

УДК 621.9.06.–233.1

Ю.Данильченко, канд. техн. наук; С.Петров

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ЖОРСТКІСТЬ ПІДШИПНИКІВ ОПОР КОЧЕННЯ ВИСОКОТОЧНИХ ШВИДКОХІДНИХ ШПИНДЕЛЬНИХ ВУЗЛІВ

Розроблено математичну модель жорсткості комбіновано навантаженого неідеального радіально-упорного підшипника опори швидкохідного шпиндельного вузла. Як приклад розглянуто випадок ідеального радіально-упорного кулькового підшипника, що перебуває під дією осьового навантаження (попередній натяг Q_0). Розраховано характеристики жорсткості шпиндельного радіально-упорного кулькового підшипника серії VX30.9.CE1.TL фірми SNFA (Франція). Порівняно характеристики жорсткості та зміну кутів контакту в статистиці та при швидкому обертанні внутрішнього кільця.

Точність швидкохідних шпиндельних вузлів безпосередньо пов'язана з їх статичною та динамічною жорсткістю. Насамперед, це обумовлено суттєвим впливом зміни динамічних характеристик (власних частот) на формування рівня віброактивності шпиндельного вузла на робочих частотах обертання. Неідеальність виготовлення та монтажу підшипників опор шпинделя є основною причиною виникнення вимушених коливань шпинделя у широкому частотному діапазоні, отже, і розмежування частот вимушених і власних коливань шпинделя потребує сумісного розв'язку задач точності обертання вісі шпинделя та жорсткості шпиндельного вузла загалом.

Найбільша частка в балансі пружних переміщень переднього кінця шпинделя належить підшипникам його опор. Так, згідно з [1] деформації передньої опори становлять 40-50% загального переміщення, задньої – 2-3%, а консольної частини шпинделя – тільки 15-20%. Крім того, жорсткість підшипників не тільки має, як правило, нелінійну характеристику, але й залежить від багатьох факторів конструктивного, технологічного та функціонального характеру. Тому визначення характеристик жорсткості підшипників опор шпинделя з урахуванням як точності їх виготовлення та монтажу, так і комплексу силових дій різного фізичного походження, є основою для оцінки точності шпиндельного вузла загалом.

Жорсткість підшипників опор швидкохідних шпиндельних вузлів насамперед визначається дією зовнішнього комбінованого навантаження та відцентрових сил. І хоч, як правило, вважають, що динамічна жорсткість не залежить від частоти обертання і дорівнює статичній [1], зміна жорсткості навіть на 5-15% на високих частотах обертання, що характерно для сучасних радіально-упорних підшипників серії 36900 [1], може привести до значних змін спектру вібрацій шпинделя внаслідок суміщення власних частот з певними частотами вимушених коливань. Отже, врахування дії відцентрових сил при розрахунку жорсткості підшипників опор та шпиндельного вузла загалом є питанням не стільки забезпечення заданої жорсткості,

скільки забезпечення максимально можливої точності для заданих умов роботи шпиндельного вузла.

Розроблена математична модель жорсткості неідеального радіально-упорного підшипника опори швидкохідного шпиндельного вузла, що перебуває під дією комбінованого навантаження, ґрунтується на основних положеннях робіт [2] і [3]. У них впроваджено поняття “приведеного” підшипника, тобто підшипника з ідеальною геометрією кілець та тіл кочення, але із взаєморозміщенням кілець, що відповідає положенню кілець неідеального комбіновано навантаженого підшипника. Відхилення від номінального значення діаметра кульки приведенного підшипника в i -й контактній групі є характеристикою похибки даної контактної групи. Ця похибка складається з двох незалежних частин. Перша характеризує неідеальність виготовлення та монтажу підшипника в опорі шпиндельного вузла (початковий контакт кульки з кільцями), друга – загальну деформацію кульки від дії зовнішнього комбінованого навантаження у статиці.

Оскільки при швидкому обертанні внутрішнього кільця підшипника на кульки додатково буде діяти відцентрова сила, то їх просторове положення трохи відрізняться від статичного.

Розглянемо ряд послідовних положень кульки i -ї контактної групи приведенного підшипника для випадків початкового контакту в статиці [2] та комбінованого навантаження при обертанні внутрішнього кільця.

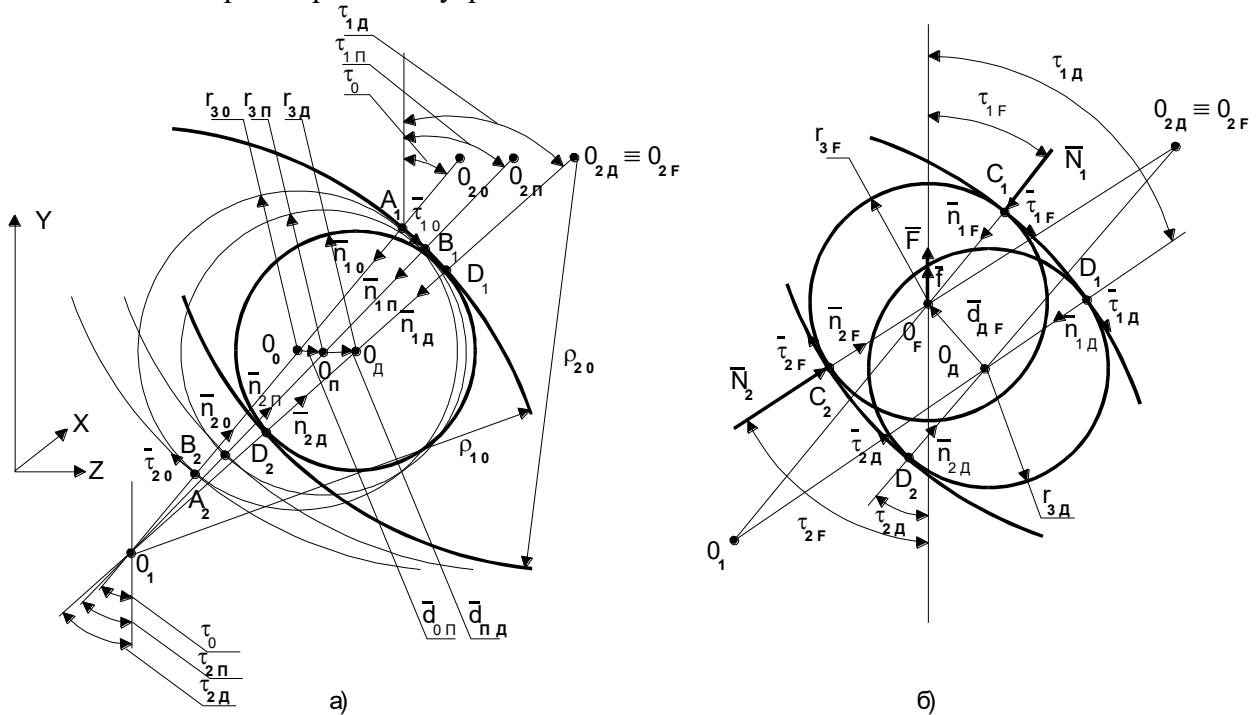


Рис. 1. Послідовні положення кульки i -ї контактної групи приведенного підшипника.

Для вказаних випадків положення центру внутрішнього кільця за відношенням до його номінального (ідеального) стану визначається векторами $\mathbf{h}_n = (\Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n, 1)^T$ та $\mathbf{h}_s = (\Delta x_s, \Delta y_s, \Delta z_s, 0)^T$, де $\mathbf{h}_s = \mathbf{h}_n + \mathbf{h}_F$ і $\mathbf{h}_F = (\Delta x_F, \Delta y_F, \Delta z_F, 0)^T$. При цьому центр кульки i -ї контактної групи займатиме такі положення (рис.1): O_0^i – для випадку ідеального підшипника (номінальний стан), O_n^i – у стані початкового контакту при відсутності навантажень, O_F^i – у стані комбінованого навантаження при обертанні внутрішнього кільця. Оскільки при обертанні на робочих частотах кулька зміщується впоперек жолоба, утвореного доріжками кочення кілець (рис.1б), то додатково впровадимо поняття перехідної кульки, тобто кульки, діаметр якої визначається взаємоположенням кілець і відповідає зміщенню внутрішнього кільця \mathbf{h}_F відносно

початкового стану (0_{II}^i). Згідно з [2] перехідна кулька є кулькою максимального діаметру для заданого положення кілець. Положення центру цієї кульки позначимо 0_{D}^i , а стан визначимо як додатковий (нижній індекс D). Далі верхній індекс, що визначає номер контактної групи, вказувати не будемо.

Точки контакту кульки із зовнішнім і внутрішнім кільцями для вказаних станів позначимо відповідно через A_1, B_1, C_1, D_1 і A_2, B_2, C_2, D_2 . Кути контакту кульки із зовнішнім кільцем позначимо через τ_{1C} , із внутрішнім кільцем - через τ_{2C} , де другий нижній індекс $C=0, II, F, D$ вказує на належність до відповідного стану. За додатній напрям вважаємо напрям збільшення номінальних значень (τ_{10}, τ_{20}) кутів контакту. Крім того, за кожною точкою контакту закріпимо відповідний локальний базис із взаємоортогональних одиничних векторів $n_{rC}, \theta_{rC}, \tau_{rC}$, що є векторними функціями точки контакту на поверхні доріжки кочення зовнішнього (перший нижній індекс $r=1$) та внутрішнього ($r=2$) кілець. Радіус кульки відповідно позначимо через r_{3C} . За додатній напрям зміни радіуса кульки вважаємо напрям збільшення номінального розміру r_{30} .

Просторове зміщення центру внутрішнього кільця характеризується незмінним положенням центру кривизни 0_1 доріжки кочення нерухомого зовнішнього кільця і зміною положення центру кривизни 0_{2C} доріжки кочення внутрішнього кільця (рис. 1а). Оскільки згідно з [1] приведений підшипник характеризується ідеальною геометрією контактуючих елементів, то радіуси кривизни доріжок кочення відповідно позначимо через ρ_{10} і ρ_{20} . Векторні функції точок контакту (B_r, C_r, D_r) на поверхнях доріжок кочення кілець при їх малих зміщеннях відносно номінального положення (A_r) визначаються залежностями [2]:

для зовнішнього кільця

$$\bar{n}_{1C} = \bar{n}_{10} - \Delta\tau_{1C} \cdot \bar{\tau}_{10}, \quad \bar{\tau}_{1C} = \bar{\tau}_{10} + \Delta\tau_{1C} \cdot \bar{n}_{10}, \quad \bar{\theta}_{1C} = \bar{\theta}_{10}. \quad (1a)$$

для внутрішнього кільця

$$\begin{aligned} \bar{n}_{2C} &= -\bar{n}_{10} + \Delta\tau_{2C} \cdot \bar{\tau}_{10} + \Delta\theta_{2C} \cdot \cos \tau_0 \cdot \bar{\theta}_{10}, \\ \bar{\tau}_{2C} &= -\bar{\tau}_{10} - \Delta\tau_{2C} \cdot \bar{n}_{10} + \Delta\theta_{2C} \cdot \sin \tau_0 \cdot \bar{\theta}_{10}, \\ \bar{\theta}_{2C} &= \bar{\theta}_{10} - \Delta\theta_{2C} \cdot \bar{k}, \quad \text{де } \bar{k} = (\cos \tau_0, \sin \tau_0, 0, 0)^T. \end{aligned} \quad (16)$$

для номінального положення кілець

$$\bar{n}_{20} = -\bar{n}_{10}, \quad \bar{\tau}_{20} = -\bar{\tau}_{10}, \quad \bar{\theta}_{20} = \bar{\theta}_{10}. \quad (2a)$$

$$\bar{n}_{10} = \begin{bmatrix} -\cos\tau_0 \cdot \cos\theta_0 \\ -\cos\tau_0 \cdot \sin\theta_0 \\ -\sin\tau_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau}_{10} = \begin{bmatrix} -\sin\tau_0 \cdot \cos\theta_0 \\ -\sin\tau_0 \cdot \sin\theta_0 \\ \cos\tau_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta}_{10} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(2б)

де θ_0 – кутове положення кульки ідеального підшипника відносно вісі OX у площині XOY системи координат зовнішнього кільця.

Згідно з прийнятими додатними напрямками, для всіх положень вважатимемо:

$$\Delta\tau_{rC} = \tau_{rC} - \tau_0, \quad \Delta r_{3C} = r_{30} - r_{3C}. \quad (3)$$

Для визначення вектора зміщення центру кульки відносно номінального положення (0_0) запишемо векторні рівняння:

$$\begin{aligned} \overline{0_0 0_{II}} &= \bar{d}_{II} = -\bar{n}_{10} \cdot r_{30} + \overline{A_1 B_1} + \bar{n}_{1II} \cdot r_{3II}, \\ \overline{0_0 0_D} &= \bar{d}_D = -\bar{n}_{10} \cdot r_{30} + \overline{A_1 C_1} + \bar{n}_{1D} \cdot r_{3D}. \end{aligned} \quad (4)$$

Позначимо вектори: $A_1 B_1 = \Delta r_{1II}$, $A_1 C_1 = \Delta r_{1D}$.

Для малих зміщень центру кульки відносно номінального положення для початкового (П) та додаткового (Д) станів (С) у першому наближенні маємо:

$$\Delta \bar{r}_{1C} = \rho_{10} \cdot \Delta \tau_{1C} \cdot \bar{\tau}_{10} . \quad (5)$$

Тоді з урахуванням залежностей (1) у першому наближенні отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{\Pi} &= -\Delta r_{3\Pi} \cdot \bar{n}_{10} + (\rho_{10} - r_{30}) \cdot \Delta \tau_{1\Pi} \cdot \bar{\tau}_{10} , \\ \bar{d}_{Д} &= -\Delta r_{3Д} \cdot \bar{n}_{10} + (\rho_{10} - r_{30}) \cdot \Delta \tau_{1Д} \cdot \bar{\tau}_{10} . \end{aligned} \quad (6)$$

Вектор зміщення центру кульки додаткового стану відносно положення у стані початкового контакту визначається залежністю:

$$\overline{0_{\Pi}0_{Д}} = \bar{d}_{\PiД} = -(\Delta r_{3Д} - \Delta r_{3\Pi}) \cdot \bar{n}_{10} + (\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{1Д} - \Delta \tau_{1\Pi}) \cdot \bar{\tau}_{10} , \quad (7)$$

де Δr_{3C} і $\Delta \tau_{1C}$ для початкового та додаткового станів визначаються залежностями [1]:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Delta r_{3C} &= a_{0C} + B_C \cdot \sin \theta_0 + D_C \cdot \cos \theta_0 , \\ \text{де } B_C &= \alpha_C \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + \Delta y_C \cdot \cos \tau_0 , \\ D_C &= -\beta_C \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + \Delta x_C \cdot \cos \tau_0 , \\ a_{0C} &= \Delta z_C \cdot \sin \tau_0 , \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\Delta \tau_{1C} = \frac{\Delta z_C - 2 \cdot \Delta r_{3C} \cdot \sin \tau_0 + (H_{20} + \rho_{20}) \cdot (\alpha_C \cdot \sin \theta_0 - \beta_C \cdot \cos \theta_0)}{(\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}) \cdot \cos \tau_0} , \quad (8б)$$

де α_C , β_C - малі кути повороту внутрішнього кільця підшипника навколо вісей X та Y відповідно.

Відповідний вектор зміщення центру внутрішнього кільця має значення:

$$\bar{h}_{\PiД} = \bar{h}_{Д} - \bar{h}_{\Pi} = [\Delta x_{Д} - \Delta x_{\Pi}, \Delta y_{Д} - \Delta y_{\Pi}, \Delta z_{Д} - \Delta z_{\Pi}, 0]^T = [\Delta x_{F}, \Delta y_{F}, \Delta z_{F}, 0]^T = \bar{h}_{F} . \quad (9)$$

Окремо розглянемо положення центру 0_F кульки відносно додаткового стану ($0_{Д}$). Це положення визначається вектором $0_{Д}0_F = \mathbf{d}_{DF}$ (рис. 1б). У даному випадку положення центрів кривизни доріжок кочення кілець визначаються координатами точок 0_1 і $0_{2F} = 0_{2Д}$. Вектор \mathbf{d}_{DF} можна визначити двома незалежними векторними рівняннями:

$$\bar{d}_{DF} = (\rho_{10} - r_{3Д}) \cdot \bar{n}_{1Д} - (\rho_{10} - r_{3F}) \cdot \bar{n}_{1F} , \quad (10a)$$

$$\bar{d}_{DF} = (\rho_{20} - r_{3Д}) \cdot \bar{n}_{2Д} - (\rho_{20} - r_{3F}) \cdot \bar{n}_{2F} . \quad (10б)$$

З тотожності рівнянь (10a) і (10б), врахувавши залежності (1), у першому наближенні отримаємо:

$$2 \cdot (\Delta r_{3F} - \Delta r_{3Д}) \cdot \bar{n}_{10} = ((\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{1F} - \Delta \tau_{1Д}) - (\rho_{20} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{2Д} - \Delta \tau_{2F})) \cdot \bar{\tau}_{10} . \quad (11)$$

Оскільки одиничні вектори \mathbf{n}_{10} і $\mathbf{\tau}_{10}$ взаємоортогональні, то рівняння (11) має розв'язок тільки при умові рівності нулеві коефіцієнтів цих векторів:

$$2 \cdot (\Delta r_{3F} - \Delta r_{3Д}) = 0 , \quad (12a)$$

$$(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{1F} - \Delta \tau_{1Д}) - (\rho_{20} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{2Д} - \Delta \tau_{2F}) = 0 , \quad (12б)$$

звідки отримаємо залежності зміни кутів контакту та радіусу кульки при переході із додаткового положення (Д) у положення, що відповідає станові комбінованого навантаження при обертанні внутрішнього кільця (F):

$$\Delta r_{3F} = \Delta r_{3D} , \quad (13a)$$

$$\Delta \tau_{2F} = (\Delta \tau_{1D} - \Delta \tau_{1F}) \cdot \frac{(\rho_{10} - r_{30})}{(\rho_{20} - r_{30})} + \Delta \tau_{2D} , \quad (13б)$$

де згідно з [2]

$$\Delta \tau_{2D} = \Delta \tau_{1D} - (\alpha_D \cdot \sin \theta_0 - \beta_D \cdot \cos \theta_0) . \quad (13 в)$$

Отже, при малому зміщенні кульки впоперек жолоба, утвореного доріжками кочення кілець, змінюються тільки кути контакту кульки з кільцями, а діаметр кульки майже не змінюється. Для перевірки цього твердження було виконано розрахунок у другому наближенні для спрощеного випадку, тобто при умові $\Delta \tau_{1D} = \Delta \tau_{2D} = 0$ і отримано таку залежність:

$$\Delta r_{3F} - \Delta r_{3D} = \frac{1}{4} \cdot (\Delta \tau_{2F}^2 \cdot (\rho_{20} - r_{30}) + \Delta \tau_{1F}^2 \cdot (\rho_{10} - r_{30})) \approx 0 . \quad (13г)$$

Тоді з урахуванням залежностей (13) перепишемо залежність (10а):

$$\bar{d}_{DF} = (\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{1F} - \Delta \tau_{1D}) \cdot \bar{\tau}_{10} . \quad (14)$$

Сумарне зміщення центру кульки від початкового положення з урахуванням залежностей (7) і (14):

$$\bar{d}_{IF} = \bar{d}_{ID} + \bar{d}_{DF} = -(\Delta r_{3D} - \Delta r_{3I}) \cdot \bar{n}_{10} + (\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{1F} - \Delta \tau_{1I}) \cdot \bar{\tau}_{10} . \quad (15)$$

Для визначення прирощення $\Delta \tau_{1F}$ номінального значення кута контакту кульки із зовнішнім кільцем запишемо умову рівноваги контактної групи, враховуючи тільки нормальні контактні сили N_1, N_2 і відцентрову силу $F_{Ц}$ (рис. 1б):

$$N_1 \cdot \bar{n}_{1F} + N_2 \cdot \bar{n}_{2F} + F_{Ц} \cdot \bar{f} = 0 , \quad \text{де } \bar{f} = (\cos \theta_0, \sin \theta_0, 0, 0)^T , \quad (16)$$

або з урахуванням залежностей (1):

$$(N_1 - N_2) \cdot \bar{n}_{10} - (N_1 \cdot \Delta \tau_{1F} - N_2 \cdot \Delta \tau_{2F}) \cdot \bar{\tau}_{10} + N_2 \cdot \Delta \theta_{2F} \cdot \cos \theta_0 \cdot \bar{\theta}_{10} + F_{Ц} \cdot \bar{f} = 0 . \quad (17а)$$

Оскільки вектори \bar{f}, \bar{n}_{10} і $\bar{\tau}_{10}$ лежать в одній площині, а вектор $\bar{\theta}_{10}$ у площині перпендикулярній до вище вказаної, то дійсне рівняння рівноваги виглядатиме:

$$(N_1 - N_2) \cdot \bar{n}_{10} - (N_1 \cdot \Delta \tau_{1F} - N_2 \cdot \Delta \tau_{2F}) \cdot \bar{\tau}_{10} + F_{Ц} \cdot \bar{f} = 0 . \quad (17б)$$

Відкинута складова векторного рівняння (17а) характеризує силу, спрямовану на подолання сил тертя кочення, які в даній постановці задачі не враховуються.

З урахуванням залежностей (2б) і (16) запишемо векторне рівняння (17б) у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{aligned} -(N_1 - N_2) \cdot \cos \tau_0 \cdot \cos \theta_0 + (N_1 \cdot \Delta \tau_{1F} - N_2 \cdot \Delta \tau_{2F}) \cdot \sin \tau_0 \cdot \cos \theta_0 + F_{Ц} \cdot \cos \theta_0 &= 0 , \\ -(N_1 - N_2) \cdot \cos \tau_0 \cdot \sin \theta_0 + (N_1 \cdot \Delta \tau_{1F} - N_2 \cdot \Delta \tau_{2F}) \cdot \sin \tau_0 \cdot \sin \theta_0 + F_{Ц} \cdot \sin \theta_0 &= 0 , \\ -(N_1 - N_2) \cdot \sin \tau_0 - (N_1 \cdot \Delta \tau_{1F} - N_2 \cdot \Delta \tau_{2F}) \cdot \cos \tau_0 &= 0 . \end{aligned} \quad (17в)$$

Як видно, перші два рівняння тотожні, отже, розв'язком системи рівнянь (17в) є знаходження нормальних контактних сил N_1, N_2 як функцій відцентрової сили $F_{Ц}$ та кутів контактів τ_{1F} і τ_{2F} кульки з кільцями:

$$N_1 = F_{Ц} \cdot \frac{\sin \tau_0 + \Delta \tau_{2F} \cdot \cos \tau_0}{\Delta \tau_{2F} - \Delta \tau_{1F}} , \quad N_2 = F_{Ц} \cdot \frac{\sin \tau_0 + \Delta \tau_{1F} \cdot \cos \tau_0}{\Delta \tau_{2F} - \Delta \tau_{1F}} , \quad (18а)$$

або

$$N_r = k_r \cdot F_{II} \cdot \frac{\sin \tau_0}{\Delta \tau_{2F} - \Delta \tau_{1F}}, \quad (18б)$$

де коефіцієнти k_r обчислюються за залежностями:

$$k_1 = \Delta \tau_{2F} \cdot ctg \tau_0 + 1, \quad k_2 = \Delta \tau_{1F} \cdot ctg \tau_0 + 1. \quad (18г)$$

Використаємо залежності (18б) і (18г) для розрахунку контактних деформацій кульки. Величина деформації ω у зоні контакту кульки із зовнішнім ($r=1$) та внутрішнім ($r=2$) кільцями, згідно з теорією контактних напружень Г.Герца [4], розраховується за залежностями:

$$\omega_r = c_r \cdot d_3^{-1/3} \cdot N_r^{2/3}, \quad \text{або} \quad \omega_r = K_{Gr}^{-2/3} \cdot N_r^{2/3}, \quad \text{де} \quad K_{Gr} = d_3^{1/2} \cdot c_r^{-3/2}, \quad (19)$$

де c_r – коефіцієнти, що враховують пружні властивості та макрогеометрію контактуючих поверхонь; d_3 – діаметр кульки; K_{Gr} – коефіцієнти Герца.

Сумарна деформація ω кульки з урахуванням залежностей (18) і (19) виглядатиме так:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = K'_G{}^{-2/3} \cdot (F_{II} \cdot \sin \tau_0)^{2/3} \cdot (\Delta \tau_{2F} - \Delta \tau_{1F})^{-2/3}, \quad (20)$$

де $K'_G = \frac{K_{G1} \cdot K_{G2}}{(k_2^{2/3} \cdot K_{G1}^{2/3} + k_1^{2/3} \cdot K_{G2}^{2/3})^{3/2}}$ і для $k_1=k_2=1$, згідно з [4], $K'_G = K_G$.

З отриманого виразу (20) з урахуванням (13б) знайдемо залежність прирощення $\Delta \tau_{1F}$ номінального кута контакту кульки із зовнішнім кільцем як функцію відцентрової сили F_{II} та сумарної контактної деформації ω кульки:

$$\Delta \tau_{1F} = - \left(\frac{F_{II} \cdot \sin \tau_0}{K'_G \cdot \omega^{1.5}} + (\alpha_F \cdot \sin \theta_0 - \beta_F \cdot \cos \tau_0) \right) \cdot \frac{\rho_{20} - r_{30}}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}} + \Delta \tau_{1D}. \quad (21)$$

Тоді залежність (15) виглядатиме так:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{1F} &= - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \bar{n}_{10} + (\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{1D} - \Delta \tau_{1II}) \cdot \bar{\tau}_{10} - \left(\frac{F_{II} \cdot \sin \tau_0}{K'_G \cdot \omega^{1.5}} + \right. \rightarrow \\ &\rightarrow \left. + (\alpha_F \cdot \sin \theta_0 - \beta_F \cdot \cos \theta_0) \right) \cdot \frac{(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\rho_{20} - r_{30})}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}} \cdot \bar{\tau}_{10}, \end{aligned} \quad (22)$$

де $\Delta r_{3Д}$ та $\Delta r_{3П}$ визначаються залежностями 8а і $(\Delta r_{3Д} - \Delta r_{3П})=0,5 \omega$ згідно з [3].

Потенційна енергія i -ї контактної групи (II^i) відповідає сумі робіт внутрішніх (N_1 , N_2) та зовнішніх (F_{II}) сил при переміщенні кульки із стану II у стан F (рис.1), а потенційна енергія підшипника (II_{Σ}) – сумі потенційних енергій всіх контактних груп. Отже, з урахуванням залежностей (22) і (16) та виразу для потенційної енергії II_e^i , нагромадженої при деформуванні i -ї кульки з кільцями [4], отримаємо:

$$\begin{aligned} II_{\Sigma} &= \sum_{i=1}^n (II_B^i - \bar{F}_{II}^i \cdot \bar{d}_{1F}^i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{5} \cdot K_G \cdot \omega^{i2,5} - F_{II}^i \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \omega^i \cdot \cos \tau_0 - (\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\Delta \tau_{1D}^i - \Delta \tau_{1II}^i) \cdot \right. \right. \rightarrow \\ &\rightarrow \left. \cdot \sin \tau_0 + \left(\frac{F_{II}^i \cdot \sin \tau_0}{K'_G \cdot \omega^{i1,5}} + (\alpha_F^i \cdot \sin \theta_0^i - \beta_F^i \cdot \cos \theta_0^i) \right) \cdot \frac{(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\rho_{20} - r_{30})}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}} \cdot \sin \tau_0 \right), \end{aligned} \quad (23)$$

де n – число контактних груп підшипника.

Рівняння рівноваги для підшипника для випадку комбінованого навантаження виглядають [4]:

$$\frac{\partial \Pi_{\Sigma}}{\partial \Delta x_F} - P_X = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{\Sigma}}{\partial \Delta y_F} - P_Y = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{\Sigma}}{\partial \Delta z_F} - P_Z = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{\Sigma}}{\partial \alpha_F} - M_X = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{\Sigma}}{\partial \beta_F} - M_Y = 0, \quad (24)$$

а складові матриці жорсткості [4]:

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi_{\Sigma}}{\partial q_i \partial q_j}, \quad (25)$$

де $q_{i(j)}$ – складові вектора $\mathbf{q}_F = (\Delta x_F, \Delta y_F, \Delta z_F, \alpha_F, \beta_F)^T$ узагальненої похибки положення внутрішнього кільця від дії комбінованого навантаження, що визначається вектором $\mathbf{P} = (P_X, P_Y, P_Z, M_X, M_Y)^T$ узагальненого зусилля.

Для залежностей (23-25) необхідно зауважити, що число контактних груп n загалом може бути меншим від числа тіл кочення в підшипнику. Наявність або відсутність контакту враховується так [3]:

$$\Pi_B^i = \begin{cases} 0 & \text{при } 2 \cdot \Delta r_{3F}^i > \Delta_k^i, \\ \Pi_B^i & \text{при } 2 \cdot \Delta r_{3F}^i \leq \Delta_k^i, \end{cases} \quad (26)$$

де Δ_k^i – узагальнена похибка i -ї контактної групи, викликана неідеальністю виготовлення та монтажу підшипника опори шпиндельного вузла [2,3].

Для прикладу розглянемо випадок ідеального радіально-упорного кулькового підшипника, що перебуває під дією осьового навантаження (попередній натяг Q_0). У цьому випадку вектори узагальненої похибки та узагальненого зусилля виглядатимуть: $\mathbf{q}_F = (0, 0, \Delta z_F, 0, 0)^T$, $\mathbf{q}_{II} = (0, 0, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{P} = (0, 0, Q_0, 0, 0)^T$.

Знайдемо залежності для розрахунку пружної осьової характеристики підшипника $Q_0 = Q_0(\Delta z_F, F_{II})$ та осьової $\kappa_{ZZ} = \kappa_{ZZ}(\Delta z_F, F_{II})$ і радіальної $\kappa_{YY} = \kappa_{YY}(\Delta z_F, F_{II})$ жорсткостей.

Оскільки складові $\Delta \tau_{IC}^i$ і ω^i виразу (23) функціонально залежні (8, 9) від складових вектора \mathbf{q}_F , то попередньо визначимо значення необхідних часткових похідних. Для заданих початкових умов з урахуванням $(\Delta r_{3I}^i - \Delta r_{3II}^i) = 0,5 \omega$ отримаємо:

$$\frac{\partial \omega^i}{\partial \Delta z_F} = \sin \tau_0, \quad \frac{\partial \omega^i}{\partial \Delta y_F} = \cos \tau_0 \cdot \cos \theta_0^i, \quad \omega^i = \Delta z_F \cdot \sin \tau_0, \quad (27)$$

$$\Delta \tau_{ID}^i - \Delta \tau_{II}^i = \frac{\Delta z_F - \omega^i \cdot \sin \tau_0}{(\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}) \cdot \cos \tau_0}.$$

Тоді вираз (23) для потенційної енергії Π_{Σ} підшипника виглядатиме:

$$\Pi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{5} \cdot K_{\Gamma} \cdot \omega^{i2,5} - F_{II}^i \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \omega^i \cdot \cos \tau_0 - \frac{(\Delta z_F - \omega^i \cdot \sin \tau_0) \cdot (\rho_{10} - r_{30})}{(\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}) \cdot \cos \tau_0} \cdot \sin \tau_0 \right) - \right. \rightarrow$$

$$\left. - \frac{F_{II}^{i2} \cdot \sin^2 \tau_0}{K'_{\Gamma} \cdot \omega^{i1,5}} \cdot \frac{(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\rho_{20} - r_{30})}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}} \right). \quad (28)$$

Середнім членом виразу (27) можна знехтувати, оскільки для заданих початкових умов при $\rho_{10} = \rho_{20}$ він дорівнює нулеві. Отже, остаточно вираз для потенційної енергії Π_{Σ} ідеального швидкохідного радіально-упорного кулькового підшипника, навантаженого осьовим зусиллям Q_0 , такий:

$$\Pi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{5} \cdot K_{\Gamma} \cdot \omega^{i2,5} - \frac{F_{\Pi}^{i2} \cdot \sin^2 \tau_0}{K'_{\Gamma} \cdot \omega^{i1,5}} \cdot \frac{(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\rho_{20} - r_{30})}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}} \right). \quad (29)$$

Відповідно вирази для:
пружної осьової характеристики підшипника Q_0

$$Q_0 = \frac{\partial \Pi_{\Sigma}}{\partial \Delta z_F} = n \cdot \left(K_{\Gamma} \cdot \Delta z_F^{1,5} \cdot \sin^{2,5} \tau_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{F_{\Pi}^{i2} \cdot \sin^{0,5} \tau_0}{K'_{\Gamma} \cdot \Delta z_F^{2,5}} \cdot \frac{(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\rho_{20} - r_{30})}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}} \right), \quad (30)$$

осьової жорсткості

$$\kappa_{ZZ} = \frac{\partial^2 \Pi_{\Sigma}}{\partial \Delta z_F^2} = n \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot K_{\Gamma} \cdot \Delta z_F^{0,5} \cdot \sin^{2,5} \tau_0 - \frac{15}{4} \cdot \frac{F_{\Pi}^{i2} \cdot \sin^{0,5} \tau_0}{K'_{\Gamma} \cdot \Delta z_F^{3,5}} \cdot \frac{(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\rho_{20} - r_{30})}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}} \right), \quad (31)$$

радіальної жорсткості

$$\begin{aligned} \kappa_{YY} &= \frac{\partial^2 \Pi_{\Sigma}}{\partial \Delta y_F^2} = n \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot K_{\Gamma} \cdot \Delta z_F^{0,5} \cdot \sin^{0,5} \tau_0 \cdot \cos^2 \tau_0 - \frac{15}{8} \cdot \frac{F_{\Pi}^{i2} \cdot \cos^2 \tau_0}{K'_{\Gamma} \cdot \Delta z_F^{3,5} \cdot \sin^{1,5} \tau_0} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{(\rho_{10} - r_{30}) \cdot (\rho_{20} - r_{30})}{\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}}. \end{aligned} \quad (32)$$

На основі отриманих залежностей (30-32) розраховано характеристики жорсткості шпindelного радіально-упорного кулькового підшипника серії VX30.9.CE1.TL фірми SNFA (Франція), аналогами якого є підшипники 2-36106K (Росія) та B706.C.TPA.T9.UL фірми FAG (Німеччина). Ці підшипники широко використовуються при виготовленні шліфувальних головок типу ВШГ внутрішшліфувальних верстатів. Основні параметри [5]: габаритні розміри $d \times D \times B = 30 \times 55 \times 13$ мм, кут контакту $\tau_0 = 15^\circ$, діаметр кульки $d_3 = 6,747$ мм, число кульок $Z=13$, радіуси кривизни доріжок кочення $\rho_{10} = \rho_{20} = 3,455$ мм, максимальна частота обертання внутрішнього кільця при змащуванні масляним туманом $n_e = 45000$ хв⁻¹, мінімальний натяг для отримання максимальної швидкості $Q_0 = 380$ Н.

Значення відцентрової сили F_{Π} обчислюються за залежністю [6]:

$$F_{\Pi} = 2,26 \cdot 10^{-11} \cdot d_3^3 \cdot D_{\Pi} \cdot n_0^2, \quad H, \quad (33)$$

де n_0 – частота обертання сепаратора, хв⁻¹; D_{Π} – діаметр розміщення центрів кульок, мм.

Вони визначаються за залежностями [6]:

$$n_0 = 0,5 \cdot n_B \cdot \left(1 - \frac{d_3}{D_{\Pi}} \cdot \cos \tau_0 \right), \quad D_{\Pi} = 0,5 \cdot (D + d). \quad (34)$$

Результати розрахунків подано на рис. 2 – 4.

Рис. 2. Залежність характеристик жорсткості та значень кутів контакту від попереднього осьового натягу.

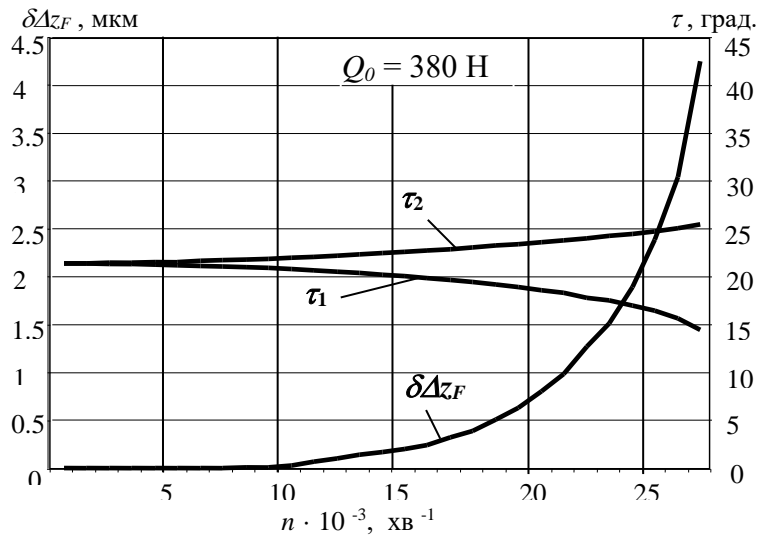
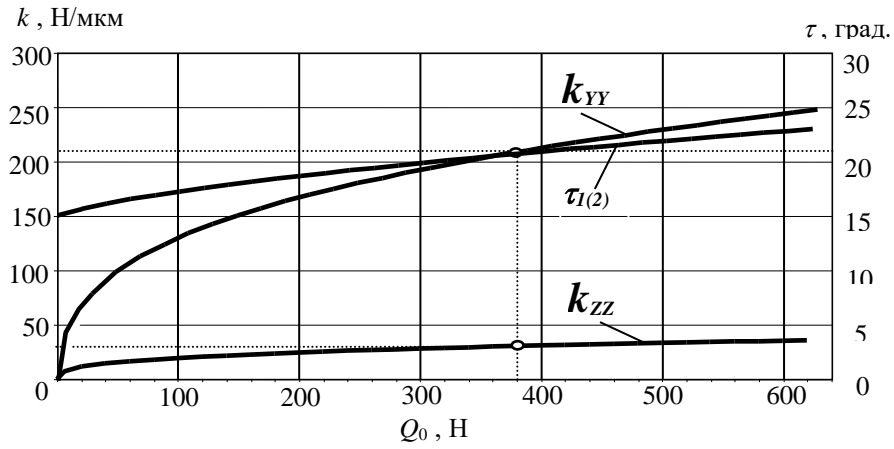


Рис. 3. Залежність значень кутів контакту та осьового зміщенням внутрішнього кільця від частоти обертання підшипника.

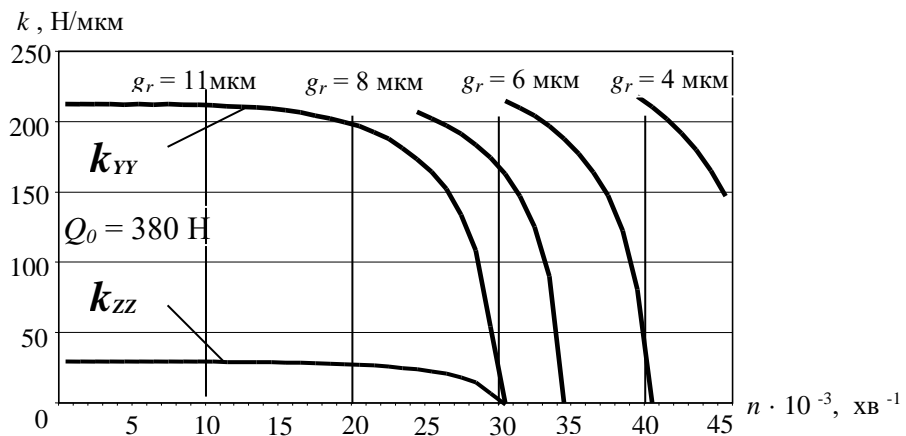


Рис. 4. Залежність характеристик жорсткості від частоти обертання підшипника.

Як видно, значення фактичного кута контакту кульки із зовнішнім (τ_1) і внутрішнім (τ_2) кільцями суттєво залежить як від величини попереднього натягу (Q_0), так і від частоти обертання (n_6) внутрішнього кільця. У статиці (рис.2) при $Q_0 = 380$ Н, $\tau_1 = \tau_2 = 21,35^\circ$. Із збільшенням частоти обертання n_6 , τ_1 зменшується, а τ_2 збільшується (рис.3). Для $n_6 = 25000$ хв⁻¹, $\tau_1 = 17,49^\circ$ а $\tau_2 = 24,25^\circ$. Крім цього, збільшення частоти обертання n_6 супроводжується осьовим зміщенням внутрішнього кільця (ефект “розсування кілець”) відносно положення у статиці і для $n_6 = 25000$ хв⁻¹ це зміщення сягає $\Delta z_F = 1,51$ мкм. Щодо радіальної k_{YY} та осьової k_{ZZ} жорсткостей, результати обчислень свідчать про їх зменшення із зростанням частоти обертання n_6 . У статиці (рис.4) при $Q_0 = 380$ Н: $k_{YY} = 212$ Н/мкм, $k_{ZZ} = 30,5$ Н/мкм. На частоті обертання $n_6 = 24000$ хв⁻¹ жорсткість спадає на 15%. При $n_6 = 31000$ хв⁻¹ внутрішні і зовнішні потенційні сили врівноважуються, тобто підшипник розвантажується ($k_{YY} = k_{ZZ} = 0$). Такі результати можна пояснити тим, що у даній математичній моделі не враховується товщина мастильної плівки у зонах контакту і зміна характеристик контактних груп внаслідок температурних деформацій. Отже, і використовувати дану модель можна тільки при малих надлишкових температурах, тобто у межах частот обертання, що відповідають 15% спадові жорсткості підшипника. За межами цього діапазону починається проковзування кульок, інтенсивне тепловиділення і, відповідно, зміна характеристик контактних груп, тобто зменшення початкового радіального зазору g_r . Як видно із рис.4, досягти граничної межі частоти обертання $n_6 = 45000$ хв⁻¹ можна, якщо початковий радіальний зазор g_r буде меншим від 4 мкм. Отже, для надвисоких частот обертання обчислення характеристик жорсткості підшипника має здійснюватись із урахуванням температурних деформацій елементів підшипника.

Mathematical stiffness model of joint loaded non-ideal angular contact bearing of the high-speed spindle unit support has been developed. Case of ideal angular contact ball bearing loaded with axial force (preload Q_0) is taken as an example. Stiffness characteristics of spindle angular contact ball bearing VX30.9.CE1.TL series by SNFA (France) were calculated. Comparison of stiffness characteristics and contact angle changes for static loading and for high speed inner ring rotation is given.

Література

1. Проектирование металлорежущих станков и станочных систем: Справочник-учебник. В 3-х т. Т.2. Ч 1. Расчет и конструирование узлов и элементов станков / Под общ. ред. А.С.Проникова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана: Машиностроение, 1995. – 371 с.
2. Данильченко Ю.М. Початкове зміщення внутрішнього кільця радіально-упорного підшипника опори шпиндельного вузла. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2000. - Том 5. - № 1. – С. 35-45.
3. Данильченко Ю.М. Статика неідеального радіально-упорного кулькового підшипника опори шпиндельного вузла. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2000. - Том 5. - № 2. – С. 33-38.
4. Журавлев В.Ф., Бальмонт В.Б. Механика шарикоподшипников гироскопов. – М.: Машиностроение, 1985. – 272 с.
5. Высокоточные подшипники. Каталог фирмы SNFA / Gen. Cat. – 9-85-6000 - I.F.E.D.RS. – Tipostampa – Torino – 62 с.
6. Перель Л.Я. Подшипники качения: Расчет, проектирование и обслуживание опор: Справочник. – М.: Машиностроение, 1983. – 543 с.

Одержано