Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра електричної інженерії

ЗАДАЧНИК

З РОЗВ'ЯЗКАМИ

ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ З КУРСУ

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Тернопіль
2023

ЗАДАЧНИК З РОЗВ'ЯЗКАМИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ З КУРСУ ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Укладач: к.ф.-м.н., доц. Закордонець В.С.
Рецензент: к.т.н., доцент, Л.Т. Мовчан Л.Т.
Відповідальний за випуск: к.ф.-м.н., доц. Закордонець В.С.

Затверджено на засіданні кафедри електричної інженерії
Тернопільського національного технічного університету
імені Івана Пулюя
Протокол № 1 від 25.08.23 р.

Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні науково-методичної ради факультету прикладних інформаційних технологій та електроінженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Протокол № 1 від 30.08.23 р.

Задачник складено відповідно до навчальної програми з курсу «Теоретичні основи електротехніки» а також літературних джерел, наведених у переліку.

ПЕРЕДМОВА

Задачник містить приклади розв'язування типових задач, присвячених засвоєнню математичного апарату теорії поля. Розглядаються поняття: ґрадієнт, дивергенція, ротор, потік та циркуляція векторного поля. Особлива увага приділена застосуванню теорем Гауса, Стокса та Пойнтінга.

Розглянуто основні методи розрахунку електричного, магнітного та електромагнітного полів: метод рівнянь Гауса, Пуассона та Лапласа для скалярного й векторного потенціалу. Методи суперпозиції, електростатичної аналогії, дзеркального зображення та ін.. Особлива увага приділена розрахунку електромагнітного поля методом рівнянь Максвелла. Задачник містить задачі для самостійної роботи, аналогічні тим, які вже розв'язані. Задачі подано в кількості, необхідній як для аудиторних, так і для домашніх завдань.

Методична розробка сприятиме покращенню якості навчального процесу, поглибленню знань і навичок з курсу „Теоретичні основи електротехніки”.

Практична робота №1

Елементи теорії поля

Задача 1. Електричне поле описується скалярною функцією поля $\varphi(x,y,z)=2x^2+2y+z^3$. Знайдіть градієнт функції. Обчисліть швидкість та напрямок зростання функції в точці *M(-1;2;1).*

Розв'язок. Згідно з означенням градієнта

$$grad(\varphi)=\nabla\varphi=\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

де $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ - оператор Гамільтона.

Знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2+2y+z^3\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2\right)=4x;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2+2y+z^3\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y\right)=2;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(2x^2+2y+z^3\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(z^3\right)=3z^2.$$

Підставляючи отримані похідні, для градієнта скалярної функції поля отримаємо:

$$grad(\varphi)=\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\vec{i}(4x)+\vec{j}(2)+\vec{k}\left(3z^2\right).$$

Обчислимо градієнт функції в точці *M(-1;2;1)*

$$grad\ \varphi\big|_M=\vec{i}4(-1)+\vec{j}(2)+\vec{k}3\left(1^2\right)=-4\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}.$$

Швидкістю зростання функції в точці *M* є модуль градієнта функції в цій же точці:

$$\left|grad\ \varphi\right|_M=\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(3)^2}=\sqrt{29}.$$

Напрямок зростання функції визначається одиничним вектором

$$\vec{n}=\frac{grad\ \varphi\big|_M}{\left|grad\ \varphi\right|_M}=\frac{-4\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{29}}=-\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{k}.$$

Задача 2. Електричне поле описується скалярною функцією поля $\varphi(x,y,z) = x^3 + 3y^2 + z^2$. Знайдіть градієнт функції. Обчисліть швидкість та напрямок зростання функції в точці М(-1;2;1).

(Виконайте самостійно).

Задача 3. Напруженість електричного поля описується векторною функцією поля $\vec{E}(x,y,z) = \vec{i}2x^2 + \vec{j}3y^2 + \vec{k}z^3$. Знайдіть дивергенцію функції. Обчисліть дивергенцію функції в точці *M(1;-2;1).*

Згідно із означенням вектора

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z,$$

де E_x, E_y *і* E_z – проекції вектора на відповідні осі координат.

Очевидно, що:

$E_x = 2x^2$; $E_y = 3y^2$; $E_z = z^3$.

Згідно з означенням дивергенції вектора

$$div\ \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2\right) = 4x;$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2\right) = 6y;$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^3\right) = 3z^2.$$

Підставляючи отримані похідні, для дивергенції векторної функції поля отримаємо:

$$div\ \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4x + 6y + 3z^2.$$

Обчислимо дивергенцію функції в точці *M(1;-2;1*)

$$div\ \vec{A}\Big|_M = 4\cdot 1 + 6\cdot(-2) + 3\left(1^2\right) = -5.$$

Задача 4. Напруженість електричного поля описується векторною функцією поля $\vec{E}(x,y,z)=\vec{i}x^3+\vec{j}y^2+\vec{k}z^2$. Знайдіть дивергенцію функції. Обчисліть дивергенцію функції в точці *M(1;-2;1).*
(Виконайте самостійно).

Задача 5. Напруженість магнітного поля описується векторною функцією поля $\vec{H}(x,y,z)=\vec{i}z^2+\vec{j}x^2+\vec{k}y^2$. Знайдіть ротор функції. Обчисліть ротор функції в точці *M(-1;2;1).*

Згідно із означенням вектора

$$\vec{H}(x,y,z)=\vec{i}H_x+\vec{j}H_y+\vec{k}H_z,$$

де H_x, H_y *і* H_z – проекції вектора на відповідні осі координат.

Очевидно, що:

$H_x=z^2;\ H_y=x^2;\ H_z=y^2.$

Згідно з означенням ротора вектора

$$rot\ \vec{H}=\left[\nabla\vec{H}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right).$$

Знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z^2\right)=0;\ \frac{\partial H_x}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right)=2z;$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)=2x;\ \frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2\right)=0;$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right)=0;\ \frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)=2y.$$

Підставляючи отримані похідні, для ротора векторної функції поля отримаємо:

$$rot\ \vec{H}=\vec{i}(2y-0)+\vec{j}(2z-0)+\vec{k}(2x-0)=\vec{i}(2y)+\vec{j}(2z)+\vec{k}(2x).$$

Обчислимо ротор функції в точці *M(-1;2;1).*

$$rot\ \vec{H}\Big|_M=\vec{i}(2\cdot 2)+\vec{j}(2\cdot 1)+\vec{k}(2\cdot -1)=4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}.$$

Задача 6. Напруженість магнітного поля описується векторною функцією поля $\vec{H}(x,y,z)=\vec{i}z^3+\vec{j}x^3+\vec{k}y^3$. Знайдіть ротор функції. Обчисліть ротор функції в точці *M(1;1;1)*.

(Виконайте самостійно).

Задача 7. Обчисліть

$$grad(3x+2y-2z)=\left(\vec{i}\,\frac{\partial(3x+2y-2z)}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial(3x+2y-2z)}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial(3x+2y-2z)}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial(3x+2y-2z)}{\partial x}=3,\qquad \frac{\partial(3x+2y-2z)}{\partial y}=2,\qquad \frac{\partial(3x+2y-2z)}{\partial z}=-2$$

$$grad\,(3x+2y-2z)=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}.$$

Задача 8. Обчисліть $div\left(\vec{i}3x+\vec{j}2y+\vec{k}z\right)$.

$$div\left(\vec{i}3x+\vec{j}2y+\vec{k}z\right)=\frac{\partial 3x}{\partial x}+\frac{\partial 2y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3+2+1=6.$$

Задача 9. Обчисліть $rot\left(\vec{i}2z+\vec{j}2x\right)$

$$rot\left(\vec{i}2z+\vec{j}2x+\vec{k}0\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2z & 2x & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y}-\frac{\partial 2x}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial 2z}{\partial z}-\frac{\partial 0}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial 2x}{\partial x}-\frac{\partial 2z}{\partial y}\right)=$$

$$=\vec{i}(0-0)+\vec{j}(2-0)+\vec{k}(2-0)=2\vec{j}+2\vec{k}$$

Задача 10. Обчисліть $div(rot\ \vec{A})$, де $\vec{A}=\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z$.

$$div(rot\ \vec{A})=div\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=div\left[\vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}=0$$

Задача 11. Обчисліть $rot(grad\varphi)$.

(Виконайте самостійно).

Практична робота №2

Розрахунок електростатичного поля

Задача 1 Електричне створюється точковим зарядом q_1*=50нКл*. Знайдіть напруженість електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані *r=0.25м* від заряду. Знайдіть силу, яка діє на точковий заряд q_2*=5нКл* поміщений в цю точку.

Розв'язок. Електричне поле точкового заряду має сферичну симетрію, тому напруженість має лише одну складову - радіальну

$$E_r = \left|\vec{E}\right| = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

де $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$Ф/м - електрична постійна.

Знайдемо напруженість

$$E_r = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{50 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} (0.25)^2} = 7190\ Н/Кл.$$

Знайдемо силу, яка діє на точковий заряд q_2. Оскільки заряди однойменні, то вони відштовхуються із силою

$$F = q_2 E_r = 5 \cdot 10^{-9} \cdot 7.19 \cdot 10^3 = 35.95 \cdot 10^{-6}\ Н.$$

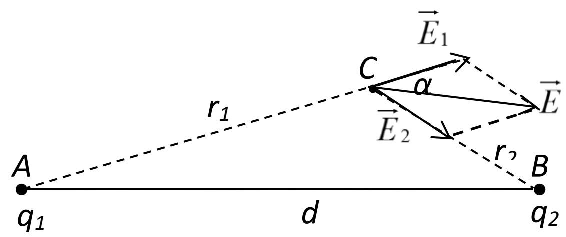
Задача 2 Електричне створюється точковим зарядом q_1*=80нКл*. Знайдіть напруженість електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані *r=0.35м* від заряду. Знайдіть силу, яка діє на точковий заряд q_2*=10нКл* поміщений в цю точку.

(Виконайте самостійно)

Задача 3 Електричне поле створюється двома точковими зарядами q_1*=30нКл* і q_2*=-10нКл*. Відстань між зарядами *d=0.2м*. Знайдіть напруженість електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані r_1*=0.15м* від першого і на відстані r_2*=0.10м* від другого заряду.

Розв'язок. Згідно з принципом суперпозиції, кожний заряд створює електричне поле незалежно від інших зарядів. Напруженість електричного поля $\vec{E}$ в точці *C* може бути знайдена як геометрична сума напружености $\vec{E}_1$ і напружености $\vec{E}_2$, створених кожним зарядом окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$



Вектор $\overrightarrow{E_1}$ направлений по силовій лінії від заряду q_1, тому що заряд q_1 позитивний. Вектор $\overrightarrow{E_2}$ направлений по силовій лінії до заряду q_2, оскільки заряд q_2 негативний.

Модуль напруженості електричного поля, яка створюється першим зарядом:

$$E_1 = \left|\vec{E}_1\right| = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2},$$

а другим зарядом

$$E_2 = \left|\vec{E}_2\right| = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

Модуль вектора $\vec{E}$ знайдемо по правилу паралелограма із теореми косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}$$

де α - кут між векторами $\overrightarrow{E_1}$ і $\overrightarrow{E_2}$. Косинус кута може бути знайдений із трикутника *ACB* по теоремі косинусів:

$$\cos\ \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0.25.$$

Виконаємо обчислення:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1}{r_1^2}\frac{q_2}{r_2^2}\cos\alpha} = 1.67\cdot 10^4\ \text{V/m}.$$

Задача 4 Вздовж тонкого металевого стержня довжиною *L* рівномірно розподілений електричний заряд *q*. Знайдіть напруженість електричного поля в точці *C*, яка знаходиться на відстані r_0 від осі стержня, і яку з лівого і правого кінців стержня видно під кутами β_1 і β_2 відповідно. Який кут утворює вектор напруженості з перпендикуляром, проведеним до стержня.

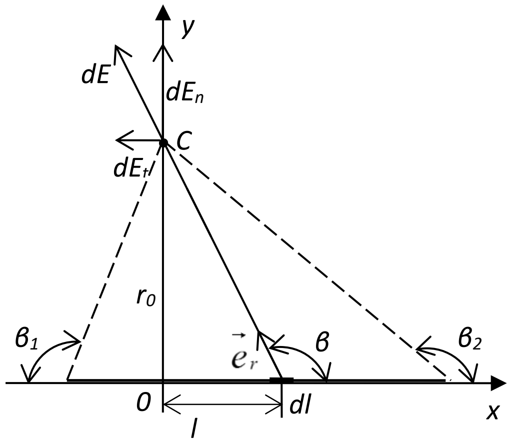
Розв'язок. Виділимо на стержні нескінченно малу ділянку довжиною dl. Знайдемо елементарний заряд ділянки:

$$dq = \tau dl,$$

де τ – лінійна густина заряду.

Оскільки заряд розподілений рівномірно, то лінійна густина заряду

$$\tau = \frac{q}{L}.$$



Очевидно, що ділянку стержня можна вважати точковим зарядом. Знайдемо напруженість, яку він створює в точці C:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{r^2}\vec{e}_r,$$

де r- відстань від виділеного елемента до точки C, $\vec{e}_r$- одиничний вектор, направлений в точку C.

Знайдемо тангенціальну складову вектора $d\vec{E}$

$$dE_t = dE\cos(\pi - \beta) = -\frac{\tau\cos\beta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dl.$$

Знайдемо нормальну складову

$$dE_n = dE\sin(\pi - \beta) = \frac{\tau\sin\beta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dl.$$

Кут β будемо відраховувати від позитивного напрямку осі абсцис до напрямку одиничного вектора $\vec{e}_r$ Перейдемо від багатьох змінних до одної – кута β. Із рисунка видно, що

$$r = \frac{r_0}{\sin\beta}, \qquad l = r_0 cth(\pi - \beta) = -h\ cth(\beta).$$

Диференціюючи l знайдемо

$$dl = \frac{r_0 d\beta}{\sin^2 \beta}.$$

Після заміни змінних та інтегрування отримаємо:

$$E_t = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos\beta d\beta = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0 L} \left(\sin\beta_1 - \sin\beta_2 \right);$$

$$E_n = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta d\beta = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0 L} \left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2 \right);$$

Знайдемо модуль напруженості електричного поля

$$E = \sqrt{E_t^2 + E_n^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0 L} \sqrt{\left(\sin\beta_1 - \sin\beta_2 \right)^2 + \left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2 \right)^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0 L} \sqrt{(\sin^2\beta_1 + \cos^2\beta_1)^2 + (\sin^2\beta_2 + \cos^2\beta_2)^2 - 2\left(\cos\beta_1 \cos\beta_2 + \sin\beta_1 \sin^2\beta_2 \right)} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0 L} \sqrt{2 - 2\cos\left(\beta_2 - \beta_1 \right)} = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0 L} \sqrt{1 - \cos\left(\beta_2 - \beta_1 \right)}$$

Знайдемо кут, який кут утворює вектор напруженості з перпендикуляром, проведеним до стержня.

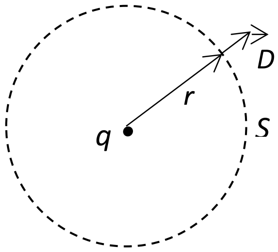
$$\varphi = arctg\, \frac{E_t}{E_n} = arctg\, \frac{\left(\sin\beta_1 - \sin\beta_2 \right)}{\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2 \right)}.$$

Задача 5 Вздовж тонкого металевого стержня довжиною 46*.2см* рівномірно розподілений електричний заряд *40нКл*. Знайдіть напруженість електричного поля в точці *С*, яка знаходиться на відстані *10см* від осі стержня, і яку з лівого і правого кінців стержня видно під кутами 30° і 120° відповідно. Який кут утворює вектор напруженості з перпендикуляром, проведеним до стержня.

(Виконайте самостійно)

Задача 6 Електричне створюється точковим зарядом q_1*=200нКл*. Знайдіть електричну індукцію в точці, яка знаходиться на відстані *r=0.05м* від заряду.

Розв'язок. Проведемо сферичну поверхню радіусом *r*. Електричне поле має сферичну симетрію, тому вектор електричної індукції $\vec{\mathrm{D}}$ має тільки радіальну складову $\left| \vec{D} \right| = D_r$.



Для всіх точок, рівновіддалених від початку координат радіальна складова D_r має одну і ту ж величину. Знайдемо потік вектора електричної індукції через сферичну поверхню

$$N = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_r \oint_S dS = D_r 4\pi r^2 .$$

По теоремі Гауса

$$N = q, \;\Rightarrow D_r 4\pi r^2 = q .$$

Знайдемо електричну індукцію

$$D = D_r = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{200 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 6.37 \cdot 10^{-6}\ Кл/м^2 .$$

Задача 7 Електричне створюється точковим зарядом $q_1=100нКл$. Знайдіть електричну індукцію в точці, яка знаходиться на відстані $r=2см$ від заряду.

(Виконайте самостійно)

Задача 8 В деякій області діелектрика, яка обмежена сферою радіусом r_0. рівномірно розподілений заряд q. Знайдіть розподіл напруженості електричного поля, якщо відносна діелектрична проникність діелектрика ε.

Розв'язок. Проведемо сферичну поверхню радіусом $r \geq r_0$. Заряджена область має сферичну симетрію, тому вектор електричної індукції $\vec{\mathrm{D}}$ має тільки радіальну складову.

Для всіх точок рівновіддалених від початку координат модуль вектора $\vec{\mathrm{D}}$ (а отже і $\vec{E}$) буде мати одну і ту ж величину.

Знайдемо потік вектора електричної індукції через сферичну поверхню

$$N = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = D \oint_S dS = D 4\pi r^2 .$$

По теоремі Гауса

$$N = q, \ \Rightarrow D 4\pi r^2 = q .$$

Знайдемо електричну індукцію

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} .$$

Знайдемо напруженість електричного поля. Оскільки при $r \geq r_0$, $\varepsilon = 1$ то

$$E\big|_{r \geq r0} = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} .$$

Знайдемо об'ємну густина заряду ρ. Оскільки заряд розподілений рівномірно, то

$$\rho = \frac{q}{V} = q \Big/ \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{3q}{4\pi r_0^3} ,$$

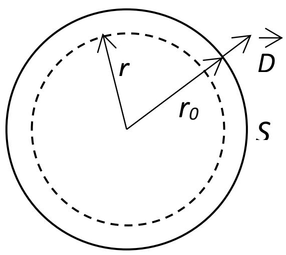
де $V = \frac{4}{3}\pi \ r_0^3$ – об'єм зарядженої області.

Проведемо сферичну поверхню радіусом $r < r_0$. Заряд об'єму, який обмежений цією поверхнею

$$q = \frac{4}{3}\pi \ r^3 \rho = q \frac{r^3}{r_0^3} ,$$

По теоремі Гауса

$$N = q, \ \Rightarrow D 4\pi r^2 = q \frac{r^3}{r_0^3} .$$



Знайдемо електричну індукцію

$$D = \frac{q}{4\pi r_0^3} r \, .$$

Напруженість електричного поля

$$E\Big|_{r<r0} = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0^3} r \, .$$

Практична робота №3

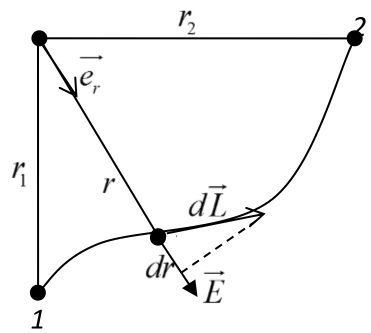
Розрахунок електростатичного поля

Задача 1 Електричне створюється точковим зарядом *q_1=50нКл*. Знайдіть потенціал електричного поля в точках *1* і *2*, які знаходяться на відстані *r_1=0.15м* і *r_2=0.25м* від заряду *q_1*. Знайдіть різницю потенціалів між точками. Яку роботу виконає електричне поле при переміщенні точкового заряду *q_2=5нКл* від точки *1* до токи *2*. Відносна діелектрична проникність середовища *ε=2,* $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\, Ф/м$.

Розв'язок. Точковий заряд створює потенціал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \, ,$$

де *q*- величина заряду, *ε*- відносна діелектрична проникність середовища, *r* - відстань до точки спостереження.



Обчислимо потенціали в точках *1* і *2*

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{50 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.15} = 1500\, В,$$

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{50 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.25} = 900\, В.$$

Обчислимо різницю потенціалів між точками

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 1500 - 900 = 600\, В.$$

Обчислимо роботу, яку виконає електричне поле при переміщенні точкового заряду q_2

$$A_{12} = q_2(\varphi_1 - \varphi_2) = 5\cdot10^{-9}\cdot600 = 3\cdot10^{-6}Дж.$$

Задача 2 Електричне створюється точковим зарядом $q_1=30нКл$. Знайдіть потенціал електричного поля в точках *1* і *2*, які знаходяться на відстані $r_1=0.20м$ і $r_2=0.35м$ від заряду q_1. Знайдіть різницю потенціалів між точками. Яку роботу виконає електричне поле при переміщенні точкового заряду $q_2=8нКл$ з точки *1* в току *2*.

(Виконайте самостійно)

Задача 3. Обчисліть електростатичний потенціал, який створюється точковими зарядами $q_1=3nC$ і $q_2=-5nC$ в точці, яка знаходиться відстані $r_1=0.25м$ від першого і $r_2=0.15м$ від другого заряду. (ε=1).

Розв'язок. Обчислимо потенціали, які створюються точковими зарядами q_1 і q_2

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{3\cdot10^{-9}}{4\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\cdot0.25} = 108\,V,$$

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{-5\cdot10^{-9}}{4\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\cdot0.15} = -300V\,.$$

Скористаємося принципом суперпозиції. Потенціал знайдемо як алгебраїчну суму потенціалів окремих зарядів

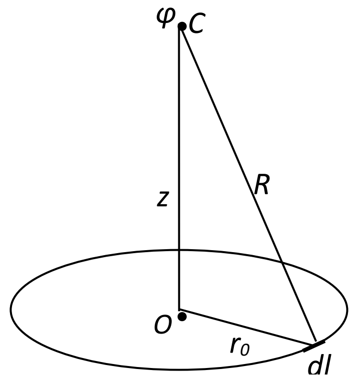
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 108 - 300 = -192V\,.$$

Задача 4. Уздовж металевого кільця радіусом r_0 рівномірно розподілений електричний заряд q. Знайдіть потенціал та напруженість електричного поля на осі кільця на відстані z від центра.

Розв'язок. Скористаємося принципом суперпозиції для потенціалу. Розіб'ємо кільце на точкові заряди dq, кожен із яких в точці C створює потенціал

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{r_0^2 + z^2}}\,,$$

де $\tau = q/2\pi r_0$ - лінійна густина заряду, $2\pi r_0$ - довжина кільця, $R = \sqrt{r_0^2 + z^2}$ – відстань від елементарного заряду до до точки C.



Потенціал знайдемо шляхом інтегрування по довжині кільця

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^{2\pi\, r_0} \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{r_0^2 + z^2}} = \frac{2\pi\; r_0\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{r_0^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{r_0^2 + z^2}}.$$

Знайдемо напруженість на осі диска

$$E(z) = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d}{dz}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{r_0^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} = \frac{qz}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(\sqrt{r_0^2 + z^2}\right)^3}.$$

Задача 5. Уздовж металевого кільця радіусом *3см* рівномірно розподілений електричний заряд *15нКл.* Обчисліть потенціал електричного поля на осі кільця на відстані *5см* від центра.

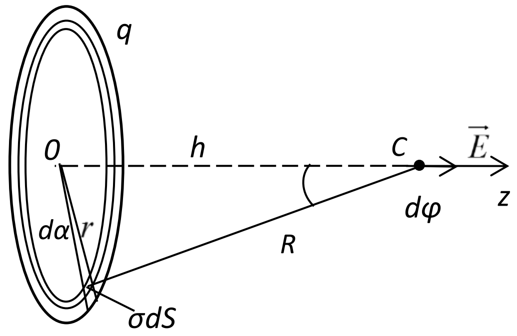
(Виконайте самостійно)

Задача 6 По поверхні металевого диска радіусом r_0 рівномірно розподілений електричний заряд. Знайдіть розподіл потенціау та напруженості електричного поля вздовж осі кільця, якщо поверхнева густина заряду σ, а відносна діелектрична проникність середовища ε.

Виділимо на диску кільце радіусом r товщиною dr. На кільці виберемо елементарну площадку dS шириною $rd\alpha$. Її площа $dS=rdrd\alpha$, а заряд $dq=\sigma rdrd\alpha$. Заряд площадки можна вважати точковим. Він в точці C створює потенціал

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma rdrd\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R},$$

де $R = \sqrt{r^2 + h^2}$ - відстань від виділеного елемента до точки спостереження.



Використаємо принцип суперпозиції для потенціалу. Інтегруючи по поверхні диска, для потенціалу отримаємо

$$\varphi = \iint d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r0} \frac{rdr}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\sqrt{\left(r_0^2+h^2\right)}-h\right).$$

Знайдемо напруженість на осі диска

$$E(h) = -\frac{d\varphi}{dh} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{d\left(\sqrt{\left(r_0^2+h^2\right)}-h\right)}{dh} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{r_0^2+h^2}}\right).$$

У випадку диска нескінченно великого радіуса ($r_0 \to \infty$) отримаємо напруженість рівномірно зарядженої площини

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Задача 7. Точковий заряд q в середовищі з відносною діелектричною проникністю ε створює потенціал $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$. Знайдіть закон зміни напруженості електричного поля. Обчисліть вектор напруженості електричного поля в точці *C(2;-1;2)*, якщо *q=5нКл*, а *ε=2.2*, $\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}$ *Ф/м*.

Розв'язок. Вектор напруженості електричного поля знайдемо із формули

$$\vec{E} = -grad\ \varphi = -\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

Знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2x =$$

$$= -\frac{qx}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2y=$$

$$=-\frac{qy}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2z=$$

$$=-\frac{qz}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2};$$

Підставимо часткові похідні

$$\vec{E}=-\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Обчислимо вектор напруженості електричного поля в точці C

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=0.76\left(2\vec{i}-\vec{j}y+2\vec{k}\right)В/м.$$

Задача 8. Точковий заряд q в середовищі з відносною діелектричною проникністю ε створює потенціал $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$. Знайдіть закон зміни напруженості електричного поля. Обчисліть вектор напруженості електричного поля в точці *C(-3;1;-2),* якщо *q=15нКл, ε=2,* $\varepsilon_0=8.85\cdot10^{-12}\,Ф/м$.

(Виконайте самостійно)

Задача 9. В діелектрику, який знаходиться між електродами плоского конденсатора потенцал змінюється по закону $\varphi_0-b(x/d)-a(x/d)^3$, де *a, b* і φ_0 - постійні. Знайдіть вільний заряд між електродами, якщо відстань між ними *d*, площа електродів S, відносна діелектрична проникність діелектрика *ε*.

Розв'язок. Густину заряду між електродами знайдемо із рівняння Пуассона

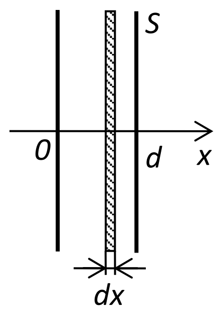
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

звідки

$$\rho=-\varepsilon\varepsilon_0\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\varepsilon\varepsilon_0\frac{d^2}{dx^2}\left(\varphi_0-b(x/d)-a(x/d)^3\right)=\frac{6\varepsilon\varepsilon_0 ax}{d^3}.$$

Між електродами, на відстані x від початку координат уявно виділимо шар товщиною dx і знайдемо його заряд

$$dq = \rho dV = \frac{6\varepsilon\varepsilon_0 aS}{d^3} xdx.$$



Заряд між електродами знайдемо шляхом інтегрування по об'єму діелектрика

$$q = \int \rho dV = \int_0^d \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 a}{d^2} Sdx = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 aS}{d}.$$

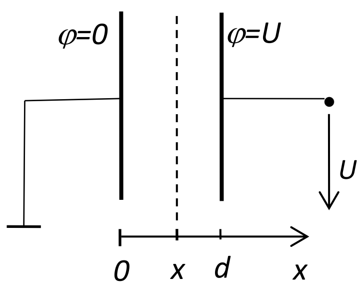
Задача 10. В діелектрику, який знаходиться між електродами плоского конденсатора потенцал змінюється по закону $\varphi = \varphi_0 - b(x/d) - a(x/d)^2$, де a, b і φ_0 - постійні. Знайдіть вільний заряд між електродами, якщо відстань між ними d, площа електродів S, відносна діелектрична проникність діелектрика ε.

(Виконайте самостійно)

Задача 11. Між електродами плоского конденсатора, знаходиться заряд з об'ємною густиною $\rho = -\rho_0 (x/d)$, де ρ_0 - постійна. Знайдіть закон зміни потенціалу між електродами, якщо відстань між електродами d, лівий електрод конденсатора заземлений, а потенціал правого - U.

Розв'язок. Потенціал знайдемо із рівняння Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon\varepsilon_0 d} x.$$



Двічі інтегруючи по координаті, знайдемо закон зміни потенціалу:

$$\varphi(x) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0 d} x^3 + C_1 x + C_2 .$$

Постійні інтегрування C_1 і C_2 знайдемо із граничних умов

$$\varphi(0) = C_2 = 0 ,$$

$$\varphi(d) = U = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0 d} d^3 + C_1 d + C_2 .$$

Звідси для постійних інтегрування отримаємо

$$C_1 = \frac{U}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon\varepsilon_0} ,\ C_2 = 0 .$$

Підставляючи постійні C_1 і C_2, розподіл потенціалу знайдемо у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{\rho_0 d^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} \left(\left(\frac{x}{d} \right)^2 - 1 \right) \left(\frac{x}{d} \right) + U \left(\frac{x}{d} \right).$$

Задача 12. Між електродами плоского конденсатора, знаходиться заряд з об'ємною густиною ρ_0. Знайдіть закон зміни потенціалу між електродами, якщо відстань між електродами рівна *d*, правий електрод конденсатора заземлений, а потенціал лівого - *U*.

(Виконайте самостійно)

Задача 13. В середовищі з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon=2$ напруженість електростатичного поля складає $E=2\cdot10^5$ *В/м*. Обчисліть об'ємну щільність енергії електростатичного поля.

Розв'язок. Об'ємна щільність енергії визначається співвідношенням

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{2\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\left(2\cdot 10^5\right)^2}{2} = 0.35\ Дж/м^3$$

Задача 14. Простір між електродами плоского конденсатора заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon=8$. Обчисліть об'ємну щільність енергії електростатичного поля, якщо до конденсатора прикладена напруга $U=500В$, а відстань між електродами $d=0.1мм$. Обчисліть енергію конденсатора, якщо площа електродів $S=2см^2$.

Розв'язок. Знайдемо напруженість електростатичного поля між електродами конденсатора

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100}{10^{-4}} = 10^{6}\ В/м.$$

Знайдемо об’ємну щільність енергії

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{8 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\left(2 \cdot 10^{6}\right)^2}{2} = 35.4\,Дж/м^3.$$

Знайдемо енергію конденсатора

$$W_e = w_e \cdot V = w_e \cdot S \cdot d = 35.4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4} = 0.35 \cdot 10^{-6}\,Дж.$$

Практична робота №4

Розрахунок електричного поля постійного струму

Задача 1. Через поперечний переріз мідного провідника радіусом $r_0 = 0.5мм$ протікає струм $I=500\ мА$. Обчисліть модуль густини струму і напруженості електричного поля в провіднику, якщо питома повідність міді $\sigma=5.96 \cdot 10^7\ См/м$.

Розв'язок. Модуль густини струму визначається як

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi\, r_0^2} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{\pi\left(0.5 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 63.66 \cdot 10^3\,А/м^2,$$

де $S = \pi\, r_0^2$ - площа поперечного перерізу провідника.

Напруженість електричного поля в провіднику знайдемо із закону Ома в диференціальній формі

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{63.66 \cdot 10^3}{5.97 \cdot 10^7} = 1.07 \cdot 10^{-3}\,В/м.$$

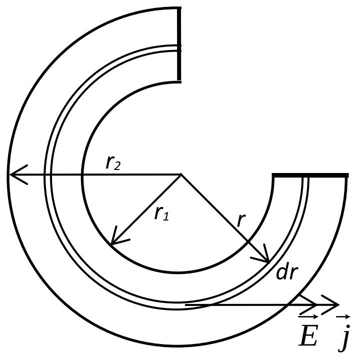
Задача 2. Через поперечний переріз мідної труби з внутрішнім радіусом $r_1 = 5мм$ і зовнішнім $r_1 = 8мм$ протікає струм $I=50А$. Обчисліть модуль густини струму і напруженості електричного поля в трубі, якщо питома повідність міді $\sigma=5.96 \cdot 10^7\ См/м$.

(Виконайте самостійно)

Задача 3. Через поперечний переріз алюмінієвого провідника радіусом $r_0 = 2мм$ протікає струм $I=50\ А$. Обчисліть модуль густини струму і напруженості електричного поля в провіднику, якщо питома повідність алюмінію $\sigma=3.5 \cdot 10^7 См/м$.

(Виконайте самостійно)

Задача 4. Вуглецева пластина має форму 3/4 диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска *r₁*, зовнішній – *r₂*. Між краями, до яких приєднані мідні електроди, підтримується постійна напруга U. Знайдіть залежність густини струму і питомої потужності в пластині від радіуса, якщо питома провідність вуглецю σ. Знайдіть мінімальну і максимальну густину струму та мінімальну і максимальну питому потужність.



Розв'язок. На відстані r від центра диска виділимо смугу товщиною dr. В межах смуги густина струму, а отже і напруженість електричного поля, будуть постійними. Напруженість знайдемо із закону Ома в диференціальній формі

$$E = \frac{j}{\sigma}.$$

Знайдемо напругу між краями

$$U = \int_0^{\frac{3}{4}2\pi r} \vec{E}d\vec{l} = E\frac{3}{2}\pi\ r.$$

З отриманих рівнянь знайдемо густину струму

$$j = \frac{2U}{3\pi\ r}.$$

Знайдемо мінімальну і максимальну густину струму

$$j_{\min} = \frac{2U\sigma}{3\pi\ r_2}, \qquad j_{\max} = \frac{2U\sigma}{3\pi\ r_1}.$$

Питому потужність знайдемо із закону Джоуля в диференціальній формі

$$p = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{4U^2}{9\pi^2\sigma\ r^2}.$$

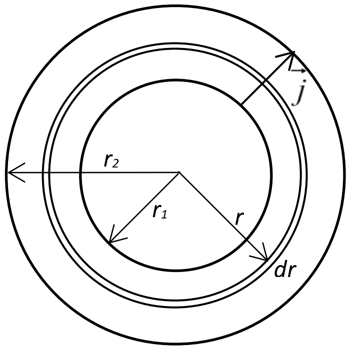
Знайдемо мінімальну і максимальну питому потужність

$$p_{\min} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{4U^2}{9\pi^2 \sigma\ r_2^2},\ p_{\max} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{4U^2}{9\pi^2 \sigma\ r_1^2}.$$

Задача 5. Вуглецева пластина має форму 2/3 диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска r_1, зовнішній – r_2. Між краями, до яких приєднані мідні електроди, підтримується постійна напруга U. Знайдіть залежність густини струму і питомої потужності в пластині від радіуса, якщо питома провідність вуглецю σ. Знайдіть мінімальну і максимальну густину струму та мінімальну і максимальну питому потужність.

(Виконайте самостійно)

Задача 6. Нагрівач води має вигляд двох металевих коаксіальних циліндрів з внутрішнім радіусом r_1*=10см*, зовнішним r_2*=15см* і висотою *h=20см*. Простір між циліндрами заповнений водою з питомою провідністю *σ=0.02См/м.* Знайдіть потужність нагрівача та питому потужність, якщо між циліндрами підтримується постійна різниця потенціалів *U=220В*.



Розв'язок. Внаслідок циліндричної симетрії нагрівача вектори напруженості електричного поля і густини струму мають тільки радіальну складову і на однакових відстанях від осі будуть мати однакову величину. Всередині нагрівача проведемо коаксіальну циліндричну поверхню радіусом r $(r_1 \le r \le r_2)$ і обчислимо потік через неї вектора густини струму

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 2\pi\ hrj.$$

Знайдемо густину струму у воді,

$$j(r) = \frac{I}{2\pi\ hr},$$

де I – струм нагрівача.

Застосуємо закон Ома в диференціальній формі, і знайдемо напруженість електричного поля

$$E(r) = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma\ hr}.$$

Напругу між циліндрами знайдемо шляхом інтегрування

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr = \int \frac{I}{2\pi\sigma\ hr}dr = \frac{I}{2\pi\sigma\ h}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

звідки для струму нагрівача та густини струму отримаємо

$$I = \frac{2\pi\ \sigma hU}{\ln(r_2/r_1)},$$

$$j(r) = \frac{I}{2\pi hr} = \frac{2\pi\ \sigma hU}{2\pi hr\ln(r_2/r_1)} = \frac{\sigma U}{r\ln(r_2/r_1)}.$$

Питому потужність знайдемо із закону Джоуля в диференціальній формі

$$p = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{\sigma^2 U^2}{\sigma\ r^2\ln^2(r_2/r_1)} = \frac{\sigma U^2}{\ln^2(r_2/r_1)}\frac{1}{r^2}.$$

Потужність нагрівача знайдемо із закону Джоуля в інтегральній формі

$$P = UI = \frac{2\pi\ \sigma hU^2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi\cdot 0.02\cdot 0.2\cdot(220)^2}{\ln(20/15)} = 3000\ Bm.$$

Задача 7. Сферичний заземлювач радіусом *r_0=20см* розміщений в грунті на глибині *h=1.8м*. До заземлювача при допомозі ізольованої шини підводиться струм *I=100A*. Обчисліть опір заземлення і крокову напругу на відстані *l=2м* від основи заземлення, якщо питома провідність ґрунту *σ=0.02См/м*, а довжина кроку людини *l_0=0.8м*.

Розв'язок.

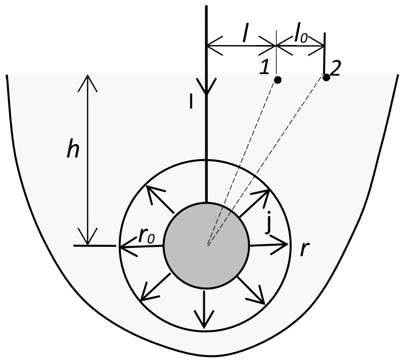
Оскільки заземлювач знаходиться на глибині *$h>>r_0$* то можна знехтувати впливом поверхні землі і вважати, що лінії струму розходяться від поверхні сфери радіально. Уявно оточимо заземлювач сферою радіуса *$r>r_0$* і знайдемо густину струму на поверхні сфери

$$j = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

Із закону Ома в диференціальній формі знайдемо напруженість електричного поля на поверхні сфери

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma\ r^2}\ .$$

де σ - провідність ґрунту.



Знайдемо розподіл електричного потенціалу в землі

$$\varphi(r) = -\int E dr + C = -\int \frac{I}{4\pi\ \sigma r^2} dr + C = \frac{I}{4\pi\ \sigma r} + C\ ,$$

де C – постійна інтегрування.

Оскільки потенціал нескінченно віддалених від заземлювача точок $\varphi_\infty=0$, то C=0. Для розподілу потенціалу в землі отримаємо

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\sigma\ r}\ .$$

Знайдемо потенціал поверхні заземлювача

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\sigma\ r_0}\ .$$

Опір заземлення знайдемо із закону Ома в інтегральній формі

$$R = \frac{\varphi_0 = \varphi_\infty}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma\ r_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 0.02 \cdot 0.2} = 19.9\, Ом.$$

Знайдемо потенціали точок *1* і *2*, які знаходяться на поверхні землі на відстані l_0 одна від одної

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma\sqrt{h^2 + l^2}}\ ,\ \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma\sqrt{h^2 + \left(l + l_0\right)^2}}\ .$$

Знайдемо крокову напругу

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + l^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + (l + l_0)^2}}\right) =$$

$$= \frac{100}{4\pi \cdot 0.02}\left(\frac{1}{\sqrt{1.8^2 + 2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1.8^2 + 2.8^2}}\right) = 28.3B.$$

Практична робота №5

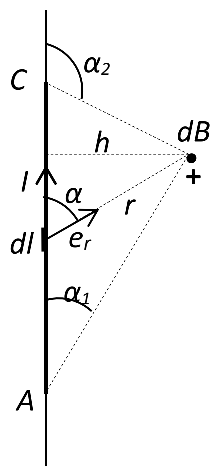
Розрахунок магнітного поля постійного струму

Задача 1. Знайдіть магнітну індукцію, яка створюється відрізком тонкого проводу із струмом *I* на відстані *h* від його осі в точці, яку нижнього і верхнього кінців видно під кутом α_1 і α_2 відповідно.

Розв'язок. Поділимо провід на елементарні ділянки довжиною dl. Магнітну індукцію, яку створює окрема ділянка, знайдемо із закону Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l}\vec{e}_r\right]}{4\pi r^2},$$

де *r*- відстань від виділеної ділянки до точки спостереження, $\vec{e}_r$ - одиничний вектор, направлений в точку спостереження.



Для модуля магнітної індукції отримаємо

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl$$

де α – кут між струмом та одиничним вектором.

Згідно з принципом суперпозиції для магнітного поля, кожний струм створює магнітну індукцію незалежно від інших струмів. Індукцію магнітного поля B в точці спостереження знайдемо як суму індукцій окремих ділянок:

$$B = \int dB.$$

Зробимо заміну змінних. Як видно із трикутника ABC

$$r = \frac{h}{\sin\ \alpha}, \qquad dl = \frac{r}{\sin\ \alpha} d\alpha.$$

Підставляючи отримані співвідношення в формулу для dB, знайдемо

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin^2\alpha}{4\pi h^2}\frac{h}{\sin^2\alpha}\sin\ \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I \sin\ \alpha}{4\pi h} d\alpha.$$

Знайдемо індукцію, яка створюється відрізком провода

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi h}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\ d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi h}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

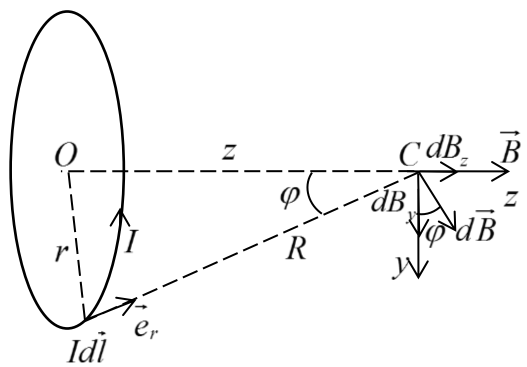
У граничному випадку нескінченно довгого провода $\alpha_1 = 0$, $\cos\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, $\cos\alpha_2 = -1$. Отримаємо відому формулу для магнітної індукції нескінченно довгого проводу

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi h}.$$

Задача 2. Знайдіть магнітну індукцію, яка створюється відрізком тонкого проводу із струмом *I=2A* на відстані *h=3см* від його осів точці, яку з нижнього і верхнього кінців видно під кутом π/6 і 2π/3 відповідно.

(Виконайте самостійно)ї

Задача 3. Вздовж тонкого кільця радіусом r_0 протікає струм I, знайдіть магнітну індукцію на осі кільця в точці, що віддалена від його осі на відстань z.



Виділимо на кільцевому провіднику нескінченно малу ділянку довжиною dl. Елементарну індукцію, яку створює елемент струму в точці спостереження C знайдемо із закону Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l}\vec{e}_r\right]}{4\pi R^2},$$

де R- відстань від виділеного елемента до точки спостереження, $\vec{e}_r$ одиничний вектор, направлений в точку спостереження.

Оскільки кут між векторами $d\vec{l}$ та $\vec{e}_r$ дорівнює 90°, то для модуля елементарної індукції маємо:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin 90^\circ}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} dl.$$

Знайдемо проекції вектора $d\vec{B}$ на осі координат:

$$\begin{aligned} dB_y &= dB\cos\varphi = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}\cos\varphi dl, \\ dB_z &= dB\sin\varphi = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}\sin\varphi dl \end{aligned},$$

де $\sin\varphi = \dfrac{r}{R}$, $\cos\varphi = \dfrac{z}{R}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Підставляючи отримані співвідношення в формули для проекцій, отримаємо

$$\begin{aligned} dB_y &= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin^2\varphi\cos\varphi\ dl \\ dB_z &= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin^3\varphi\ dl \end{aligned}.$$

Інтегруючи по довжині кругового провідника, знайдемо проекції індукції на осі координат:

$$B_y = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin^2\varphi\cos\varphi\ dl = 0,$$

$$B_z = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin^3\varphi\ dl = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin^3\varphi 2\pi r = \frac{\mu\mu_0 I}{2r}\sin^3\varphi$$

Перший інтеграл дорівнює нулю, оскільки складові від діаметрально протилежних елементів струму мають протилежні знаки і при сумуванні взаємно скомпенсовуються.

Для індукції на осі кругового провідника отримаємо:

$$B = \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{2r}\sin^3\varphi. \qquad (*)$$

Для індукції в центрі кругового провідника ($\varphi = \pi/2$, $\sin\varphi = 1$) отримаємо:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2r}.$$

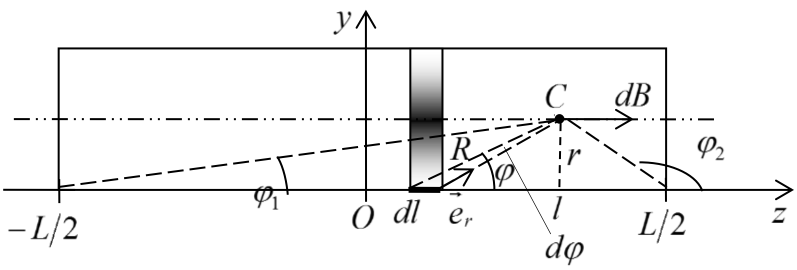
Задача 4. Знайдіть розподіл магнітної індукції на осі соленоїдної котушки, яка має *N* витків проводу по яких протікає струм *I*. Довжина котушки *L*, радіус *r*, відносна магнітна проникність середовища μ.

Розв'язок Виділимо на поверхні котушки кільце струму шириною dl і знайдемо магнітну індукцію, яку воно створює в точці спостереження. Скористаємося розв'язком попередньої задачі. Для цього у виразі $(*)$ задачі 3 зробимо заміну $I \to dI = nIdl$.

Отримаємо:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 nI}{2r}\sin^3\varphi dl.$$

де $n = N/L$ - кількість витків на одиницю довжини котушки, N і L - відповідно кількість витків і довжина котушки.



Як видно з рисунка,

$$R = \frac{r}{\sin\varphi}, \quad dl = \frac{R}{\sin\varphi}d\varphi.$$

Підставляючи отримані співвідношення в формулу для *dB*, знайдемо

$$dB = \frac{\mu\mu_0 nI}{2r}\sin^3\varphi \frac{r}{\sin^2\varphi}d\varphi = \frac{\mu\mu_0 nI}{2}\sin\varphi d\varphi.$$

Для індукції на осі котушки отримаємо:

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu\mu_0 nI}{2}\sin\varphi d\varphi = \frac{\mu\mu_0 nI}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi d\varphi \Rightarrow .$$

$$B=\frac{\mu\mu_0 nI}{2}\left(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right).$$

Перейдемо до змінної l. Враховуючи, що:

$$\cos\alpha_1=\frac{L/2+l}{\sqrt{\left(L/2+l\right)^2+r^2}},\ \cos\alpha_2=-\frac{L/2-l}{\sqrt{\left(L/2-l\right)^2+r^2}},$$

отримаємо:

$$B(l)=\frac{\mu\mu_0 nI}{2}\left[\frac{L/2+l}{\sqrt{\left(L/2+l\right)^2+r^2}}+\frac{L/2-l}{\sqrt{\left(L/2-l\right)^2+r^2}}\right].$$

Очевидно, що індукція досягає максимуму в центрі котушки ($l=0$):

$$B(0)=\frac{\mu\mu_0 nI}{2}\left[\frac{L}{\sqrt{\left(L/2\right)^2+r^2}}\right].$$

На краях котушки ($l=\pm L/2$) маємо:

$$B(\pm L/2)=\frac{\mu\mu_0 nI}{2}\left[\frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}}\right].$$

Задача 5. Вздовж тонкого нескінченно довгого проводу в протікає струм *I=5A*. Використовуючи закон повного струму, знайдіть напруженість магнітного поля на відстані *r=2см* від його осі.

Розв'язок. Внаслідок циліндричної симетрії, лінії вектора напруженості магнітного поля будуть направлені по дотичних до кіл з центром на осі провода. При цьому модуль $\vec{H}$ вздовж контура інтегрування буде однаковим. Знайдемо циркуляцію $\vec{H}$

$$C=\oint_L \vec{H}d\vec{l}=\oint_L Hdl\cdot\cos\alpha=H\oint_L \cos\ 0dl=2\pi rH.$$

Згідно із законом повного струму, циркуляція вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ по замкнутому контуру буде дорівнювати струму, який цей контур охоплює

$$C=I.$$

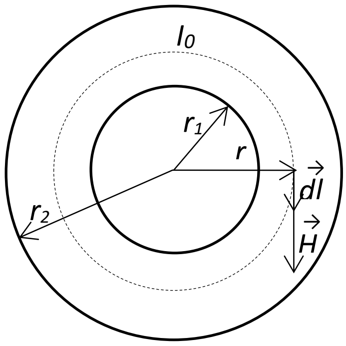
Прирівнюючи праві частини отримаємо

$$2\pi rH=I.$$

Знайдемо напруженість магнітного поля

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{5}{2\pi \cdot 0.02} = 39.8\, А/м.$$

Задача 6. Вздовж довгої стальної труби з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім r_2 протікає струм I_0. Знайдіть напруженість магнітного поля всередині і зовні труби.



Розв'язок. Внаслідок симетрії, лінії вектора напруженості магнітного поля являють собою кола, центри яких лежать на осі труби. Очевидно, що на однакових відстанях від осі модуль напруженості поля однаковий. Розглянемо циркуляцію вектора напруженості вздовж силової лінії, яка проходить зовні труби ($r \geq r_2$). Згідно із законом повного струму циркуляція буде дорівнювати струму, який протікає в трубі

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = I_0 .$$

Враховуючи, що вектори $\vec{H}$ і $d\vec{l}$ мають однаковий напрямок отримаємо

$$\oint_L HdL = H \cdot 2\pi r = I_0 .$$

Знайдемо напруженість магнітного поля поза трубою

$$H = \frac{I_0}{2\pi r} .$$

Розглянемо циркуляцію вектора напруженості вздовж силової лінії, яка знаходиться на відстані $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\oint_L HdL = H \cdot 2\pi r = I ,$$

де $I = j \cdot \pi\left(r^2 - r_1^2\right)$- частина струму, яка охоплюється контуром,

$j = \dfrac{I_0}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$ - густина струму.

Знайдемо напруженість магнітного поля в трубі

$$H \cdot 2\pi r = \frac{I_0}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \pi\left(r^2 - r_1^2\right) = I_0 \frac{\left(r^2 - r_1^2\right)}{(r_2^2 - r_1^2)} \Rightarrow$$

$$H = \frac{I_0}{2\pi r} \frac{\left(r^2 - r_1^2\right)}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

В порожнині труби струм не протікає, тому на відстані $r \le r_1$,

$$\oint_L H dL = H \cdot 2\pi r = I = 0,$$

і напруженість магнітного поля $H=0$.

Очевидно, що найбільшою напруженість буде на зовнішній поверхні труби. При $r=r_2$ отримаємо

$$H_{\max} = \frac{I_0}{2\pi\ r_2}.$$

Задача 7. В магнітопроводі з магнітною проникністю $\mu=300$ магнітна індукція рівна $B=0.8$ *Тл.* Обчисліть напруженість магнітного поля.

Розв'язок. Вектори магнітної індукції та напруженості магнітного поля зв'язані формулою

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}.$$

де μ- відносна діелектрична проникність середовища, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* магнітна стала.

В однорідному ізотропному середовищі μ- постійна. Знайдемо напруженість магнітного поля

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{0.8}{300 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 2120 \textit{ А/м.}$$

Задача 8. Вздовж нескінченно довгого циліндричного проводу радіусом $r_0=0.8$*см* протікає струм $I_0=5A$. Знайдіть магнітну індукцію та напруженість магнітного поля всередині і зовні проводу.

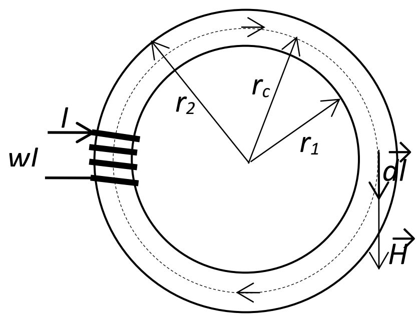
(Виконайте самостійно)

Задача 9. На тонкий тороїдальний сердечник з внутрішнім радіусом r_1 $=3$*см* і зовнішнім $r_2=3.5$ *см* намотано $w=2000$ витків проводу, по якому протікає струм *I=0.2A*. Знайдіть магнітну індукцію та напруженість магнітного поля, якщо магнітна проникність сердечника $\mu=300$.

Розв'язок. Знайдемо радіус і довжину середньої лінії тороїда.

$$r_c = \frac{r_1 + r_2}{2},\ L = 2\pi r_c = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} = \pi\left(r_1 + r_2\right).$$

Розглянемо циркуляцію вектора напруженості вздовж середньої лінії, яка знаходиться на відстані $r_1 \le r \le r_2$.



$$C = \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \oint_L Hdl = H\pi(r_1 + r_2)\,.$$

Циркуляція вектора напруженості охоплює *w* витків із струмом, тому згідно із законом повного струму

$$C = wI \Rightarrow \quad H\pi(r_1 + r_2) = wI\ .$$

Знайдемо напруженість магнітного поля в тороїді

$$H = \frac{wI}{\pi\left(r_1 + r_2\right)} = \frac{2000 \cdot 0.2}{\pi\left(0.030 + 0.035\right)} = 2273.6\,A/м.$$

Знайдемо магнітну індукцію в тороїді

$$B = \mu\mu_0 H = 300 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2273.6 = 0.86\ Тл.$$

Практична робота №6

Розрахунок магнітного поля постійного струму

Задача 1. В магнітопроводі скалярний магнітний потенціал змінюється по закону $\varphi_m = -100\cdot(5x+4y)A$. Обчисліть напруженість магнітного поля та магнітну індукцію, якщо відносна магнітна проникність середовища $\mu=500$.

Розв'язок. Напруженість магнітного поля та скалярний магнітний потенціал зв'язані залежністю

$$\vec{H} = -grad(\varphi_m) = -\left(\vec{i}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right).$$

Знайдемо часткові похідні

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-0.1\cdot(5x+4y)\right) = -500\,А/м,$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-0.1\cdot(5x+4y)\right) = -400\,А/м,$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-0.1\cdot(5x+4y)\right) = 0.$$

Знайдемо вектор напруженості магнітного поля

$$\vec{H} = -\left(\vec{i}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right) = -\left(-500\vec{i} - 400\vec{j}\right) = 100\left(5\vec{i} + 4\vec{j}\right)А/м.$$

Знайдемо вектор магнітної індукції

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} = 500\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 100\left(5\vec{i} + 4\vec{j}\right) = 0.07\ Тл.$$

Задача 2. В магнітопроводі скалярний магнітний потенціал змінюється по закону φ_m= *-100·(5y+4z)A*. Обчисліть напруженість магнітного поля та магнітну індукцію, якщо відносна магнітна проникність середовища $\mu=500$.

(Виконайте самостійно)

Задача 3. В магнітопроводі скалярний магнітний потенціал змінюється по закону φ_m= *-100·(5x+4z)A*. Обчисліть магнітний потік, який протікає через площадку площею $S=2см^2$, одиничний направляючий вектор до якої $\vec{n} = 2/3\vec{i} - 2/3\vec{j} + 1/3\vec{k}$. Відносну магнітну проникність середовища прийняти рівною $\mu=500$.

Розв'язок. Знайдемо вектор напруженості магнітного поля

$$\vec{H} = -\left(\vec{i}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right) = -\left(-500\vec{i} - 400\vec{k}\right) = 100\left(5\vec{i} + 4\vec{k}\right)А/м.$$

Знайдемо магнітний потік

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S \mu\mu_0\vec{H}\vec{n}\cdot dS = \mu\mu_0\vec{H}\vec{n}\int_S dS = \mu\mu_0\vec{H}\vec{n}\cdot S =$$

$$= 500\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 100\left(5\vec{i} + 4\vec{k}\right)\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right)\cdot 2\cdot 10^{-4} = 5.86\cdot 10^{-5}\ Вб.$$

Задача 3. В магнітопроводі скалярний магнітний потенціал змінюється по закону φ_m= *-100·(5x+4y)A.* Обчисліть магнітний потік, який протікає через площадку площею $S=2см^2$, одиничний направляючий вектор до якої $\vec{n} = 2/3\vec{i} + 2/3\vec{j} - 1/3\vec{k}$. Відносну магнітну проникність середовища прийняти рівною $\mu=500$.

(Виконайте самостійно)

Задача 4. Вздовж циліндричного проводу радіусом r_0 в протікає струм I_0. Знайдіть магнітний потік всередині проводу на ділянці довжиною l.

Розв'язок. Внаслідок симетрії, лінії вектора напруженості магнітного поля являють собою кола, центри яких лежать на осі труби. Очевидно, що на однакових відстанях від осі проводу модуль напруженості поля однаковий. Розглянемо циркуляцію вектора напруженості вздовж силової лінії, яка проходить в проводі ($r \le r_0$).

$$C = \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_L Hdl = H2\pi\ r\ ,$$

Знайдемо струм, який охоплюється силовою лінією

$$I = j_0\pi\ r^2,\ j_0 = I_0/\pi\ r_0^2$$

Згідно із законом повного струму циркуляція буде дорівнювати струму

$$C = I\ .$$

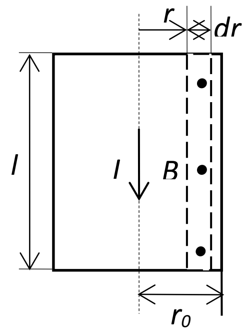
Знайдемо напруженість магнітного поля

$$H2\pi\ r = I_0\frac{r^2}{r_0^2} \Rightarrow H = I_0\frac{r}{2\pi\ r_0^2}\ .$$

Знайдемо магнітну індукцію в проводі

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 I_0}{2\pi\ r_0^2}r\ .$$

Як слідує із закону правого гвинта, при протіканні струму зверху вниз, вектор магнітної індукції направлений на спостерігача. На відстані r від осі проводу виділимо елементарну прямокутну площадку висотою l і товщиною dr.



Оскільки напрям вектора $\vec{B}$ і $d\vec{S}$ однаковий то магнітний потік, який протікає через площадку

$$d\Phi = BdS = Bldr$$

Магнітний потік всередині проводу

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S BdS = \int_0^{r0} \frac{\mu\mu_0 I_0}{2\pi\ r_0^2} rldr = \frac{\mu\mu_0 I_0 l}{2\pi\ r_0^2} \int_0^{r0} rdr = \frac{\mu\mu_0 I_0 l}{4\pi} = .$$

Як видно із формули, магнітний потік не залежить від радіуса проводу і визначається лише величиною струму і довжиною ділянки.

Задача 5. Вздовж стального циліндричного проводу радіусом *r_0=0.5см* протікає струм *I_0=100А*. Знайдіть енергію магнітного поля всередині проводу на ділянці довжиною *l=2м*, якщо відносна магнітна проникність сталі *μ=500.*

Розв'язок. Знайдемо напруженість магнітного поля в проводі. Скористаємося результатами попередньої задачі.

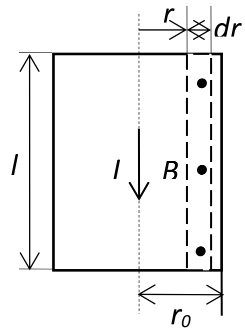
$$H = I_0 \frac{r}{2\pi\ r_0^2}\ .$$

Знайдемо густину магнітної енергії

$$w_m = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \left(I_0 \frac{r}{2\pi\ r_0^2} \right)^2 = \frac{\mu\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r_0^4} r^2\ .$$

Знайдемо енергію магнітного поля

$$W_m = \int_V w_m dV\ .$$



В якості елементарного об’єму виберемо шар проводу, який знаходиться між циліндрами радіусом *r* та *r+dr* і висотою *l*.

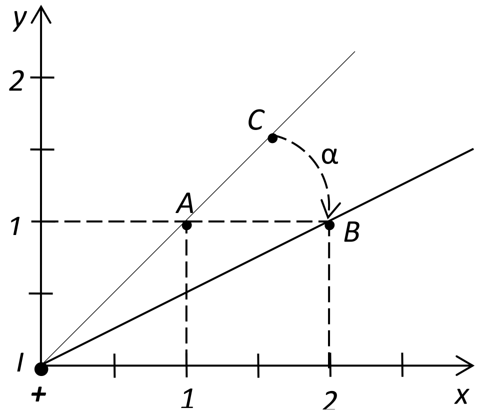
$$dV = 2\pi\ lrdr\ .$$

Отримаємо

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_0^{r0} \frac{\mu\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r_0^4} r^2 \cdot 2\pi\ lrdr = \frac{\mu\mu_0 I_0^2 l}{4\pi\ r_0^4} \int_0^{r0} r^3 dr = \frac{\mu\mu_0 I_0^2 l}{16\pi} =$$

$$= \frac{500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} (100)^2 \cdot 2}{16\pi} = 0.25\text{Дж}$$

Задача 6. Вздовж прямого нескінченно довгого проводу в напрямку від спостерігача протікає струм *I=36A*. Обчисліть магнітну напругу між точками *A(1;1)* і *B(2;1)*.



Розв’язок. В області поза струмами магнітна напруга не залежить від шляху інтегрування, тому

$$U_{mAB} = \int_A^B \vec{H}d\vec{l} = \int_A^C \vec{H}d\vec{l} + \int_C^B \vec{H}d\vec{l}\ .$$

Як видно з рисунка, на ділянці *AC* вектори $\vec{H}$ і $d\vec{l}$ перпендикулярні, і скалярний добуток $\vec{H}d\vec{l} = 0$, а на ділянці *CB* - паралельні, тому $\vec{H}d\vec{l} = H_C dl$. Таким чином

$$U_{mAB}=\int\limits_{A}^{C}\vec{H}d\vec{l}+\int\limits_{C}^{B}\vec{H}d\vec{l}=\int\limits_{C}^{B}H_{C}dl=H_{C}\cdot\overset{\frown}{CB}.$$

Використовуючи закон повного струму знайдемо напруженість магнітного поля в точці C

$$H_C=\frac{I}{2\pi r_C},$$

де I - струм в провіднику, r_c - відстань від провідника до точки c.

Знайдемо довжину дуги *(AB)*

$$\overset{\frown}{AB}=r_C\cdot\alpha,$$

де $\alpha=arctg1-arctg0.5=\pi/10$.

Враховуючи сказане,

$$U_{mAB}=H_C\cdot\overset{\frown}{AB}=\frac{I}{2\pi\ r_C}r_C\cdot\alpha=I\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{36}{20}=1.8A.$$

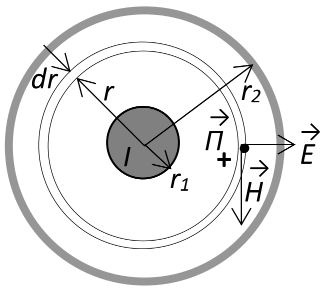
Задача 7. Вздовж прямого нескінченно довгого проводу в напрямку до спостерігача протікає струм *I=12A*. Обчисліть магнітну напругу між точками *A(1;2)* і *B(2;1)*.

(Виконайте самостійно)

Практична робота №7

Розрахунок електромагнітного поля

Задача 1. До коаксіального кабелю із зовнішнім радіусом жили r_1 та внутрішнім радіусом оболонки r_2 прикладена напруга U, під дією якої в кабелі протікає струм I. Знайдіть потужність, яка передається в діелектрику між жилою та оболонкою кабелю. Тепловими втратами електричної потужності знехтувати.



Розв'язок. В ізоляції коаксіального кабелю без втрат вектор $\vec{E}$ має тільки радіальну складову (Пр.роб.4, зад.6)

$$\left|\vec{E}\right| = E_r = \frac{U}{r\ln\left(r_2/r_1\right)},$$

вектор $\vec{H}$ - тільки азимутальну (Пр.роб.5, зад.4)

$$\left|\vec{H}\right| = H_\alpha = \frac{I}{2\pi\ r}.$$

Вектор Пойнтінга перпендикулярний до площини в якій лежать вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ і має тільки поздовжню складову

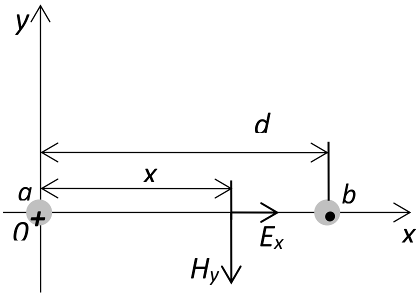
$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}\cdot\vec{H}\right] \Rightarrow \Pi_z = E_r H_\alpha = \frac{UI}{2\pi\ r^2 \ln\left(r_2/r_1\right)}.$$

Знайдемо потужність, яка передається в діелектрику $\left(r_1 \le r \le r_2\right)$

$$P = \int_{r_1}^{r_2} \Pi\cdot 2\pi r\cdot dr = 2\pi\frac{UI}{2\pi\ln\left(r_2/r_1\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = UI.$$

В жилі й оболонці напруженість електричного поля $E=0$, тому $\Pi=0$. За межами кабелю напруженість магнітного поля $H=0$ тому там також $\Pi=0$. Отже, в кабелі потужність передається по діелектрику.

Задача 2. По двопровідній лінії постійного струму передається потужність P. Знайдіть залежність вектора Пойнтінга від координати x уздовж лінії, яка з'єднує осі проводів, якщо відстань між проводами d, а їх радіус r_0.



Розв'язок. Знайдемо напруженість електричного поля, яку на осі абсцис створює кожен із проводів. На основі теореми Гауса

$$E_{ax} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}, \qquad E_{bx} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(d-x\right)},$$

де $\tau = C_0 U$, $C_0 = \dfrac{\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln\left(d/r_0\right)}$ - ємність одиниці довжини лінії, U – напруга між проводами.

Оскільки напруженості E_{ax} і E_{bx} мають однаковий напрямок, то напруженість електричного поля між проводами рівна їх сумі

$$E_x = E_{ax} + E_{bx} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 (d-x)} = \frac{C_0 U}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right).$$

Знайдемо напруженість магнітного поля, яку на осі абсцис створює кожен із проводів. На основі закону повного струму

$$H_{ay} = \frac{I}{2\pi x},\ H_{by} = \frac{I}{2\pi(d-x)},$$

Оскільки складові H_{ay} і H_{by} мають однаковий напрямок, то сумарна напруженість магнітного поля рівна їх сумі

$$H_y = H_{ay} + H_{by} = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(d-x)} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right).$$

Знайдемо вектор Пойнтінга

$$\Pi_z = E_x H_y = \frac{UI}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{(d-x)^2 x^2} = \frac{P}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{(d-x)^2 x^2}.$$

Всередині проводів $\Pi = 0$, оскільки $E = 0$.

Отже, в двопровідній лінії потужність передається в просторі між проводами.

Задача 3. Знайдіть тангенс кута втрат α, між вектором напруженості електричного поля і нормаллю до поверхні жили коаксіального кабелю. Обчисліть потік вектора Пойнтінга через бокову поверхню жили і порівняйте її з втратами енергії на довжині $l=1м$. Радіус мідної жили $r_1 = 0.3см$, внутрішній радіус оболонки $r_2 = 1см$. Напруга між жилою і оболонкою $U=10^5 В$.

Розв'язок. Знайдемо нормальну складова напруженості електричного поля на поверхні жили

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln(r_2/r_1)} = \frac{10^4}{0.003 \ln(1/0.3)} = 2.77 \cdot 10^5\ В/м.$$

Тангенціальну складову напруженості електричного поля на поверхні жили знайдемо із закону Ома в диференціальній формі

$$E_\tau = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\pi\ r_1^2 \sigma} = \frac{50}{\pi (0.003)^2 \cdot 5.8 \cdot 10^7} = 3.05 \cdot 10^{-2}\ В/м.$$

Знайдемо кут, який складає вектор напруженості електричного поля з нормаллю до поверхні жили

$$tg\alpha = \frac{E_\tau}{E_n} = \frac{3.05\cdot 10^{-2}}{2.77\cdot 10^{5}} = 1.1\cdot 10^{-7}.$$

Тангенціальну складову напруженості магнітного поля на поверхні жили знайдемо із закону повного струму

$$H_\tau = \frac{I}{2\pi\ r_1} = \frac{50}{2\pi\cdot 0.003} = 2650\,А/м.$$

Для визначення потоку вектора Пойнтінга всередину жили, слід помножити складову вектора Пойнтінга $E_\tau H_\tau$, яка проникає всередину жили на площу бокової

$$E_\tau H_\tau \cdot 2\pi\ r_1 l = 3.05\cdot 10^{-2}\cdot 2650\cdot 2\pi\cdot 0.003\cdot 1 = 1.523\,Вт.$$

Потік вектора Пойнтінга всередину жили дорівнює втратам енергії в жилі

$$P = I^2 R = I^2\frac{l}{\sigma S} = \frac{50^2}{5.8\cdot 10^7\cdot\pi\cdot 0.003^2} = 1.523\,Вт.$$

Задача 4. Простір між електродами плоского конденсатора заповнений неідеальним діелектриком ($\sigma=10^{-4}См/м,\ \varepsilon=6$). Конденсатор приєднаний до джерела синусоїдної напруги $u=U_m sin(\omega t)$. Обчисліть амплітуди густин струмів провідності та зміщення для частоти $f=3\cdot 10^5 Гц$, якщо $U_m=3000В$ а відстань між електродами $d=3мм$.

Розв'язок. Оскільки поле плоского конденсатора однорідне, то напруженість електричного поля

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U_m \sin 2\pi ft}{d}.$$

Густину струму провідності знайдемо із закону Ома в диференціальній формі

$$j = \sigma E = \frac{\sigma U_m}{d}\sin(2\pi ft) = j_m \sin(2\pi ft),$$

де

$$j_m = \frac{\sigma U_m}{d} = \frac{3\cdot 10^3\cdot 10^{-4}}{3\cdot 10^{-3}} = 100\,А/м^2$$

амплітуда густини струму провідності.

Густину струму зміщення знайдемо із співвідношення

$$j_{\text{зм}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0 E\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0 \frac{U_m \sin\left(2\pi ft\right)}{d}\right) = \frac{2\pi f\varepsilon\varepsilon_0 U_m}{d}\cos\left(2\pi ft\right) = j_{\text{m}}^{\text{зм}}\cos\left(2\pi ft\right),$$

де

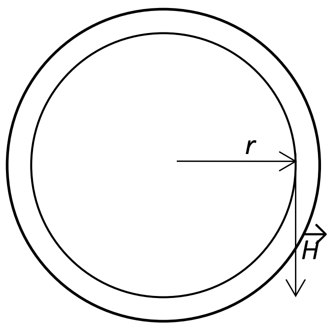
$$j_m^{\text{зм}} = \frac{2\pi f\varepsilon\varepsilon_0 U_m}{d} = \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^5\cdot 6\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^3}{3\cdot 10^{-3}} = 100\ А/м^2.$$

амплітуда густини струму зміщення.

Задача 5. Простір між електродами плоского конденсатора заповнений неідеальним діелектриком ($\sigma=10^{-4}См/м,\ \varepsilon=6$). Конденсатор приєднаний до джерела синусоїдної напруги $u=U_m cos(\omega t)$. Обчисліть амплітуди густин струмів провідності та зміщення для частоти $f=3\cdot 10^5 Гц$, якщо $U_m=3000В$ а відстань між електродами $d=3мм$.

(Виконайте самостійно)

Задача 6. До плоского конденсатора з повітряною ізоляцією прикладена напруга $u=U_m sin(\omega t)$. Електроди конденсаторів мають форму дисків і розміщені на відстані $d=0.1см$. Знайдіть миттєву напруженість магнітного поля в точках, які лежать між електродами конденсатора на відстані r від осі симетрії, якщо $U_m=3000В$, а $\omega=1000рад/с$.



Розв'язок. Для визначення густини струму зміщення скористаємося розв'язком попередньої задачі

$$j = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0 U_m}{d}\cos\left(\omega t\right).$$

Оточимо вісь конденсатора контуром радіуса r і застосуємо до нього закон повного струму

$$\oint\limits_L \vec{H} d\vec{L} = H 2\pi r = i,$$

де

$$i = \int\limits_S \vec{j} d\vec{S} = j_{зм} S = \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 U_m}{d} \pi r^2 \cos \omega \cdot t$$

- струм, який охоплюється контуром, H - напруженість магнітного поля в точках контуру.

Із отриманих рівнянь отримаємо:

$$H \cdot 2\pi r = \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 U_m}{d} \pi\ r^2 \cos(\omega t).$$

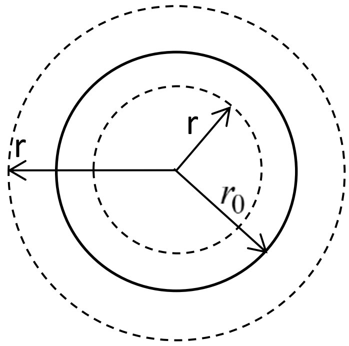
Знайдемо напруженість магнітного поля

$$H = \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 U_m}{2d} r \cos(\omega t) = \frac{10^3 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3}} r \cdot \cos(\omega t) = 4.43 \cdot 10^{-3} r \cdot \cos(\omega t)\, А/м.$$

Практична робота №8

Дослідження електромагнітного поля методом рівнянь Максвелла

Задача 1. По прямому нескінченому циліндричному проводу радіусом r_0 в напрямку від спостерігача протікає струм I. Знайдіть розподіл напруженості магнітного поля та векторного потенціалу всередині і зовні проводу. Задачу розв'язати за допомогою рівнянь Пуассона та Лапласа для векторного потенціалу.



Розв'язок. Вісь циліндричної системи координат *Oz* сумістимо з віссю проводу і направимо вздовж струму. Оскільки провідник симетричний, то струм по перерізу провідника розподілиться рівномірно. Густина струму в провіднику

$$\vec{j} = \vec{k} j_z = \vec{k} \frac{I}{\pi r_0^2}.$$

Так як напрямок векторного потенціалу співпадає з вектором густини струму, то векторний потенціал буде мати тільки одну складову - A_z. Рівняння Пуассона для першої області ($0 \le r \le r_0$) в циліндричній системі координат буде мати вигляд

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dA_z}{dr}\right)}{dr} = -\mu\mu_0 j_z\,,$$

причому A_z і j_z залежать тільки від *r*.

Двічі інтегруючи по радіусу і враховуючи, що $j = j_z$, отримаємо

$$A = A_z = -\frac{\mu\mu_0 jr^2}{4} + C_1 \ln r + C_2\,.$$

Напруженість поля

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} rot\vec{A}.$$

Враховуючи вираз для ротора в циліндричній системі координат і те, що $H = H_\psi$, $A = A_z$, для азимутальної складової напруженості магнітного поля отримаємо

$$H = H_\psi = -\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{dA_z}{dr}\,.$$

Таким чином,

$$H = \frac{jr}{2} - \frac{C_1}{\mu\mu_0 r}\,.$$

Оскільки напруженість магнітного поля величина скінченна, то постійна інтегрування $C_1 = 0$. Приймаючи векторний потенціал на поверхні проводу таким, що дорівнює нулю, отримаємо:

$$C_2 = \frac{\mu\mu_0 jr_0^2}{4} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\,.$$

Отже, для першої області

$$H_1 = H_\psi = \frac{jr}{2} = \frac{Ir}{2\pi r_0^2}\,.$$

Враховуючи величини постійних інтегрування C_1 і C_2 для розподілу векторного потенціалу в першій області, отримаємо

$$A_1 = A_z = -\frac{\mu\mu_0 r^2}{4} + \frac{\mu\mu_0 j r_0^2}{4} = \frac{\mu\mu_0 j\left(r_0^2 - r^2\right)}{4} = \frac{\mu\mu_0 I\left(r_0^2 - r^2\right)}{4\pi r_0^2}.$$

На осі векторний потенціал дорівнює:

$$A_0 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}.$$

У другій області ($r_0 \le r \le \infty$) струму нема і поле буде описуватися рівнянням Лапласа

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dA_z}{dr}\right)}{dr} = 0,$$

причому A_z залежать тільки від *r*.

Інтегруючи, для векторного потенціалу поза провідником отримаємо

$$A = A_z = C_3 \ln r + C_4.$$

Напруженість поля

$$H_2 = H_\psi = -\frac{1}{\mu_0}\frac{dA_z}{dr} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{d\left(C_3 \ln r + C_4\right)}{dr} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{C_3}{r}.$$

Оскільки поверхневих струмів на границі нема, то азимутальна складова напруженості на поверхні проводу неперервна. При $r = r_0$, $H_1 = H_2$ і

$$\frac{I r_0}{2\pi r_0^2} = -\frac{C_3}{\mu_0 r_0},$$

звідки

$$C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

Враховуючи вигляд C_3 для напруженості магнітного поля в другій області отримаємо

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Оскільки на поверхні провідника векторний потенціал дорівнює нулю, то

$$C_3 \ln r + C_4 = 0.$$

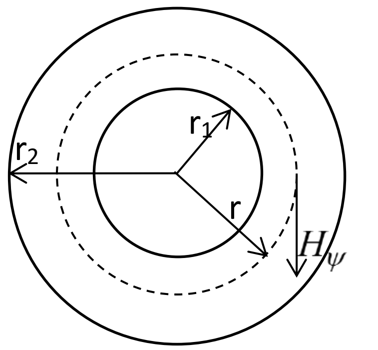
Враховуючи вираз для C_3, отримаємо

$$C_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_0 .$$

Враховуючи величини постійних інтегрування C_3 і C_4 отримаємо розподіл векторного потенціалу в другій області,

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r} .$$

Задача 2. Розрахуйте магнітне поле трубчатого провідника з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім r_2, по якому в напрямку від спостерігача протікає постійний струм *I*. Скористайтеся першим рівнянням Максвела.



Розв'язок. Область, зайняту полем, можна розбити на три частини і для кожної з них записати перше рівняння Максвела:

при $0 \le r \le r_1$ $\qquad rot\overrightarrow{H}_1 = 0$;

при $r_1 \le r \le r_2$ $\qquad rot\overrightarrow{H}_2 = \vec{j}$;

при $r_2 \le r \le \infty$ $\qquad rot\overrightarrow{H}_3 = 0$.

Вісь Oz циліндричної системи координат сумістимо з віссю проводу і направимо в напрямку струму. Внаслідок циліндричної симетрії вектор напруженості магнітного поля буде мати тільки азимутальну проекцію H_ψ, яка буде залежати тільки від радіальної координати r. Вектор густини струму буде паралельним до осі Oz і дорівнює

$$\vec{j} = \vec{k} j_z = \vec{k} \frac{I}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} .$$

Розгорнемо $rot\overrightarrow{H}$ в циліндричній системі координат

$$rot\overrightarrow{H}=\vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\psi}-\frac{\partial H_\psi}{\partial z}\right)+\vec{e}_\psi\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\vec{k}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rH_\psi\right)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\psi}\right).$$

Враховуючи, що $H=H_\psi$, $j=j_z$, для трьох областей отримаємо:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rH_1\right)}{\partial r}=0; \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rH_2\right)}{\partial r}=j=\frac{I}{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}; \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rH_3\right)}{\partial r}=0.$$

Після інтегрування визначимо напруженість магнітного поля в трьох областях

$$H_1=\frac{C_1}{r}; \qquad H_2=\frac{Ir}{2\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}+\frac{C_2}{r}; \qquad H_3=\frac{C_3}{r}.$$

Для визначення постійних інтегрування C_1, C_2 і C_3 врахуємо, що напруженість поля H величина скінчена. Крім того, оскільки на границі немає поверхневих струмів, азимутальна складова напруженості магнітного поля H_ψ – величина неперервна.

Постійна $C_1=0$, оскільки при $r=0$, напруженість H_1 прямувала б до нескінченості. Отже, в області $0\le r\le r_1$

$$H_1=0$$

і магнітного поля немає.

При $r=r_1$ повинна виконуватися рівність $H_1=H_2$ або

$$H_2=\frac{Ir_1}{2\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}+\frac{C_2}{r_1}=0,$$

звідки

$$C_2=-\frac{Ir_1^2}{2\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}.$$

З урахуванням величини C_2 напруженість магнітного поля в області $r_1\le r\le r_2$ дорівнює

$$H_2=\frac{I\left(r^2-r_1^2\right)}{2\pi r\left(r_2^2-r_1^2\right)}.$$

При $r=r_2$ згідно із граничною умовою $H_2=H_3$

$$\frac{I}{2\pi r_2} = \frac{C_3}{r_2}$$

або

$$C_3 = \frac{I}{2\pi}.$$

Тоді, з урахуванням величини C_2, в області $r_2 \le r \le \infty$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

ДОДАТКИ

Величини параметрів плоских хвиль для різних середовищ

Параметр	Середовище		
	Напівпровідник	Діелектрик	Провідник
$\underline{\gamma}$	$\alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\sigma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)}$	$j\beta$	$k + jk = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\sigma}{2}}$ $+\mathrm{j}\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\sigma}{2}}$
α	$\frac{\omega}{\upsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}+1\right)}-1\right)}$	0	$\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\sigma}{2}}$
β	$\frac{\omega}{\upsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}+1\right)}+1\right)}$	$\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{\upsilon}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\sigma}{2}}$
Z_x	$\sqrt[4]{\frac{(\omega\mu\mu_0)^2}{\sigma^2+(\omega\varepsilon\varepsilon_0)^2}}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu}{\sigma}}$
φ_x	$0 < arctg\,\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
λ	$\frac{2\pi}{\beta} = \frac{\upsilon_f}{f} = \upsilon_f T$	$\frac{c}{f\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{f\mu\mu_0\sigma}}$
υ_f	$\frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$	$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\mu_0\sigma}}$

Диференціальні оператори векторного аналізу в різних системах координат

	Система координат		
	Декартова	Циліндрична	Сферична
$grad\varphi = \nabla\varphi$	$\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\overrightarrow{e_r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\overrightarrow{e_\psi}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\overrightarrow{e_r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\overrightarrow{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\overrightarrow{e_\psi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}$
$div\vec{A} = \nabla\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}+$ $+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}$
$rot\vec{A} = \left[\nabla\vec{A}\right]$	$\vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+$ $+\vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+$ $+\vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	$\overrightarrow{e_r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\psi}-\frac{\partial A_\psi}{\partial z}\right)+$ $+\overrightarrow{e_\psi}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+$ $+\vec{k}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right)$	$\overrightarrow{e_r}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\psi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\psi}\right)+$ $+\overrightarrow{e_\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\psi}-\frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r}\right)+$ $+\overrightarrow{e_\psi}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$
$div(drad\varphi) = \nabla^2\varphi$	$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}+$ $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}+$ $+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2018. 416 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола: Підручник для бакалаврів. М. Видавництво “Юраит”, 2016. – 702 с.
3. Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола. Навчальний посібник. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 312 с.
4. Титаренко М.В. Електротехніка. – Київ.: «Кондор», 2013 р. – 238 с.
5. Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка. – Київ: «Каравела», 2004. – 640 с.
6. Малинівський С. М. Загальна електротехніка. – Львів: Бескид Біт, 2003. - 640 с.
7. Бойко В.С. Теоретичні основи електротехніки. Київ: „Політехніка”, 2004. -272с.