

УДК.631.358.4

Я.Козіброда, канд. техн. наук; Ю.Петрикович; М.Паньків
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ГИЧКИ ЦУКРОВИХ БУРЯКІВ НА ГВИНТОВИХ ПОВЕРХНЯХ

У статті пропонується математична модель процесу руху гички цукрових буряків на гвинтових поверхнях, проаналізовано теоретичні дослідження з метою оптимізації кінематичних параметрів.

Умовні позначення

ω - кутова швидкість гвинтової поверхні;

r_0 - початковий діаметр;

- α - кут підйому гвинтової поверхні;
- f - коефіцієнт тертя;
- V_p - швидкість переміщення робочого органу;
- m - маса гички;
- N - реакція в'язів;
- S - довжина дуги гвинтової поверхні;
- T - кінетична енергія.

Для обрізування і транспортування гички цукрових буряків застосовуються різні пристрої, серед яких перспективним та малодослідженим є шнековий гичкозрізувальний апарат. Це циліндр з початковим діаметром $2r$ і боковою гвинтовою поверхнею з шириною b та кутом підйому α . Кут підйому α , кутову швидкість шнека ω і початковий радіус циліндра r_0 доцільно визначити теоретично і уточнити на основі експериментів. Для вивчення руху гички припустімо, що точкова маса m ковзає по гвинтовій поверхні з коефіцієнтом тертя f при поступовому рівномірному переміщенні апарата із швидкістю V_p вздовж рядка буряків і при рівномірному обертанні навколо вертикальної вісі з постійною кутовою швидкістю ω (рис.1).

Виберемо постійні вісі координат ξ, η, ζ .

- основні ξ, η, ζ , що переміщуються вздовж вісі ξ із швидкістю V_p ;
- X, Y, Z , що обертаються навколо вісі ζ із швидкістю ω ;
- додаткові X_1, Y_1, Z_1 , зв'язані безпосередньо з точковою масою m .

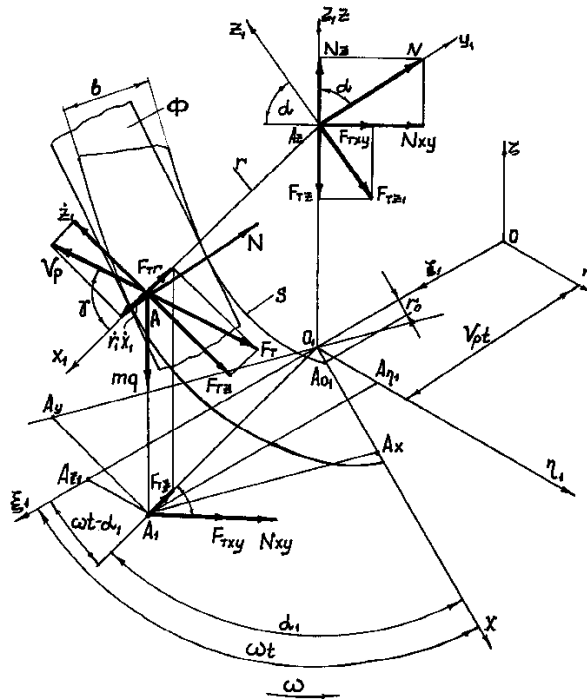


Рисунок 1. Еквівалентна схема руху гички на гвинтовій поверхні шнека.

Розгляньмо момент часу t , коли шнек перемістився з точки O в точку O_1 і повернувся на кут ωt . В момент $t = 0$ точкова маса m перебуває в точці A_0 . З початком поступового переміщення і обертання шнека точкова маса m з точки A_0 починає рухатися на гвинтовій поверхні і в момент часу, що розглядається, перебуває в точці A_0 . Проведемо площину Φ , дотичну до гвинтової поверхні і яка проходить

через точку A , що перебуває на лінії дотику, прийнятій за вісь X і паралельній горизонтальній площині.

Кут β розглядуваної прямої з горизонтальною площиною вважатимемо рівним нулеві, спростивши таким чином задачу. Припустимо, що рух точки відбувається в площині Φ . На частину масою m діють такі активні сили: сила тяжіння mg , реакція в'язі N , яка спрямована перпендикулярно площині Φ , сила тертя $F_T = Nf_T$, спрямована протилежно до відносної швидкості V_T . Для встановлення закону руху частин на гвинтовій поверхні шнека скористаємося рівнянням Лагранжа другого роду. Точка на гвинтовій поверхні володіє двома рівнями свободи, тому необхідно мати дві узагальнені координати. За узагальнені координати вважаємо

$$q = r, \quad q_r = S,$$

де r - віддаль від точки до вісі t_r , що збігається з віссю X ;

S - довжина дуги гвинтової лінії, що відраховується від точки A_0 .

Для складання рівнянь Лагранжа визначмо кінетичну енергію, виразивши нерухомі координати через узагальнювальні

$$T = \frac{1}{2} m V_a^2, \quad (1)$$

де V_a - абсолютна швидкість точки.

Враховуючи проекції V_a на координатні вісі, отримаємо

$$V_a^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2. \quad (2)$$

Нерухомі координати виразимо через узагальнювальні

$$\begin{cases} \xi = r \cos(\omega t - \alpha_1) + V_T t; \\ \eta = r \sin(\omega t - \alpha_1); \\ \zeta = S \sin \alpha, \end{cases} \quad (3)$$

де ωt - кут повороту шнека за час t ;

α_1 - кут між вісями X і Y .

Кут α_1 визначається довжиною проекції гвинтової лінії на горизонтальну площину і початковим радіусом

$$\alpha_1 = \frac{S \sin \alpha}{r_0}. \quad (4)$$

Підставивши вираз (4) у систему (3), продиференціювавши і піднявши до квадрату рівняння (1) і (2), знайдемо кінетичну енергію

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{r} + r^2 \left(\omega - \frac{\dot{S} \sin \alpha}{r_0} \right)^2 + V_P^2 + \dot{S}^2 \sin^2 \alpha + 2 \dot{r} \cos \left(\omega t - \frac{S \cos \alpha}{r_0} \right) V_P - 2 r V_P \left(\omega - \frac{\dot{S} \cos \alpha}{r_0} \right) \sin \left(\omega - \frac{S \sin \alpha}{r_0} \right) \right]. \quad (5)$$

Рівняння Лагранжа другого роду набере вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} = Q_i, \quad (6)$$

де q_i, \dot{q}_i, Q_i - відповідно узагальнювальна координата, швидкість і сила.

Ліва частина формули (6) визначається диференціюванням виразу для кінетичної енергії, а узагальнювальні сили - на основі можливих переміщень

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Nf \cos \gamma, \\ Q_2 &= -mq \sin \alpha - Nf \sin \gamma, \end{aligned} \quad (7)$$

де γ - кут, що визначає напрямок відносної швидкості V_r .

Після перетворення отримаємо два рівняння для визначення узагальнювальних координат

$$\ddot{r} - r \left(\omega - \frac{\dot{S} \cos \alpha}{r_0} \right)^2 = -\frac{N}{m} f \cos \gamma, \quad (8)$$

$$\ddot{S} \sin^2 \alpha + \frac{r^2 \ddot{S} \cos^2 \alpha}{r_0^2} - \frac{2r \dot{r}}{r_0} \cos \alpha \left(\omega - \frac{\dot{S} \cos \alpha}{r_0} \right) = q \sin \alpha - \frac{N}{m} f \sin \gamma, \quad (9)$$

До рівняння (8) і (9) належить невідома реакція N , для визначення якої скористаємося законом відносного руху точки. За рухомі координати вважаємо X_1, Y_1, Z_1 , тоді рівняння руху точки на вісь Y_1 матиме вигляд

$$m \ddot{y}_1 = \sum F_{iy_1} + P_{y_1} + Q_{y_1}, \quad (10)$$

де $\sum F_{iy_1}$ - сума проєкцій активних сил на вісь Y_1 ;

P_{y_1} - переносна сила інерції в напрямку вісі Y_1 ;

Q_{y_1} - проєкція на вісь Y_1 коріолісової сили інерції.

Переносна сила інерції $P = mr\omega^2$ спрямована на радіусі r , тому $P_{y_1} = 0$.

Коріолісова сила інерції дорівнює векторному добуткові $2m\vec{V}_r \times \vec{\omega}$, а її проєкція на вісь Y_1 визначається проєкціями V_r і ω на рухомі вісі координат

$$Q_{y_1} = -2m(\omega_{z_1} V_{x_1} - V_{z_1} \omega_{x_1}) = -2m\omega \dot{r} \sin \alpha. \quad (11)$$

Сума проєкцій активних сил дорівнює

$$\sum F_{iy_1} = -mq \cos \alpha + N. \quad (12)$$

Підставляючи значення сил у рівняння (10) і пам'ятаючи, що точка рухається на поверхні без відриву ($\ddot{Y}_1 = 0$), отримаємо

$$\frac{N}{m} = q \cos \alpha + 2\omega \dot{r} \sin \alpha. \quad (13)$$

З урахуванням виразу (13) рівняння для визначення узагальнювальних координат матимуть вигляд

$$\ddot{r} - r \left(\omega - \frac{\dot{S} \cos \alpha}{r_0} \right)^2 = -f \cos \gamma \left(q \cos \alpha + 2\omega \dot{r} \sin \alpha \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{S} \sin^2 \alpha + \frac{r^2 \ddot{S} \cos^2 \alpha}{r_0^2} - \frac{2r \dot{r} \cos^2 \alpha}{r_0} \left(\omega - \frac{\dot{S} \cos \alpha}{r_0} \right) = \\ = -q \sin \alpha - f \sin \gamma \left(q \cos \alpha + 2\omega \dot{r} \sin \alpha \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Щоб спростити задачу, вважатимемо $f = 0$ і шукатимемо розв'язок рівнянь (14) і (15) у вигляді рядів за ступенями t :

$$r = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad (16)$$

$$S = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots \quad (17)$$

де a_i, b_i - постійні коефіцієнти.

З початкових умов $\left(t = 0, r = r_0, \dot{r} = 0, S = 0, \ddot{S} = 0 \right)$ випливає, що

$a_0 = r_0, a_1 = 0, b_0 = b_1 = 0$. Для визначення решти коефіцієнтів перетворимо рівняння (14) і (15) так, щоб у лівій частині залишилися другі похідні. Двічі диференціюючи вирази (16) і (17) і підставляючи значення похідних у рівняння (14) і (15), визначимо постійні коефіцієнти порівнянням виразів при однакових степенях t в правих і лівих частинах (14) і (15). Остаточно вирази (16) і (17) виглядатимуть так

$$r = r_0 + \frac{r_0 \omega^2}{2} t^2 + \frac{\omega q \sin \alpha \cos \alpha}{3} t^3, \quad (18)$$

$$S = -\frac{q \sin \alpha}{2} t^2 + r_0 \omega^3 t^3 \cos \alpha. \quad (19)$$

Використовуючи третє рівняння системи (3) та вираз (19), отримаємо після диференціювання

$$\dot{\zeta} = -qt \sin^2 \alpha + r_0 \omega^3 t^2 ctq \alpha, \quad (20)$$

звідки

$$\omega > \sqrt[3]{\frac{\left(\dot{\zeta} + qt \sin^2 \alpha \right) tq \alpha}{r_0 t^2}}. \quad (21)$$

Мінімальне значення кутової швидкості залежить, як бачимо з формули (21), від кута підйому гвинтової лінії α і початкового радіуса r_0 циліндра. Аналіз впливу параметрів шнекового гичкозрізувального апарата на кутову швидкість його обертання виконаний при умові, що $\dot{\zeta} = V_p$ (щоб не нагромаджувалася транспортна гичка). Час транспортування визначався з урахуванням проходження машиною із швидкістю V_p віддалі, що дорівнює довжині зрізування (приблизно 0,05 м).

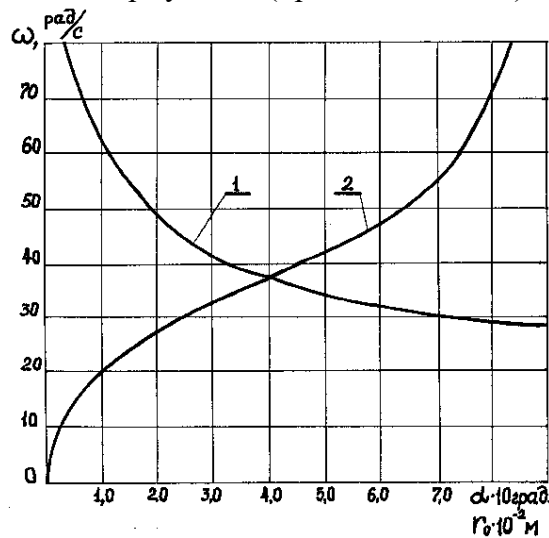


Рисунок 2. Залежність мінімальної кутової швидкості ω від початкового радіуса r_0 шнека і кута підйому α гвинтової поверхні шнека: 1 - залежність кутової швидкості від початкового радіуса (ω від r_0); 2 - залежність кутової швидкості від кута підйому гвинтової поверхні шнека (ω від α).

При $V_p = 2m/c, t = 0,025c$.

Залежність кутової швидкості від кута підйому гвинтової лінії і початкового радіуса циліндра подана на рисунку 2, з якого видно, що кутова швидкість буде більшою за 35 рад/с для $\alpha = 30 - 35^\circ$ і $r_0 = 0,05 - 0,06$ м.

Вище були отримані рівняння руху частинки гички на гвинтовій поверхні в припущенні, що частинка рухається в дотичній площині. Таке припущення було можливе, оскільки вимагалось довести можливість транспортування гички шнековим гичкозрізувальним апаратом. Для аналізу і оптимізації параметрів гвинта потрібний точний розв'язок.

Задачу розв'яжемо в циліндричній системі координат r, φ, z , при цьому додатній напрямку кута прийнято проти годинникової стрілки (рисунок 3,а). У циліндричній системі координат проекції швидкості і прискорення виглядають так

$$\begin{aligned} V_r &= \dot{r}, & \omega_z &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ V_\varphi &= r\dot{\varphi}, & \omega &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \\ V_z &= \dot{z}, & \omega_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (22)$$

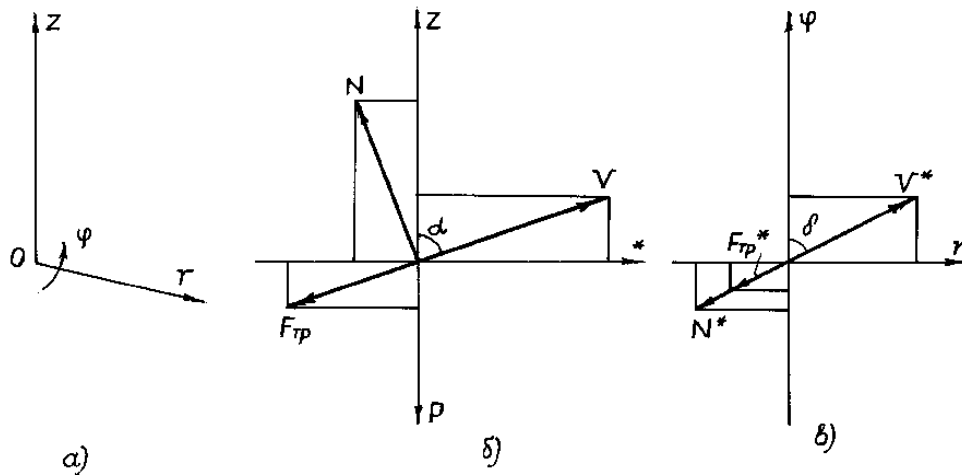


Рисунок 3. Розрахункові схеми дії сил на частинку гички.

Вектор швидкості визначатиметься довжиною $|\vec{V}|$ і напрямком, що задається двома кутами: α і δ , що зв'язані між собою і не є незалежними. Кут α - кут між \vec{V} і \vec{Z} , а кут δ - кут між проекцією швидкості \vec{V} на площину r, φ до $\vec{\varphi}$.

Точкова маса потрапляє на гвинтову поверхню, яка, в свою чергу, обертається рівномірно навколо своєї вісі з кутовою швидкістю ω . Задачі розв'яжемо за допомогою методу динаміки відносного руху. Розгляньмо відносну систему координат (r, φ, z)

$$V_a = V_{пер} + V_{eid}, \quad (23)$$

звідки можна визначити відносну швидкість

$$V_{eid}^0 = V_a^0 - V_{пер}^0, \quad \text{при } t = 0$$

в проекціях на осі координат

$$\begin{aligned} V_{eid,\varphi}^0 &= V_{a,\varphi}^0 - \omega r; \\ V_{eid,r}^0 &= V_{a,r}^0; \\ V_{eid,z}^0 &= V_{a,z}^0, \end{aligned} \quad (24)$$

при цьому $\ddot{\varphi} = \frac{V_{\text{від.}\varphi}^0}{r} = \frac{V_{a,\varphi} - \omega r}{r}$.

Якщо точка потрапляє на поверхню з початковою швидкістю, то

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{V_z}{V}; \sin \delta = \frac{V_z}{V_*}; \\ \cos \alpha &= \frac{V_r}{V}; \cos \delta = \frac{V_0}{V_*}. \end{aligned} \quad (25)$$

До рівняння відносного руху в правій частині входять проекції зовнішніх сил (реакція N , вага P , сила тертя F_{mp}), переносна і коріолісова сили інерції. Визначмо проекції всіх цих сил. Відповідно до рисунку 3,б маємо

$$\begin{cases} N_z = N \sin \alpha; F_{mp,z} = F_{mp} \cos \alpha; P_z = -P; \\ N_* = N \cos \alpha; |F_{mp,*}| = F_{mp} \sin \alpha; |P_*| = 0, \end{cases} \quad (26)$$

а відповідно до рисунку 3,в

$$\begin{aligned} N_r &= -N_* \sin \delta; F_{mp,r} = -F_{mp,*} \sin \delta; P_r = 0 \\ N_\varphi &= -N_* \cos \delta; F_{mp,\varphi} = -F_{mp,*} \cos \delta; P_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Переносна і коріолісова сили інерції відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} J_r &= 2m\omega^2 r; J_{kr} = 2m\omega V_\varphi \\ J_\varphi &= 0; J_{k\varphi} = -2m\omega V_r \\ J_z &= 0; J_{kz} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Рівняння руху частинки в проекціях на вісі координат з урахуванням визначених вище сил виглядатимуть так

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -N \cos \alpha \sin \delta - F_{mp} \sin \alpha \sin \delta + 2m\omega r \dot{\varphi} + 2m\omega^2 r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = -N \cos \alpha \cos \delta - F_{mp} \sin \alpha \cos \delta - 2m\omega \dot{r} \\ m\ddot{z} = N \sin \alpha - F_{mp} \cos \alpha - P \end{cases} \quad (29)$$

Виражаючи силу тертя через коефіцієнт тертя і нормальну реакцію, після перетворень отримаємо

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 + 2\omega r(\dot{\varphi} + \omega) - \frac{N}{m}(\cos \alpha + f \sin \alpha) \sin \delta \\ \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}}{r}(\varphi + \omega) - \frac{1}{r} \frac{N}{m}(\cos \alpha + f \sin \alpha) \cos \delta \\ \ddot{z} = \frac{N}{m}(\sin \alpha - f \cos \alpha) - g \end{cases} \quad (30)$$

де g - прискорення вільного падіння.

У системі (30) чотири невідомих - три координати і відношення $\frac{N}{m}$, для їх визначення необхідне четверте рівняння, яке дає рівняння гвинтової поверхні

$$z = a\varphi + br \quad (31)$$

де a, b - постійні коефіцієнти.

З виразу (31) отримаємо

$$\ddot{z} = a\ddot{\varphi} + b\ddot{r} \quad (32)$$

Система рівнянь (30) і (32) розв'язується методом зниження порядку похідної.

Для цього з третього рівняння системи (30) і з (32) визначаємо відношення $\frac{N}{m}$ і в

отриманий вираз замість $\ddot{\varphi}$ і \ddot{r} підставляємо їх значення з першого та другого рівнянь системи (30)

$$\frac{N}{m} = \frac{b \left[r \dot{\varphi}^2 + 2\omega r (\dot{\varphi} + \omega) \right] - a \left[\frac{2\dot{r}}{r} (\dot{\varphi} + \omega) \right] + q}{b[(\cos \alpha + f \sin \alpha) \sin \delta] + a \left[\frac{1}{r} (\cos \alpha + f \sin \alpha) \cos \delta + \sin \alpha - f \cos \alpha \right]} \quad (33)$$

До рівняння (33) потрібно додати перше та друге рівняння системи (30), тоді отримаємо

$$\begin{cases} \ddot{r} = \dot{r} \varphi^2 + 2\omega r (\dot{\varphi} + \omega) - \frac{N}{m} (\cos \alpha + f \sin \alpha) \sin \delta \\ \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}}{r} (\dot{\varphi} + \omega) - \frac{N}{mr} (\cos \alpha + f \sin \alpha) \cos \delta \end{cases} \quad (34)$$

Так отримані три рівняння з трьома невідомими, які розв'язували числовим методом Рунге-Кутта на персональному комп'ютері.

Висновки.

1. Теоретичні дослідження дозволяють спростити технологічний процес збирання гички цукрових буряків, безпосередньо об'єднавши технологічні операції зрізування і транспортування.

2. Вироблена математична модель руху гички на гвинтових поверхнях дозволяє оптимізувати конструктивні і кінематичні параметри удосконалених гичкозрізувальних апаратів.

The mathematical model of motion of sugar-beet tops over screw surface has been suggested in this article. The analysis of theoretical investigations has been pursued with the aim of optimisation of kinematical parameters.

Література

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. - К.: Изд-во УАСХН, 1960. - 283с.

Одержано 28.03.2000 р.