УДК 621.372.54:519.21

Т.Рафа; Б.Яворський, канд. техн. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МОДЕЛЬ ПОХИБКИ ЦИФРУВАННЯ СКЛАДНИХ СИҐНАЛІВ

У статті розглядається проблема представлення цифрованих складних фінітних сиґналів, що використовуються при дослідженні біофізичних об'єктів, зокрема, в комп'ютерній томоґрафії. Показано невідповідність моделі похибки у вигляді стаціонарного випадкового процесу задачі цифрового аналізу таких сиґналів. Запропонована модель похибки цифрування складних фінітних сиґналів як періодично корельованого випадкового процесу. З допомогою імітаційного моделювання підтверджено адекватність цієї моделі та ефективність її використання при розв'язуванні задачі реконструкції томоґрафічних зображень та побудові конструктивних алґоритмів числення.

Умовні позначення

$Б$ — база сиґналу;
F_d — частота дискретизації:
c — крок квантування;
$m(t)$ — математичне сподівання випадкового процесу;
$r(t,s)$ — кореляційна функція випадкового процесу.

Вступ

Дослідження фізичних і біофізичних об'єктів згідно з сиґнальною концепцією [1] ґрунтується на вивченні отриманих від них сиґналів, що у змінах своїх характеристик несуть відомості про часово-просторову структуру цих об'єктів. Модель сиґналу будується на основі апріорних відомостей про досліджуваний об'єкт, що мають фізичну інтерпретацію (скінченна енергія, обмежена потужність, однорідність, ізотропність тощо). Модель задає математичний апарат, методи дослідження і має бути достатньо простою, щоб нею зручно було оперувати, та адекватною розв'язуваним задачам, тобто вміщувати дані, достатні для їх розв'язання. При використанні цифрових обчислювальних засобів для аналізу неперервних сиґналів виникає потреба подання сиґналу як послідовності чисел-кодів, тобто цифрування сиґналу (що включає дискретизацію та квантування сиґналу), причому внаслідок обмеженості обчислювальних ресурсів послідовність та кількість кодів є скінченними, а тому виникає похибка, моделлю якої прийнято вважати стаціонарну послідовність незалежних випадкових величин з рівномірним розподілом ("білий шум") [2]. Проте така модель шуму цифрування є неадекватною для випадку фінітних, але складних сиґналів (широкосмугових, з розсіяним спектром [3,4]).

При розв'язуванні задачі реконструювання у Х-променевій комп'ютерній томоґрафії проекції біооб'єкта під різними кутами несуть інформацію про розподіл речовини у його середині і виконують роль сиґналу [5]. Кожна із біологічних структур, таких, як кістки, м'які тканини, представляється сиґналом з дуже відмінними від інших характеристиками (зокрема спектральними), тому сиґнал, що характеризує біооб'єкт загалом, за суттю є складним. Стаціонарна модель похибки при цифровому поданні складного сиґналу та алґоритми опрацювання даних, які вона породжує, є неадекватними внаслідок необмеженого просторового спектра такого сиґналу або неможливості його точного подання скінченною кількістю відліків. Похибка цифрування складних сиґналів є неоднорідна, тому треба використати іншу модель, адекватну такому сиґналові, що є складним за своєю природою, та задачі його аналізу цифровими методами.

Цифрування простих сиґналів

При побудові моделі фінітного сиґналу зручно подати його як скінченний набір простих математичних об'єктів — гармонік, відліків. Зокрема, періодичні сиґнали розкладають у ряд Фур'є за гармоніками, а сиґнали з обмеженим спектром — у ряд Котельникова (дискретизують). Для простих сиґналів, тобто сиґналів, у яких добуток ефективної тривалості сиґналу у часі (просторі) на ширину його спектра, тобто база сиґналу [6] $Б \approx 1$, є можливість подати сиґнал не просто дискретними відліками, але їх скінченною кількістю, що створює додаткові зручності при реалізації алґоритмів обробки таких сиґналів (обмеження необхідних ресурсів, підвищення швидкодії).

Цифрування сиґналів передбачає два перетворення: дискретизацію у часі (просторі) та квантування за рівнем. Дискретизація є лінійним перетворенням, яке полягає у відборі значень сиґналу у певні (дискретні, рівномірно розподілені) моменти часу (або відповідно з рівномірним кроком у просторі) і записується через згортку з послідовністю δ-імпульсів або за допомогою відповідного індикаторного відображення [7]. Квантування за суттю є нелінійним перетворенням, яке можна зобразити з використанням функціонального ряду Вінера як багатократну згортку з багатовимірною функцією (ядром) [8]. Можливість адекватного зображення сиґналу цифровим кодом (і, відповідно, точного його відновлення) визначається рядом умов до параметрів дискретизації і квантування, що конкретного сиґналу можуть і не задовольняти. Розглянемо основні вимоги, які ставляться до сиґналів при цифруванні.

Як відомо, лише сиґнал з фінітним спектром можна точно подити за допомогою розкладу в ряд Котельникова (дискретними відліками), що є власне розкладом в ряд Фур'є спектра такого сиґналу, як функція, задана на обмеженому інтервалі [9, с. 58–61]. На рис.1 поданий простий сигнал (а) з фінітним спектром (б). Розклад спектра цього сиґналу в ряд Фур'є, дозволяє отримати дискретне подання (розклад в ряд Котельникова) (в) сигналу (а). Спектр дискретизованого сиґналу (г) є періодичним повторенням спектра неперервного сиґналу з періодом, що відповідає частоті дискретизації F_d. Належний вибір частоти дискретизації відповідно до ширини носія спектра сиґналу ґарантує можливість повного відновлення неперервного спектра сиґналу за його дискретними відліками згідно з теоремою відліків Шенона-Котельникова [9].

При цифруванні сиґнал після дискретизації квантується. Для варіанту доповнювального коду подання цифрових значень виконується згідно з законом [10]:

$$x \mapsto x_k = M sign(x) H(|x| - M) + cE(x/c)\chi_{[0,M)}(x) + c[E(x/c) - 1]\chi_{[-M,0)}(x), \qquad (1)$$

де M — максимальне значення відліку сиґналу; $E(\bullet)$ — ціла частина від числа; c — "вага" молодшого розряду позиційного коду; $\chi_{[\bullet)}(x)$ — індикатор приналежності значення відліку сиґналу відповідному інтервалу.

Внаслідок квантування виникає похибка, моделлю якої є стаціонарна випадкова послідовність (типу дискретного білого шуму) при виконанні таких умов [10, с. 170, 192, 264]:

а) неперервний сиґнал має фінітний спектр, тобто належить ґільбертовому просторові сиґналів з обмеженим спектром;

б) частота дискретизації задовольняє критерій Найквіста:

$$F_d \geq 2F_{\max}\,; \qquad (2)$$

в) квантування — рівномірне, лінійне, крок квантування c задовольняє умову:

$$c \geq x'_{\max} T_d, \tag{3}$$

де $x'_{\max}$ — максимальна швидкість зміни сигналу, $T_d = 1/F_d$ — інтервал дискретизації;

г) крок квантування c достатньо малий, щоб розподіл значень відліків сигналу в межах кожного з діапазонів квантування вважати рівномірним.

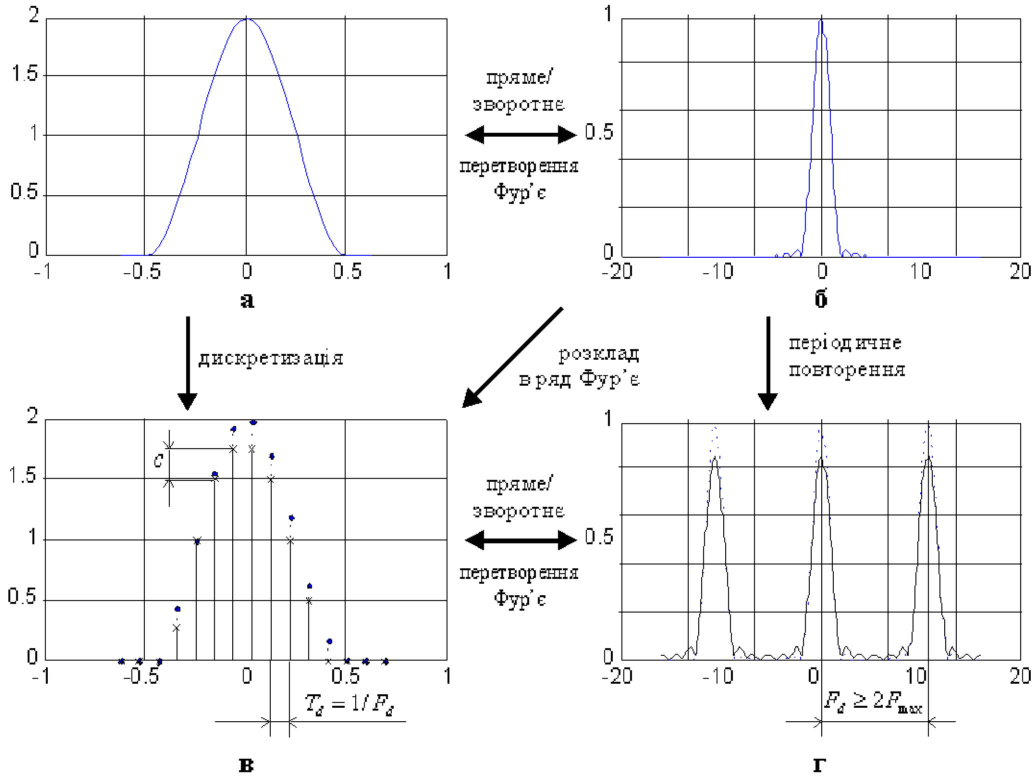

Рис. 1. Цифрування простих сигналів: а — часове подання неперервного сигналу;
б — його спектр; в — цифровий сигнал; г — спектр цифрового сигналу
(·········● – дискретизований сигнал; ——x – цифровий сигнал).

Для ряду практичних задач ці вимоги неможливо задовольнити, зокрема, як зауважується в монографії [10], навіть для відносно простого випадку цифрування детермінованих сигналів з періодично змінною крутизною та випадкових процесів з періодично змінними ймовірнісними характеристиками, припущення про модель похибки цифрування у вигляді білого шуму приводить до результатів ідентифікації натурного макету або імітаційної моделі системи, що відрізняються від очікуваних згідно з розрахунковими даними. При порушенні умови (в), як показано у роботі [11], похибка дискретизації та квантування для випадку гармонічного сигналу є періодично корельованим випадковим процесом (ПКВП), а в статті [12] наведено спосіб ґенерування тестового сигналу у вигляді ПКВП з використанням цього ефекту.

Похибка цифрування складних сигналів

Як уже сказано, внаслідок обмеженості спектра прості сигнали, фінітні в часі можна подати в цифровій формі обмеженою кількістю відліків, так щоб при цьому похибка квантування, яка визначається величиною кванта, подавалася як стаціонарна випадкова послідовність. При дискретизації складних сигналів, тобто сигналів, база яких $Б >> 1$, не виконуються одна або і обидві умови: фінітності в часі (просторі) та обмеженості спектра. Так, у першому випадку — для сигналів з нескінченною тривалістю у часі (або у просторі для випадку зображень) — доводиться обмежувати послідовність відліків часовим (просторовим) вікном, відкидаючи частину з них; у другому — при аналізі сигналів з нефінітним спектром — відбувається взаємне накладання спектрів дискретизованих сигналів, що, зрештою, призводить до виникнення додаткової похибки у вигляді коливань у частотній чи часовій області, злиття частот (коливання Ґібса, елайзинґ тощо) [13]. Нелінійне перетворення, яким є квантування, спричинює появу вищих гармонік та нестаціонарний характер похибки цифрування.

Сиґнали, прийняті від біооб'єкта, як правило, належать до складних сиґналів і тому не задовольняють перерахованих вище умов. Їх можна поділити на два класи: перший — сигнали із періодично змінними характеристиками (наприклад, електрокардіоґрама), другий — сиґнали з зосередженою енерґією типу сплесків, імпульсів (наприклад, томоґрафічні зображення). Періодичні (чи майже періодичні) зміни у сиґналах першого класу пов'язані з ритмічними процесами життєдіяльності орґанізму, при цьому поєднуються випадковість і коливання. Такі незаникаючі у часі сиґнали згідно з [10] належать до класу π — стохастичних сиґналів скінченної середньої потужності, для багатьох задач моделлю таких сиґналів може служити ПКВП. При дискретизації періодично корельованих сиґналів отримуються відліки, які є періодично корельованими послідовностями [10]. При цифруванні сиґналів другого класу — класу ε — стохастичних сиґналів з обмеженою енерґією — внаслідок необмеженого спектра порушуються умови (2) та (3), тому моделлю похибки цифрування не може бути стаціонарна випадкова послідовність.

Для опису сумарної похибки цифрування складних сигналів потрібно використати іншу модель, адекватну досліджуваному сигналові та задачі, що розв'язується. Як відомо з літератури і, зокрема, узагальнено в роботах Я. П. Драґана [10,14], стаціонарна модель дозволяє описати лише найзагальніші властивості природних явищ, а для вивчення "тонкої" структури необхідно використовувати складніші моделі з урахуванням певного роду нестаціонарності в характеристиках сиґналу. Ці нестаціонарності можуть спричинитися не лише природою об'єкта дослідження, явищ, що відображаються у сиґналі, але й способом відбору і перетворення сиґналу, зокрема нестаціонарність або неоднорідність у просторі може з'явитися внаслідок цифрування сиґналу чи зображення.

Так, для випадку складного сиґналу з фінітним носієм (рис. 2 а) його ефективна ширина спектра $F_{еф}$ [9] настільки велика, що для технічно реалізовних значень частоти дискретизації F_d не задовольняється критерій Найквіста (2), тоді зливаютьсяч частоти спектра через період дискретизації (рис. 2 г). Внаслідок наявності у спектрі сиґналу частот, вищих ніж половина частоти дискретизації, порушується умова (в), тому похибка квантування буде нерівномірною, вона залежить від швидкості зміни сиґналу в точці, для якої відбирається дискретний відлік. Вигляд похибки цифрування сильно залежатиме від співвідношення параметрів сиґналу, частоти дискретизації та величини кроку квантування, проте очевидно, що загалом моделлю похибки цифрування складних сиґналів не може бути стаціонарний білий шум. Таким чином, похибка цифрування для розглянутого випадку буде нестаціонарним випадковим процесом.

Для побудови конструктивної моделі, яка дозволить знаходити оцінки характеристик похибки, потрібно визначити тип нестаціонарності, віднести даний випадковий процес до певного класу. Як показано у [7] та використано у [8] впровадження індикаторних відображень дозволяє у конкретних випадках визначити тип нестаціонарності, зокрема виявити періодично корельований характер похибки. Проте громіздкість записів, складність аналітичного аналізу функціональних рядів Вольтерра, що виникають при цьому, викликають необхідність використати інший підхід для апріорного аналізу похибки цифрування таких сиґналів, а саме — імітаційне моделювання.

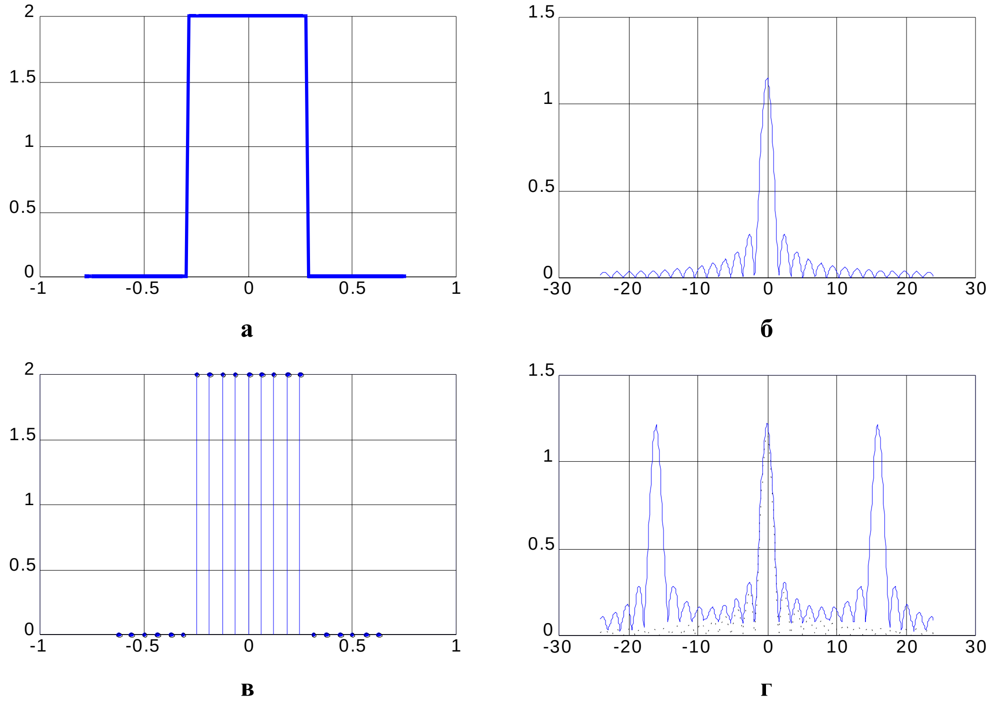

Рис. 2. Цифрування складного сиґналу: а — часове подання неперервного сиґналу; б — його спектр; в — цифровий сиґнал; г — спектр цифрового сиґналу.

Модель похибки у комп'ютерній томоґрафії

Томоґрафічне зображення, подане двовимірною функцією з фінітним носієм (задається перетином біооб'єкта), відображає структуру цього біооб'єкта як складної системи різноманітних органів та тканин. Різні елементарні об'єкти, фінітні у просторі, такі, як кістки та м'які тканини, мають відмінні просторові спектри, що перекриваються між собою. Досліджуваний перетин, що розглядається як цілісний об'єкт, є анізотропним та неоднорідним, тому відображається складним сиґналом, який не можна подати як сукупність простих сиґналів від кожної біолоґічної структури зокрема. Подібні сиґнали використовуються в сучасних системах радіозв'язку під назвою широкосмугових, або радіосиґналів з розсіяним спектром (spread spectrum) [4]. Такий сиґнал не належить до класу сиґналів з обмеженим спектром, тому не може бути поданий без втрат у цифровій формі.

З іншого, практичного боку, існує необхідність цифрового представлення таких сиґналів, оскільки алґоритми реконструювання для більшості видів томоґрафії, зокрема X-променевої, можна зреалізувати лише з використанням цифрових обчислювальних засобів. Розв'язати цю проблему можна, лише використавши іншу (нестаціонарну) модель похибки цифрування. При цьому спотворення внаслідок цифрування, спричинені порушенням умови (а), віднесемо до похибки.

Похибка при реконструюванні за означенням визначає близькість вимірювальної величини до її істинного значення [8]. Для випадку X-променевої томоґрафії вимірювальною величиною є характеристика поглинання X-випромінювання для кожної точки досліджуваного перетину, а "істинним" значенням — величина, що відповідає поняттю медичної "норми", або "норми патолоґії", при дослідженні конкретного її типу.

У томоґрафічному зображенні з різкими границями на межі між м'якими та кістковими тканинами внаслідок спотворення спектра при дискретизації з'являються коливання у часовій (просторовій) області [5]. При квантуванні таких сиґналів отримується випадкова послідовність з періодично змінними у часі характеристиками на обмеженій ділянці сиґналу. Тому на основі теореми про відліки періодично корельованого випадкового процесу (ПКВП) [10, теорема 6.4], згідно з якою множина рівновіддалених відліків $\left\{\xi_k(t_0) \stackrel{\Delta}{=} \xi\left(t_0 + k\frac{T}{N}\right), k \in \mathbf{Z}\right\}$ ПКВП з періодом корельованості T при кроці $T_d = T/N$, де $N \in \mathbf{N}$ — ціле число і $N \neq 1$, творить періодично корельовану випадкову послідовність з періодом корельованості N; за модель похибки цифрування сиґналу приймемо ПКВП. Тоді математичне сподівання та кореляційна функція матимуть властивості [8]:

$$m(t+T) = m(t),\ r(t+T, s+T) = r(t,s). \tag{4}$$

Для перевірки гіпотези про модель похибки у вигляді ПКВП створено імітаційну модель у вигляді пакету програм з використанням мови програмування Pascal та системи Matlab. При цьому за основу взято методику та програмні модулі, що використовувалися для формування тестового сиґналу та алґоритмів аналізу ПКВП для системи екологічно-медичного моніторингу довкілля [8]. Результати імітаційного моделювання для тестового складного сиґналу, подано на рис.2, приведено на рис.3. Як видно з рис.3 (зліва), похибка цифрування складного сиґналу, отримана в результаті чисельного експерименту, є випадковим процесом із змінними в часі характеристиками. Зробивши аналіз кореляційної функції (див. рис. 3, справа) встановлено її періодичність, чим підтверджується гіпотеза про модель похибки як ПКВП.

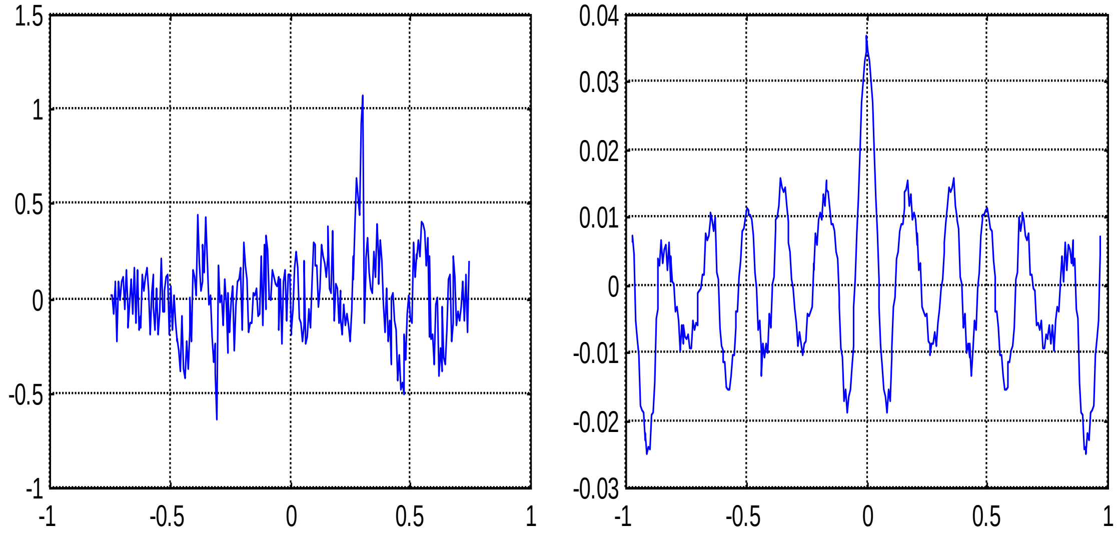

Рис. 3. Похибка цифрування складного сиґналу: зліва — реалізація похибки, справа — її кореляційна функція.

Аналоґічні результати можна отримати, записавши цифрування як згортку з δ-функціями та квантування як нелінійне перетворення, згрупувавши відповідні значення похибки, впровадивши індикаторне відображення, аналогічне підходові, запропонованому в роботі [8]. Випадковість похибки цифрування забезпечує ірраціональне співвідношення періодів різних складових складного сиґналу (томоґрафічного зображення), що задовольняється для реальних даних [15].

Висновки

При реконструюванні томоґрафічних зображень виникає похибка й її моделлю є ПКВП, параметри якого залежать як від співвідношення параметрів дискретизації, так і від властивостей самого досліджуваного біооб'єкта. У процесі обчислювального експерименту підтверджено, що при цифруванні типового томоґрафічного зображення похибка має нестаціонарний характер, а аналіз кореляційної функції дозволяє вважати моделлю цієї похибки ПКВП.

Використання загальнішої моделі похибки цифрування у вигляді ПКВП, що охоплює як особливий випадок стаціонарну модель, дозволяє будувати конструктивні алґоритми числення. Зокрема, використання такої моделі похибки цифрування томоґрафічних зображень дозволяє реґуляризацію в рамках даної моделі, ставити задачу реконструювання як оптимізацію за відповідним критерієм, оптимальне виділення біомедичного сиґналу (зображення) із суміші сиґнал-шум шляхом проекції, використання кореляції, узгодженої фільтрації, розкладу за базисними функціями. У рамках цієї моделі використовується вироблений Я. П. Драґаном математичний апарат енерґетичної теорії лінійних моделей стохастичних сиґналів [10]. Для розглянутого випадку сиґналу, обмеженого у часі, доцільно використати один з методів аналізу ПКВП: компонентний, коґерентний або фільтровий. Кожен з них є оптимальним для аналізу певного виду сиґналів. Так, синфазний (коґерентний) метод за суттю є фільтрацією з імпульсною функцією у вигляді послідовності дельта-імпульсів, ефективний для великої кількості компонент ПКВП; компонентний (фільтрація з функцією передачі, модуль якої має вигляд прямокутного вікна) — ефективний відповідно для малої кількості компонент; а фільтровий — оптимальний для заданої (певної) їх кількості, тобто пов’язаний з побудовою оптимального фільтру [16], що використано також у [8].

The problem of digital representation of the complex finite signals used in exploration of biophysical objects, specifically in computerized tomography, is considered in the article. Non-adequacy of the error model as a stationary random process to problem of such signals digital analysis has been showed. Digitizing error model as a periodically correlated random process for complex finite signals has been suggested. Adequacy of this model and its effectiveness for solving tomographic images reconstruction problem has been confirmed with help of imitative model. This periodically correlated error model may be used for constructive computing algorithms building.

Література

1. Драган Я. П., Сікора Л. С., Яворський Б. І. Основи сучасної теорії стохастичних сиґналів: енерґетична концепція, математичний апарат, фізичне тлумачення. — Львів: Центр стратегічних досліджень екобіотехнічних систем, 1999. — 133 с.
2. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сиґналов. — М.: Связь, 1979. — 416 с.
3. Варакин Л. Е. Теория систем сигналов. — М.: Сов. радио, 1978.
4. Spread spectrum communication handbook. Second revised edition / M. K. Simon, J. K. Omura, R. A Scholtz and B. K. Levitt. — Mc. Graw-Hill, 1994.
5. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Пер. с англ. — М.:Мир, 1990. — 288 с.
6. Теорія електричного зв’язку. Ч. 3 : Підручник / В. Г. Омельченко, В. Г. Санніков — К.: ІЗМН, 1997. — 640 с.
7. Драган Я. П., Яворський Б. І. Векторний простір над булевим полем, індикатори і раціоналізація моделі стохастики // Вісник Державного університету Львівська політехніка. Сер. “Прикладна математика”. - 1998.— №337. —С. 169-172.
8. Система екологічно-медичного моніторингу довкілля: Звіт про НДР (заключний) / Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя. — ДІ 72-97; № ДР 0197U004549; Інв. № 0200U001720. Тернопіль, 1999.
9. Омельченко В. О., Санников В. Г. Теорія електричного зв’язку: Підручник, Ч. 1 / Pf ред. В. О. Омельченка — К.: ІСДО, 1994.
10. Драган Я. Енерґетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів. — Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1997. — 333 с.
11. Драган Я. П., Михайловський В. М. Про один випадок амплітудної похибки дискретизації // ДАН УРСР. — 1961 — №12. — С. 1578–1582.
12. Драган Я. П., Яворский Б. І. Модель шума тестового сигнала в каналах цифровой обработки сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 1986. — 29, № 9. — С. 18-23.
13. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 848 с.
14. К. С.Войчишин, Я. П. Драган, В. И. Куксенко, В. Н. Михайловский. Информационные связи био-гелиогеофизических явлений и элементы их прогноза. — К.: Наукова думка, 1974. — 207 с.
15. Яворський Б.И. Тестовые периодически коррелированные случайные последовательности // Методы представления и обработки случайных сигналов и полей. — Харьков: ХИРЭ, 1989. — с.22.
16. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. — Л.: Гидрометиоиздат, 1987. — 319 с.

Одержано 30.08.2000 р.