МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАНЯ. МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

Н.Романенко
Чернівецький державний університет

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ НА ДВОШАРОВІЙ ПЛОЩИНІ З ЦИЛІНДРИЧНО-ЕЛІПТИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

На двошаровій площині з еліптичною лінією поділу та циліндрично-еліптичною порожниною запроваджено інтегральне перетворення, породжене диференціальним оператором Лапласа з кусково-неперервними коефіцієнтами у циліндрично-еліптичній системі координат.

Розгляньмо задачу побудови обмеженого в області

$$D_{12} = \left\{ \left(t,\xi,\eta \right) : t > 0, \eta \in [\,0,2\pi\,), \xi \in I_{12}^{+} = \left(\xi_0,\xi_1, \right) \cup \left(\xi_1,\infty \right), \xi_1 > \xi_0 > 0 \right\}$$

розв`язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності М-параболічного типу [1] :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - \frac{a_1^2}{\rho_1^2\left(\xi,\eta\right)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) = 0,\ \xi \in \left(\xi_0,\xi_1 \right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - \frac{a_2^2}{\rho_2^2\left(\xi,\eta\right)}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) = 0,\ \xi \in \left(\xi_1,\infty \right) \tag{1}$$

за початковими умовами

$$u_1\left(t,\xi,\eta\right)\Big|_{t=0} = g_1\left(\xi,\eta\right),\ \xi \in \left(\xi_0,\xi_1\right),$$

$$u_2\left(t,\xi,\eta\right)\Big|_{t=0} = g_2\left(\xi,\eta\right),\ \xi \in \left(\xi_1,\infty\right), \tag{2}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta_{j1}^1 \right) u_1 - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta_{j2}^1 \right) u_2 \right]\Bigg|_{\xi=\xi_1} = 0,\ j = 1, 2 \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$u_1\Big|_{\xi=\xi_0} = 0,\ \ \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi=\infty} = 0,\ u_j(t,\ \xi,\ \eta + 2\pi) = u_j(t,\ \xi,\ \eta),\ j = 1, 2. \tag{4}$$

У рівностях (1) - (3) $c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$, $c_{11}c_{21} > 0$, $\rho_j^2 = 2^{-1} c_j^2 (\mathrm{ch}2\xi - \cos 2\eta)$, $c_j^2 > 0$, $j = 1, 2$.

Припустимо, що функції $u_j(t,\ \xi,\ \eta)$ є оригіналами за Лапласом щодо змінної t [2]. У зображеннях за Лапласом задачі (1) - (4) відповідає задача побудови обмеженого в області

$$\Omega_{12} = \left\{ \left(\xi,\eta \right) : \eta \in [\,0,2\pi\,), \xi \in \left(\xi_0,\xi_1, \right) \cup \left(\xi_1,\infty \right), \xi_1 > \xi_0 > 0 \right\}$$

розв`язку сепаратної системи рівнянь еліптичного типу

$$\frac{\partial^2 u_j^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial \eta^2} - \rho_j^2\left(\xi,\eta\right) q_j u_j^*\left(p,\xi,\eta\right) = -\bar{g}_j\left(\xi,\eta\right),\ j = 1, 2 \tag{5}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi}+\beta_{j1}^{1}\right)u_1^* - \left(\alpha_{j2}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi}+\beta_{j2}^{1}\right)u_2^*\right]\Bigg|_{\xi=\xi_1} = 0\,,\ j = 1,\,2 \tag{6}$$

та крайовими умовами

$$u_1^*\big|_{\xi=\xi_0} = 0\,,\ \ \frac{\partial u_2^*}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\infty} = 0\,,\ u_j^*\left(p,\xi,\eta+2\pi\right) = u_j^*\left(p,\xi,\eta\right). \tag{7}$$

У формулах (5) - (6) при j = 1 $(\xi,\ \eta) \in (\xi_0,\ \xi_1)\times[0,2\pi)$, при j = 2 $(\xi,\ \eta) \in (\xi_1,\infty)\times[0,2\pi)$, $\overline{g}_j = a_j^{-2}g_j\left(\xi,\eta\right)\rho_j\left(\xi,\eta\right)$, $q_j = a_j^{-2}\left(p+\gamma_j^2\right)$, $a_j > 0$, $p = \sigma + i\tau$, $i^2 = -1$,

$$u_j^*\left(p,\xi,\eta\right) = \int\limits_0^\infty u_j\left(t,\xi,\eta\right)e^{-pt}dt \equiv L\left[u_j\right],\ j = 1,\,2.$$

Перепишемо рівняння (5):

$$\frac{\partial^2 u_j^*}{\partial\xi^2} - 2^{-1}c_j^2 q_j ch2\xi u_j^* + \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial\eta^2} + 2^{-1}c_j^2 q_j \cos 2\eta u_j^* = -\overline{g}_j\left(\xi,\eta\right).$$

Розгляньмо рівняння Матьє [3]

$$\frac{d^2 v_j}{d\eta^2} + \left(k_m - 2\overline{q}_j \cos 2\eta\right)v_j = 0\,,\ \overline{q}_j = -\frac{1}{4}c_j^2 q_j\,. \tag{8}$$

Диференціальне рівняння (8) має періодичні розв`язки [3]

$$z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right) = ce_m\left(\eta,\overline{q}_j\right) + ise_m\left(\eta,\overline{q}_j\right),\ i^2 = -1. \tag{9}$$

Оскільки система функцій $\left\{z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)\right\}_{m=0}^{\infty}$ ортогональна й повна на $[0,\ 2\pi)$, то ряд Фур`є за цією системою виглядає так:

$$f\left(\eta\right) = \frac{Re\left(\eta\right)}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m f_m \overline{z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)} = \frac{Re\left(\eta\right)}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m \int\limits_0^{2\pi} f\left(x\right)z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)dx\,\overline{z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)},$$

$$se_0\left(\eta,\overline{q}_j\right) = 0\,. \tag{10}$$

Тут $\varepsilon_0 = \sqrt{2}$, $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = \ldots = 2$, $\mathrm{Re}(\eta)$ означає дійсну частину виразу щодо η, квадрат норми

$$\left\|z_m\right\|^2 = \int\limits_0^{2\pi} z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)\overline{z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)}d\eta = 2\pi\,. \tag{11}$$

При цьому власні значення k_m дорівнюють : а) для функції $ce_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)$ $k_m = a_{2n}$ при $m = 2n$, $k_m = a_{2n+1}$ при $m = 2n + 1$; б) для функції $se_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)$ $k_m = b_{2n+1}$ при $m = 2n+1$, $k_m = b_{2n+2}$ при $m = 2n+2$ [4].

Ряд Фур`є (10) породжує пряме скінченне інтегральне перетворення

$$\mathfrak{m}_m\left[f\left(\eta\right)\right] = \int\limits_0^{2\pi} f\left(\eta\right)z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)d\eta \equiv f_m\left(\overline{q}_j\right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} f\left(\eta\right)ce_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)d\eta + i\int\limits_0^{2\pi} f\left(\eta\right)se_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)d\eta \equiv f_m^c\left(\overline{q}_j\right) + if_m^s\left(\overline{q}_j\right) \tag{12}$$

та обернене скінченне інтегральне перетворення

$$\mathfrak{m}_m^{-1}\left[f_m\left(\overline{q}_j\right)\right] = \frac{Re\left(\eta\right)}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m f_m\overline{z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}ce_0\left(\eta,\overline{q}_j\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[f_m^c\left(\overline{q}_j\right)ce_m\left(\eta,\overline{q}_j\right) + f_m^s\left(\overline{q}_j\right)se_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)\right]\right\} \tag{13}$$

Методом інтегрування частинами внаслідок рівняння (8) встановлюємо інтегральну тотожність :

$$\mathfrak{M}_m\left[\left(\frac{d^2}{d\eta^2}-2\overline{q}_j\cos 2\eta\right)f(\eta)\right]=-k_m f_m\left(\overline{q}_j\right). \tag{14}$$

Застосувавши до задачі (5) - (7) оператор $\mathfrak{M}_m$ за правилом (12), внаслідок тотожності (14) одержуємо задачу побудови обмеженого на множині I_{12}^{+} розв`язку сепаратної системи неоднорідних рівнянь Матьє для модифікованих функцій

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}-\left(k_m-2\overline{q}_1 ch2\xi\right)\right]u_{1m}^{*}=-G_{1m}^{*},\ \xi\in(\xi_0,\ \xi_1), \tag{15}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}-\left(k_m-2\overline{q}_2 ch2\xi\right)\right]u_{2m}^{*}=-G_{2m}^{*},\ \xi\in(\xi_1,\ \infty), \tag{16}$$

за крайовими умовами

$$u_{1m}^{*}\Big|_{\xi=\xi_0}=0,\ \left.\frac{du_{2m}^{*}}{d\xi}\right|_{\xi=\infty}=0. \tag{17}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{1}\frac{d}{d\xi}+\beta_{j1}^{1}\right)u_{1m}^{*}-\left(\alpha_{j2}^{1}\frac{d}{d\xi}+\beta_{j2}^{1}\right)u_{2m}^{*}\right]\Bigg|_{\xi=\xi_1}=0,\ j=1,\ 2 \tag{18}$$

У рівняннях (15), (16) беруть участь функції

$$G_{jm}^{*}\left(\xi,\overline{q}_j\right)=\int_0^{2\pi}a_j^{-2}g_j(\xi,\eta)\rho_j(\xi,\eta)z_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)d\eta\equiv G_{jm}^{c*}\left(\xi,\overline{q}_j\right)+iG_{jm}^{s*}\left(\xi,\overline{q}_j\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi}a_j^{-2}g_j(\xi,\eta)\rho_j(\xi,\eta)ce_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)d\eta+i\int_0^{2\pi}a_j^{-2}g_j(\xi,\eta)\rho_j(\xi,\eta)se_m\left(\eta,\overline{q}_j\right)d\eta. \tag{19}$$

Внаслідок рівності (19) рівняння (15), (16) еквівалентні рівнянням :

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}-\left(k_{2n}-2\overline{q}_j ch2\xi\right)\right]u_{j,2n}^{c*}=-G_{j,2n}^{c*}\left(\xi,\overline{q}_j\right),\ j=1,\ 2, \tag{20}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}-\left(k_{2n+1}-2\overline{q}_j ch2\xi\right)\right]u_{j,2n+1}^{c*}=-G_{j,2n+1}^{c*}\left(\xi,\overline{q}_j\right), \tag{21}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}-\left(k_{2n+1}-2\overline{q}_j ch2\xi\right)\right]u_{j,2n+1}^{s*}=-G_{j,2n+1}^{s*}\left(\xi,\overline{q}_j\right), \tag{22}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}-\left(k_{2n+2}-2\overline{q}_j ch2\xi\right)\right]u_{j,2n+2}^{s*}=-G_{j,2n+2}^{s*}\left(\xi,\overline{q}_j\right), \tag{23}$$

Оскільки фундаментальну систему розв`язків для відповідного (20) однорідного рівняння утворюють модифіковані функції Матьє $Ce_{2n}\left(\xi,\overline{q}_j\right)$ та $Fek_{2n}\left(\xi,\overline{q}_j\right)$ [3], то обмежений на множині $I_{12}^{+}$ розв`язок крайової задачі (20), (17), (18) будуватимемо за правилами :

$$u_{1,2n}^{c*}=A_1Ce_{2n}\left(\xi,\overline{q}_1\right)+B_1Fek_{2n}\left(\xi,\overline{q}_1\right)+\int_{\xi_0}^{\xi_1}\mathcal{E}_{1,2n}^{c*}\left(\xi,x,\overline{q}_1\right)G_{1,2n}^{c*}\left(\xi,\overline{q}_1\right)dx,$$

$$u_{2,2n}^{c*}=B_2Fek_{2n}\left(\xi,\overline{q}_2\right)+\int_{\xi_1}^{\infty}\mathcal{E}_{2,2n}^{c*}\left(\xi,x,\overline{q}_2\right)G_{1,2n}^{c*}\left(\xi,\overline{q}_2\right)dx. \tag{24}$$

Тут беруть участь функції Коші2

$$\mathrm{E}_{1,2n}^{c*} = -\frac{1}{W_{2n,11}^{c}\left(x,\bar{q}_1\right)\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)}\begin{cases}\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,x,\bar{q}_1\right)\times \\ \Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi,\bar{q}_1\right)\times\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\times\left[Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Ce_{2n}\left(\xi,\bar{q}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(\xi,\bar{q}_1\right)\right], \xi_0<\xi<x<\xi_1,\\ &\times\left[Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Ce_{2n}\left(x,\bar{q}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(x,\bar{q}_1\right)\right], \xi_0<x<\xi<\xi_1.\end{aligned} \tag{25}$$

$$\mathrm{E}_{2,2n}^{c*} = \frac{1}{W_{2n,12}^{c}\left(x,\bar{q}_2\right)U_{2n,12}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)}\begin{cases}Fek_{2n}\left(x,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,12}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi,\bar{q}_2\right), \xi_1<\xi<x<\infty,\\ Fek_{2n}\left(\xi,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,12}^{1*,c}\left(\xi_1,x,\bar{q}_2\right), \xi_1<x<\xi<\infty.\end{cases}$$

Позначення загальноприйняті [5].

Умови спряження (18) та крайова умова (17) для визначення сталих A_1, B_1, B_2 дають алгебраїчну систему :

$$\begin{aligned}&A_1Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)+B_1Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)=0,\\ &A_1U_{2n,11}^{11,c}\left(\xi_1,\bar{q}_1\right)+B_1U_{2n,11}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_1\right)-B_2U_{2n,12}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)=0,\\ &A_1U_{2n,21}^{11,c}\left(\xi_1,\bar{q}_1\right)+B_1U_{2n,21}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_1\right)-B_2U_{2n,22}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)=F_{2n}^{c*}.\end{aligned} \tag{26}$$

У системі (26) бере участь функція

$$F_{2n}^{c*} = c_{11}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{W_{2n,11}^{c}\left(\xi_1,\bar{q}_1\right)\left[Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Ce_{2n}\left(x,\bar{q}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(x,\bar{q}_1\right)\right]}{W_{2n,11}^{c}\left(x,\bar{q}_1\right)\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)}G_{1,2n}^{c*}\left(x,\bar{q}_1\right)dx .$$

Припустимо, що виконана умова однозначного розв`язку даної задачі: для $p = \sigma + i\tau$ із Re$p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та Im$p = \tau \in (-\infty, \infty)$ визначник алгебраїчної системи (26)

$$\Delta_{2n}^{c*}(p)\equiv U_{2n,22}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)-U_{2n,12}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,21}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)\neq 0. \tag{27}$$

Визначимо функції впливу :

$$H_{2n,11}^{c*}(\xi,x,p)=\begin{cases}\dfrac{\left[Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Ce_{2n}\left(\xi,\bar{q}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(\xi,\bar{q}_1\right)\right]}{W_{2n,11}^{c}\left(x,\bar{q}_1\right)\Delta_{2n}^{*}(p)}\times\\ \dfrac{\left[Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Ce_{2n}\left(x,\bar{q}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(x,\bar{q}_1\right)\right]}{W_{2n,11}^{c}\left(x,\bar{q}_1\right)\Delta_{2n}^{*}(p)}\times\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\times\left[U_{2n,12}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,21}^{1*,c}\left(\xi_1,x,\bar{q}_1\right)-U_{2n,22}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,x,\bar{q}_1\right)\right], \xi_0<\xi<x<\xi_1,\\ &\times\left[U_{2n,12}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,21}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi,\bar{q}_1\right)-U_{2n,22}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi,\bar{q}_1\right)\right], \xi_0<x<\xi<\xi_1,\end{aligned}$$

$$H_{2n,12}^{c*}(\xi,x,p)=-\frac{c_{21}W_{2n,11}^{c}\left(\xi_1,\bar{q}_2\right)Fek_{2n}\left(x,\bar{q}_2\right)}{W_{2n,11}^{c}\left(x,\bar{q}_2\right)\Delta_{2n}^{*}(p)}\times$$

$$\times\left[Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Ce_{2n}\left(\xi,\bar{q}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(\xi,\bar{q}_2\right)\right],$$

$$H_{2n,21}^{c*}(\xi,x,p)=-\frac{c_{11}W_{2n,11}^{c}\left(\xi_1,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(\xi,\bar{q}_2\right)}{W_{2n,11}^{c}\left(x,\bar{q}_1\right)\Delta_{2n}^{*}(p)}\times \tag{28}$$

$$\times\left[Fek_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Ce_{2n}\left(x,\bar{q}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{q}_1\right)Fek_{2n}\left(x,\bar{q}_2\right)\right],$$

$$H_{2n,22}^{c*}(\xi,x,p)=\frac{1}{W_{2n,11}^{c}\left(x,\bar{q}_2\right)\Delta_{2n}^{*}(p)}\begin{cases}Fek_{2n}\left(x,\bar{q}_2\right)\left[\Psi_{2n,22}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)-\right.\\ Fek_{2n}\left(\xi,\bar{q}_2\right)\left[\Psi_{2n,22}^{1*,c}\left(\xi_1,x,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,11}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)-\right.\end{cases}$$

$$-\Psi_{2n,12}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,21}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)\Big],\xi_1<\xi<x<\infty,$$

$$-\Psi_{2n,12}^{1*,c}\left(\xi_1,x,\bar{q}_2\right)\Psi_{2n,21}^{1*,c}\left(\xi_1,\xi_0,\bar{q}_1\right)\Big],\xi_1<x<\xi<\infty.$$

У результаті однозначного розв`язку алгебраїчної системи (26), підстановки знайдених значень $A_1$, $B_1$, $B_2$ у формули (24) одержуємо розв`язок крайової задачі (20), (17), (18) :

$$u_{j,2n}^{c*}\left(p,\xi\right)=\int_{\xi_0}^{\xi_1}H_{2n,j1}^{c*}\left(\xi,x,p\right)G_{1,2n}^{c*}\left(x,\bar{q}_1\right)dx+\int_{\xi_1}^{\infty}H_{2n,j2}^{c*}\left(\xi,x,p\right)G_{2,2n}^{c*}\left(x,\bar{q}_1\right)dx\equiv$$

$$\equiv\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}H_{2n,j1}^{c*}\left(\xi,x,p\right)ce_{2n}\left(\eta,\bar{q}_1\right)a_1^{-2}g_1\left(x,\eta\right)\rho_1\left(x,\eta\right)dxd\eta+ \qquad (29)$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}H_{2n,j2}^{c*}\left(\xi,x,p\right)ce_{2n}\left(\eta,\bar{q}_2\right)a_2^{-2}g_2\left(x,\eta\right)\rho_2\left(x,\eta\right)dxd\eta\ ;\ j=1,\,2.$$

Повертаючись в формулах (29) до оригіналу, маємо функції

$$u_{j,2n}^{c}\left(t,\xi\right)=\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}H_{2n,j1}^{c}\left(\xi,x,p\right)a_1^{-2}g_1\left(x,\eta\right)\rho_1\left(x,\eta\right)dxd\eta+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}H_{2n,j2}^{c}\left(\xi,x,p\right)a_2^{-2}g_2\left(x,\eta\right)\rho_2\left(x,\eta\right)dxd\eta\ ;\ j=1,\,2. \qquad (30)$$

Òóò

$$H_{2n,js}^{c}\left(t,\xi,x\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}K_{2n,js}^{c*}\left(\xi,x,p\right)e^{pt}dp\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}H_{2n,js}^{c*}\left(\xi,x,p\right)ce_{2n}\left(\eta,\bar{q}_s\right)e^{pt}dp\ ,\ j\ ,\ s=1,\,2, \qquad (31)$$

γ - контур Бромвіча у p-комплексній площині [2].

Особливими точками функцій $H_{2n,js}^{c*}\left(\xi,x,p\right)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2$, $p=-\gamma_2^2$ і $p=\infty$.

Якщо $\left(\gamma_1^2-\gamma_2^2\right)\geq 0$, то покладемо $\bar{q}_1=\dfrac{c_1^2\lambda}{4a_1^2}=-\dfrac{c_1^2e^{\pi i}\lambda}{4a_1^2}=-\dfrac{c_1^2}{4a_1^2}\left(\lambda+k_1^2\right)e^{\pi i}$, $\bar{q}_2=\dfrac{c_2^2}{4a_2^2}\left(\lambda+\gamma_1^2-\gamma_2^2\right)\equiv-\dfrac{c_2^2}{4a_2^2}\left(\lambda+k_2^2\right)e^{\pi i}$, $k_1^2=0$.

Якщо ж $\left(\gamma_2^2-\gamma_1^2\right)\geq 0$, то покладемо $\bar{q}_1=\dfrac{c_1^2}{4a_1^2}\left(\lambda+\gamma_2^2-\gamma_1^2\right)==-\dfrac{c_1^2}{4a_1^2}\left(\lambda+k_1^2\right)e^{\pi i}$, $\bar{q}_2=\dfrac{c_2^2}{4a_2^2}\left(\lambda+0\right)\equiv-\dfrac{c_2^2}{4a_2^2}\left(\lambda+k_2^2\right)e^{\pi i}$.

Таким чином, вважатимемо, що :

1) при $\gamma_1^2\geq\gamma_2^2$ $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_1^2=0$; $p=-\left(\lambda+\gamma_1^2\right)$; $dp=-d\lambda$;

2) при $\gamma_2^2\geq\gamma_1^2$ $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$; $p=-\left(\lambda+\gamma_2^2\right)$; $dp=-d\lambda$.

Якщо позначити $\bar{b}_j=\dfrac{c_j^2}{4a_j^2}\left(\lambda+k_j^2\right)$, то $\bar{q}_j=\bar{b}_j=-\bar{b}_je^{\pi i}$. Скористаємося співвідношеннями :

$$Ce_{2n}\left(\xi,\bar{q}_j\right)=Ce_{2n}\left(\xi,-\bar{b}_je^{\pi i}\right)=Ce_{2n}\left(\xi,\bar{b}_j\right),$$

$$Fek_{2n}\left(\xi,\bar{q}_j\right)=Fek_{2n}\left(\xi,-\bar{b}_je^{\pi i}\right)=-\frac{i}{2}\left[Ce_{2n}\left(\xi,\bar{b}_j\right)-iFey_{2n}\left(\xi,\bar{b}_j\right)\right].$$

Безпосередньо маємо :

$$U_{2n,jk}^{11,c}\left(\xi_1,\bar{q}_m\right)=\alpha_{jk}^1Ce_{2n}'\left(\xi_1,\bar{b}_m(\lambda)\right)+\beta_{jk}^1Ce_{2n}\left(\xi_1,\bar{b}_m(\lambda)\right)\equiv u_{2n,jk}^{11,c}\left(\xi_1,\bar{b}_m(\lambda)\right),$$

$$U_{2n,jk}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{q}_m\right)=-\frac{i}{2}\left[u_{2n,jk}^{11,c}\left(\xi_1,\bar{b}_m(\lambda)\right)-iu_{2n,jk}^{12,c}\left(\xi_1,\bar{b}_m(\lambda)\right)\right],$$

$$u_{2n,jk}^{11,c}\left(\xi_1,\bar{b}_m\right)=\alpha_{jk}^1Fey_{2n}'\left(\xi_1,\bar{b}_m(\lambda)\right)+\beta_{jk}^1Fey_{2n}\left(\xi_1,\bar{b}_m(\lambda)\right).$$

Припускаючи, що $\left(\gamma_2^2-\gamma_1^2\right)\geq 0$, отримуємо :

$$\Delta_{2n}^{c*}\left(\left(\lambda+\gamma_2^2\right)\right)=\frac{i}{4}\left[\omega_{2n,12}^cCe_{2n}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)-\omega_{2n,11}^cCe_{2n}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)-\right.$$

$$\left.-i\left(\omega_{2n,22}^cCe_{2n}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)-\omega_{2n,21}^cCe_{2n}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)\right)\right]\equiv\frac{i}{4}\left[\omega_{2n,1}^c(\lambda)-i\omega_{2n,2}^c(\lambda)\right],$$

$$\omega_{2n,ik}^c(\lambda)=u_{2n,12}^{1i,c}\left(\xi_1,\bar{b}_2\right)u_{2n,21}^{1k,c}\left(\xi_1,\bar{b}_1\right)-u_{2n,22}^{1i,c}\left(\xi_1,\bar{b}_2\right)u_{2n,11}^{1k,c}\left(\xi_1,\bar{b}_1\right)$$

Визначимо величини та функції

$$\sigma_1=\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{1}{a_1^2},\ \sigma_2=\frac{1}{a_2^2},$$

$$V_{2n,1}^c(\xi,\lambda)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{c_{2n}^2\left(\bar{b}_2(\lambda)\right)}\left[Fey_{2n}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)Ce_{2n}\left(\xi,\bar{b}_1\right)-Ce_{2n}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)Fey_{2n}\left(\xi,\bar{b}_1\right)\right],$$

$$V_{2n,2}^c(\xi,\lambda)=\omega_{2n,1}^cFey_{2n}\left(\xi,\bar{b}_2\right)-\omega_{2n,2}^cCe_{2n}\left(\xi,\bar{b}_2\right),$$

$$\Omega_{2n}^c(\lambda)=\frac{\pi c_{2n}^2\left(\bar{b}_2(\lambda)\right)}{2}\left(\left[\omega_{2n,1}^c(\lambda)\right]^2+\left[\omega_{2n,2}^c(\lambda)\right]^2\right)^{-1}.$$

Згідно з формулами (31) одержимо, що

$$H_{2n,jk}^c(t,\xi,x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty Im\left\{H_{2n,jk}^{c*}\left(\xi,x\left(\lambda+\gamma_2^2\right)e^{\pi i}\right)\right\}ce_{2n}\left(\eta,\bar{b}_k(\lambda)\right)e^{-\left(\lambda+\gamma_2^2\right)t}d\lambda=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\left(\lambda+\gamma_2^2\right)t}V_{2n,j}^c(\xi,\lambda)V_{2n,k}^c(x,\lambda)ce_{2n}\left(\eta,\bar{b}_k(\lambda)\right)\Omega_{2n}^c(\lambda)d\lambda\sigma_k^2a_k^2,\ j,\ k=1,\ 2. \qquad (32)$$

Аналогічні припущення приводять до

$$H_{2n+1,jk}^c(t,\xi,x)=\int_0^\infty e^{-\left(\lambda+\gamma_2^2\right)t}V_{2n+1,j}^c(\xi,\lambda)V_{2n+1,k}^c(x,\lambda)ce_{2n+1}\left(\eta,\bar{b}_k(\lambda)\right)\times$$

$$\times\Omega_{2n+1}^c(\lambda)d\lambda\sigma_k^2a_k^2;\ j,\ k=1,\ 2, \qquad (33)$$

$$H_{m,jk}^s(t,\xi,x)=\int_0^\infty e^{-\left(\lambda+\gamma_2^2\right)t}V_{m,j}^s(\xi,\lambda)V_{m,k}^s(x,\lambda)se_m\left(\eta,\bar{b}_k(\lambda)\right)\Omega_m^c(\lambda)d\lambda\sigma_k^2a_k^2,$$

$$j,\ k=1,\ 2,\quad m=2n+1,\ 2n+2. \qquad (34)$$

У рівностях (33), (34) прийнято позначення:

$$V_{2n+1,1}^c(\xi,\lambda)=-\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{c_{2n+1}^2\left(\bar{b}_2(\lambda)\right)}\left[Fey_{2n+1}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)Ce_{2n+1}\left(\xi,\bar{b}_1\right)-Ce_{2n+1}\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)Fey_{2n+1}\left(\xi,\bar{b}_1\right)\right],$$

$$V_{2n+1,2}^c(\xi,\lambda)=\omega_{2n+1,1}^c(\lambda)Fey_{2n+1}\left(\xi,\bar{b}_2\right)-\omega_{2n+1,2}^c(\lambda)Ce_{2n}\left(\xi,\bar{b}_2\right),$$

$$\Omega_{2n+1}^c(\lambda)=-\frac{\pi c_{2n+1}^2\left(\bar{b}_2(\lambda)\right)}{2}\left(\left[\omega_{2n+1,1}^c(\lambda)\right]^2+\left[\omega_{2n+1,2}^c(\lambda)\right]^2\right)^{-1},$$

$$V_{m,1}^s(\xi,\lambda)=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^mc_{21}}{d_m^2\left(\bar{b}_2(\lambda)\right)}\left[Gey_m\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)Se_m\left(\xi,\bar{b}_1\right)-Se_m\left(\xi_0,\bar{b}_1\right)Gey_m\left(\xi,\bar{b}_1\right)\right],$$

$$V^s_{m,2}(\xi,\lambda)=\omega^s_{m,1}(\lambda)Gey_m\left(\xi,\bar{b}_2\right)-\omega^c_{m,2}(\lambda)Se_m\left(\xi,\bar{b}_2\right),$$

$$\Omega^s_m(\lambda)=-\frac{\pi dc_m^2\left(\bar{b}_2(\lambda)\right)}{2}\left(\left[\omega^s_{m,1}(\lambda)\right]^2+\left[\omega^s_{m,2}(\lambda)\right]^2\right)^{-1}.$$

Розв’язком задачі (15) - (18) є функція

$$\begin{aligned}u^*_{m,j}(p,\xi)&=\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}H^{c*}_{m,j1}(\xi,x,p)ce_m\left(\varphi,\bar{q}_1\right)a_1^{-2}g_1(x,\varphi)\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi+\\&+\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}H^{c*}_{m,j2}(\xi,x,p)ce_m\left(\varphi,\bar{q}_2\right)a_2^{-2}g_2(x,\varphi)\rho_2(x,\varphi)dxd\varphi+\\&+i\left\{\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}H^{s*}_{m,j1}(\xi,x,p)se_m\left(\varphi,\bar{q}_1\right)a_1^{-2}g_1(x,\varphi)\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi+\right.\\&\left.+\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}H^{s*}_{m,j2}(\xi,x,p)se_m\left(\varphi,\bar{q}_2\right)a_2^{-2}g_2(x,\varphi)\rho_2(x,\varphi)dxd\varphi\right\}.\end{aligned}\tag{35}$$

Застосувавши до функції $u^*_{m,j}(p,\xi)$ оператор $\mathfrak{M}_m^{-1}$ за правилом (13), отримуємо розв`язок задачі (5) - (7)

$$\begin{aligned}u^*_j(p,\xi)&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\{\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Big[H^{c*}_{m,j1}(\xi,x,p)ce_m\left(\eta,\bar{q}_j\right)ce_m\left(\varphi,\bar{q}_1\right)+\\&+H^{s*}_{m,j1}(\xi,x,p)se_m\left(\eta,\bar{q}_j\right)se_m\left(\varphi,\bar{q}_1\right)\Big]a_1^{-2}g_1(x,\varphi)\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi+\\&+\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}\Big[H^{c*}_{m,j2}(\xi,x,p)ce_m\left(\eta,\bar{q}_j\right)ce_m\left(\varphi,\bar{q}_2\right)+H^{s*}_{m,j2}(\xi,x,p)se_m\left(\eta,\bar{q}_j\right)se_m\left(\varphi,\bar{q}_2\right)\Big]\times\\&\times a_2^{-2}g_2(x,\varphi)\rho_2(x,\varphi)dxd\varphi\};\ j=1,\ 2.\end{aligned}\tag{36}$$

Повертаючись у формулах (36) до оригіналу, внаслідок рівностей (32) - (34) маємо єдиний розв`язок задачі (1) - (4) :

$$\begin{aligned}u_j(t,\xi)&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}e^{-\left(\lambda+\gamma_2^2\right)t}V^{c*}_{m,j1}(\xi,\lambda)ce_m\left(\eta,\bar{b}_j(\lambda)\right)[\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Big[g_1(x,\varphi)\times\\&\times V^c_{m,1}(x,\lambda)ce_m\left(\varphi,\bar{b}_1(\lambda)\right)\sigma_1\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi+\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}g_2(x,\varphi)V^c_{m,2}(x,\lambda)ce_m\left(\varphi,\bar{b}_2(\lambda)\right)\times\\&\times\sigma_2\rho_2(x,\varphi)dxd\varphi]\Omega^c_m(\lambda)d\lambda+\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\left(\lambda+\gamma_2^2\right)}V^s_{m,j}(\xi,\lambda)se_m\left(\varphi,\bar{b}_j(\lambda)\right)\times\\&\times[\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}g_1(x,\varphi)V^s_{m,1}(x,\lambda)se_m\left(\varphi,\bar{b}_1(\lambda)\right)\sigma_1\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi+\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}g_2(x,\varphi)\times\\&\times V^s_{m,2}(x,\lambda)se_m\left(\varphi,\bar{b}_2(\lambda)\right)\sigma_2\rho_2(x,\varphi)dxd\varphi]\Omega^s_m(\lambda)d\lambda.\end{aligned}\tag{37}$$

Звідси внаслідок початкових умов(2) маємо інтегральні зображення :

$$\begin{aligned}g_1(\xi,\eta)&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}V^c_{m,1}(\xi,\lambda)ce_m\left(\eta,\bar{b}_1(\lambda)\right)\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}g_1(x,\varphi)V^c_{m,1}(x,\lambda)ce_m\left(\varphi,\bar{b}_1(\lambda)\right)\times\\&\times\sigma_1\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi\Omega^c_m(\lambda)d\lambda+\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}V^s_{m,1}(\xi,\lambda)se_m\left(\eta,\bar{b}_1(\lambda)\right)\int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}g_1(x,\varphi)\times\\&\times V^s_{m,1}(x,\lambda)se_m\left(\eta,\bar{b}_1(\lambda)\right)\sigma_1\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi\Omega^s_m(\lambda)d\lambda\ \equiv\end{aligned}$$

$$\equiv \int_0^{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Big(\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}[V_{m,1}^c(\xi,\lambda)V_{m,1}^c(x,\lambda)ce_m(\eta,\bar b_1(\lambda))ce_m(\varphi,\bar b_1(\lambda))\Omega_m^c(\lambda)+ \tag{38}$$

$$+V_{m,1}^s(\xi,\lambda)V_{m,1}^s(x,\lambda)se_m(\eta,\bar b_1(\lambda))se_m(\varphi,\bar b_1(\lambda))\Omega_m^s(\lambda)]d\lambda\Big)g_1(x,\varphi)\sigma_1\rho_1(x,\varphi)dxd\varphi,$$

$$g_2(\xi,\eta)=\int_0^{2\pi}\int_{\xi_1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}[V_{m,2}^c(\xi,\lambda)V_{m,2}^c(x,\lambda)ce_m(\eta,\bar b_2(\lambda))ce_m(\varphi,\bar b_2(\lambda))\Omega_m^c(\lambda)+$$

$$+V_{m,2}^s(\xi,\lambda)V_{m,2}^s(x,\lambda)se_m(\eta,\bar b_2(\lambda))se_m(\varphi,\bar b_2(\lambda))\Omega_m^s(\lambda)]d\lambda\Big)g_2(x,\varphi)\sigma_2\rho_2(x,\varphi)dxd\varphi.$$

Визначимо функції :

$$H_m(\xi,\eta,\lambda)=[V_{m,1}^c(\xi,\lambda)ce_m(\eta,\bar b_1(\lambda))\theta(\xi-\xi_0)\theta(\xi_1-\xi)+V_{m,2}^c(\xi,\lambda)ce_m(\eta,\bar b_2(\lambda))\theta(\xi-\xi_1)]\times$$

$$\times\sqrt{\Omega_m^c(\lambda)}+i[V_{m,1}^s(\xi,\lambda)se_m(\eta,\bar b_1(\lambda))\theta(\xi-\xi_0)\theta(\xi_1-\xi)+V_{m,2}^s(\xi,\lambda)se_m(\eta,\bar b_2(\lambda))\theta(\xi-\xi_1)]\times$$

$$\times\sqrt{\Omega_m^s(\lambda)}\equiv H_{m,1}(\xi,\eta,\lambda)\theta(\xi-\xi_0)\theta(\xi_1-\xi)+H_{m,2}(\xi,\eta,\lambda)\theta(\xi-\xi_1); \tag{39}$$

$$\sigma(\xi)=\bar\sigma_1\theta(\xi-\xi_0)\theta(\xi_1-\xi)+\bar\sigma_2\theta(\xi-\xi_1);\ \bar\sigma_j=2^{-1}c_j^2\sigma_j.$$

Інтегральні зображення (38) породжують інтегральне зображення міри Дірака в області Ω_{12} :

$$\delta(\xi,\eta;x,\varphi)=\delta(\xi-x)\otimes\delta(\eta-\varphi)=$$

$$=\frac{Re}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}\overline{H_m(\xi,\eta,\lambda)}H_m(x,\varphi,\lambda)d\lambda\sigma(x)(ch2x-cos2\eta). \tag{40}$$

Інтегральне зображення (40) породжує пряме

$$\mathfrak{m}_{\Omega_{12}}[g(\xi,\eta)]=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}g(\xi,\eta)H_m(\xi,\eta,\lambda)\sigma(\xi)(ch2\xi-cos2\eta)d\xi d\eta\equiv\tilde g(\lambda) \tag{41}$$

і обернене

$$\mathfrak{m}_{\Omega_{12}}^{-1}[\tilde g(\lambda)]=\frac{Re}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}\tilde g(\lambda)\overline{H_m(\xi,\eta,\lambda)}d\lambda\equiv g(\xi,\eta) \tag{42}$$

Інтегральні перетворення на двошаровій площині з циліндрично-еліптичною порожниною. Справджується твердження.

Теорема1. Якщо вектор-функція $g(\xi,\ \eta)=\{g_1(\xi,\ \eta),\ g_2(\xi,\ \eta)\}$ неперервна, абсолютно сумовна з вагою $(ch2\xi-\cos2\eta)^{1/2}$ й має обмежену варіацію в області $(\xi_0,\infty)\times[0,2\pi)$, то для будь-якої точки $(\xi,\ \eta)$ є $\Omega_{1,2}$ справджується інтегральне зображення

$$g(\xi,\eta)=\frac{Re}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^{\infty}\overline{H_m(\xi,\eta,\lambda)}\Big[\int_{\xi_0}^{\infty}\int_0^{2\pi}g(x,\varphi)H_m(x,\varphi,\lambda)\sigma(x)\times$$

$$\times(ch2x-cos2\varphi)dxd\varphi\Big]d\lambda. \tag{43}$$

Теорема 2. Нехай вектор-функція $g(\xi,\ \eta)$ двічі неперервно диференційовна в області $\Omega_{1,2}$, періодична з періодом 2π відносно кутової змінної η, задовольняє умови спряження (18) та крайові умови

$$g_1(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\xi_0}=g_{10}(\eta),\ \lim_{\xi\to\infty}\left[V_{m,2}(\xi,\lambda)\frac{\partial g_2}{\partial\xi}-g_2(\xi,\eta)\frac{\partial V_{m,2}}{\partial\xi}\right]=0. \tag{44}$$

Тоді справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора

$$\mathrm{L}=\left[2a_1^2c_1^{-2}\theta(\xi)\theta(\xi_1-\xi)+2a_2^2c_2^{-2}\theta(\xi-\xi_1)\right](ch2\xi-cos2\eta)^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right):$$

$$\mathfrak{m}_{\Omega_{12}}\left[\mathrm{L}\left[g(\xi,\eta)\right]\right]=-\lambda^2\tilde g(\lambda)-k_1^2\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_0^{2\pi}g_1(\xi,\eta)H_m(\xi,\eta,\lambda)\bar\sigma_1(ch2\xi-cos2\eta)d\eta d\xi-$$

$$-k_2^2\int_{\xi_1}^{\infty}\int_0^{2\pi} g_2(\xi,\eta)H_{m,2}(\xi,\eta,\lambda)\bar{\sigma}_2(ch2\xi-\cos 2\eta)d\eta d\xi +$$

$$+\int_0^{2\pi} g_{10}(\eta)\left.\frac{\partial H_{m,1}(\xi,\eta,\lambda)}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}\bar{\sigma}_1(ch2\xi_0-\cos 2\eta)d\eta.. \qquad (45)$$

Тотожність (45) лежить в основі побудови алгебри диференціального оператора L, що дозволяє вилучити його із розгляду у відповідних задачах математичної фізики.

The integral transformation, which was given by Laplace differential operator with sectionally continuous coefficients in cylindrical-elliptical system of axes was introduce on two-layer plane with elliptical division line and cylindrical-elliptical cavity.

Література

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. - 715 с.
3. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 475 с.
4. Градштейн И.С., Рижик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений, - М.: Наука, 1971. – 1108 с.
5. Фадєєнкова Н.В. Інтегральні перетворення на двошаровій циліндрично-еліптичній площині // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України/ - 1998/ - №1(17). – С.237 – 254.

Одержано 25.02.1999 р.