \theta_9 t^2. \end{aligned} \tag{13}$$

За допомогою лінеаризації біля опорної траєкторії нелінійну модель вимірів (11), (13) можна довести до вигляду (4). При обчисленні адаптивних оцінок передбачалося, що дійсні значення параметрів моделі (12) невідомі. Порядок q моделі (12) також невідомий, але передбачалося, що $q \le q_{\max} = 3$.

При виборі порядку моделі помилок вимірів відповідно до описаної процедури було встановлено, що модель першого порядку є адекватною. З використанням цієї моделі були отримані адаптивні оцінки θ_T параметрів моделі (13), подані в таблиці. Для порівняння тут же подані оцінки $\tilde{\theta}_T$.

Дійсні значення параметрів θ		Кількість вимірів T					
		50		250		450	
		θ_T	$\tilde{\theta}_T$	θ_T	$\tilde{\theta}_T$	θ_T	$\tilde{\theta}_T$
θ_1	10000	9997,6	10005,1	10010,5	10009,7	10004,7	10005
θ_2	-50000	-50001	-49992	-49998,6	-49998,5	-49998,8	-49999
θ_3	10000	9976,1	9978,2	9988,3	9987,4	9995,4	99995
θ_4	0,0	2,9	2,4	-0,2	-0,2	0,038	0,035
θ_5	200,0	199,8	202,5	199,7	199,8	200,0	200,0
θ_6	0,0	2,0	1,9	0,3	0,3	0,0046	0,0047
θ_7	0,0	-0,2	-0,1	0,0023	0,0024	-0,0005	-0,0005
θ_8	0,0	0,012	0,017	0,0030	0,0031	0,0002	0,0002
θ_9	0,0	0,069	0,067	-0,0019	-0,0021	0,0003	0,0003

Результати обчислень виявляють, що адаптивні оцінки сходяться до дійсних значень оцінюваних параметрів із зростанням T, і при T≥ 250 оцінки θ_T практично не відрізняються від оптимальних оцінок $\tilde{\theta}_T$.

На першому кроці процедури адаптивного оцінювання утворюються дуже точні оцінки параметрів моделі (12). Наприклад, при T=450 наближена модель похибок вимірів виглядає:

$$
\begin{aligned}
u_{1n} &= 0{,}904 u_{1,n-1} + \varepsilon_{1n}, \\
u_{2n} &= 0{,}781 u_{2,n-1} + \varepsilon_{2n}, \\
u_{3n} &= 0{,}806 u_{3,n-1} + \varepsilon_{3n}, \\
\hat{G}_T &= diag\left\{10{,}65; 5{,}9 * 10^{-4}; 6{,}0 * 10^{-4}\right\}
\end{aligned}
$$

Таким чином, результати численних експериментів узгоджуються з теоретичними положеннями про спроможність і асимптотичну ефективність адаптивних оцінок.

It is consid the ptoblem of valuation parameters of vectorial regressive model with correlive dimension mistakes, offer a general method of valuation, which allow recieve an adaptal valuation of unknown parametrs in imperfect information about correlive structure mistakes of dimensions.

Література

1. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973.
2. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: Изд-во иностр. лит., 1968.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975.
4. Маршалл А., Олкин И. Неравенства. - М.: Мир, 1983.
5. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980.
6. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978.
7. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения. – М.: Наука, 1980.
8. Андреев Н.И. Теория статистически оптимальных систем управления. - М.: Наука, 1980.
9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. - М.: Высшая школа, 1982.

10. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. - М.- Л.: Гостехиздат, 1950.
11. Кашьяп Р.Л., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. – М.: Наука, 1983.
12. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976.

Одержано 09.06.2000 р.