

МАШИНОБУДУВАННЯ ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ ВИРОБНИЦТВА

УДК. 631.363

**Р.Рогатинський, докт.техн.наук; М.Пилипець, канд.техн.наук;
Д.Дмитрів, канд.техн.наук; А.Вітровий, канд.техн.наук**
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗРАХУНОК ГВИНТОВОЇ ЛОПАТІ НА МІЦНІСТЬ

Подано силовий розрахунок лопаті, виконаної як гвинтовий сектор, визначено лінію згину та моменти інерції й опору складного перетину і напруження згину, що виникають у ньому при навантаженні із заданим корисним моментом чи потужністю. Визначено розміщення поверхні перерізу, в якій діють зсувні напруження, з умови розв'язку варіаційної задачі з мінімізації її площі.

Умовні позначення

u та v – лінійний та кутовий незалежні параметри поверхні;
 D та T – зовнішній діаметр та крок гвинтової лінії;
 R – внутрішній радіус гвинтової поверхні (радіус валу);
 α_1 – кут нахилу витка на внутрішньому діаметрі, $\operatorname{tg} \alpha_1 = T/2\pi R$;
 α_2 – кут нахилу витка по зовнішньому діаметрі D ;
 t – товщина лопаті;
 $k_e = 1,5 - 2,5$, та $k_i = 1,05 - 1,1$ - коефіцієнти впливу форми на момент інерції перетину;
 M_{zI} - момент згину відносно вісі Oz_I ;
 R_p – плече прикладання рівнодії навантажень;
 θ – кут нахилу лінії згину;
 $k_w = 1,02 - 1,05$ - коефіцієнти впливу форми на момент опору перетину;
 $\varphi_T = \operatorname{arctg} \mu$ – кут тертя;
 μ - коефіцієнт тертя;
 N – потужність на приводі;
 ω - частота обертання;
 n – кількість лопатей;
 Ω - мінімальна площа перетину гвинтової лопаті, при її постійній товщині t , $\Omega = t b_{\min}$;
 b_{sp} – мінімальна довжина лінії перетину, що відповідає ширині поверхні зрізу;
 β - коефіцієнт запасу міцності;
 2θ - радіальний параметр гвинтового сектора.

Одним з найважливіших етапів проектування гвинтових змішувачів є розрахунок його елементів на міцність. Гвинтова лопать сприймає розподілені навантаження при змішуванні, що здебільшого зосереджуються на зовнішньому круговому периметрі лопаті з діаметром D . Лопать виконана як вирізаний гвинтовий сектор з кутом $\varphi = 2\theta$, її висота (на вісі гвинта) становить H . При навантаженні лопаті вона згинається відносно лінії, розміщеної у площині, дотичній до циліндричної основи валу.

Рівняння кривої, на якій згинається лопать, шукаємо як перетин цієї площини із гвинтовою поверхнею шнека.

Рівняння гвинтової поверхні у параметричному вигляді:

$$\begin{aligned}x &= u \cos v; \\y &= u \sin v; \\z &= \frac{Tv}{2\pi}.\end{aligned}\tag{1}$$

Крок гвинтової поверхні T із параметрами лопаті зв'язаний залежністю:

$$T = \frac{\pi H}{\theta}.$$

Рівняння площини, дотичної до циліндричної поверхні валу радіусом R , згідно з рис.1 приймаємо:

$$x = R.$$

Тоді рівняння кривої, утвореної перетином площини і гвинтової поверхні, буде таким:

$$y = R \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{T}. \quad (2)$$

Для гвинтового сектора, що дорівнює 2θ , кутова координата ν змінюється від $-\theta$ до θ , а в крайніх точках кривої параметри u , z , y набувають таких значень $u = R/\cos\theta$; $z = \pm T\theta/(2\pi)$; $y = R \operatorname{tg}\theta$.

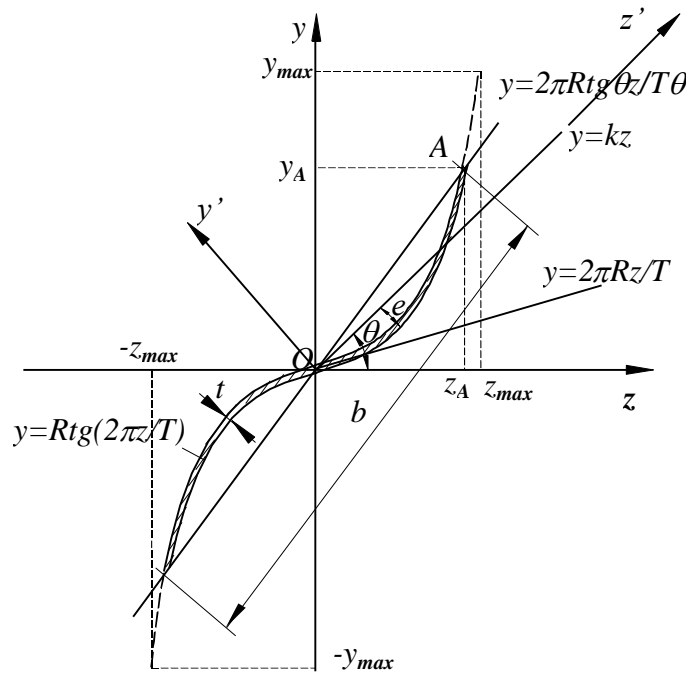


Рис.1. Схема для визначення параметрів профілю згину.

Максимально можливі значення, яких можуть набирати ці параметри при заданій ширині стрічки $B = D/2 - R$:

$$\theta_{max} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2BR + B^2}}{R};$$

$$z_{max} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2BR + B^2}{R^2}};$$

$$y_{max} = \sqrt{2BR + B^2}.$$

Отже, центральна O та крайні A точки лежать на одній прямій, рівняння якої таке:

$$y = \frac{2\pi R \operatorname{tg}\theta}{T\theta} \cdot z. \quad (3)$$

У центральній точці $O(0, 0)$ дотична до лінії (3) буде такою:

$$y = y'(z=0)z = \frac{2\pi R}{T} \cdot z.$$

У процесі згинання профілю, що описується залежністю (2), вісь згинання лежатиме між прямими (3) та (4) і описується залежністю:

$$y = kz. \quad (4)$$

При спрощення залежності (3) розкладаємо у ряд Фур'є значення $tg\theta$.

$$tg\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \frac{15}{315}\theta^7 + \dots,$$

де значення θ подано в радіанах.

Для $\theta < 1$ достатньо обмежитися двома членами розкладання. Тоді залежність (3) виглядатиме так:

$$y = \frac{2\pi R}{T} \left(1 + \frac{1}{3}\theta^2 \right) z = \frac{z(1 + \theta^2/3)}{tg\alpha_1}.$$

Відповідно параметр k :

$$\frac{1}{tg\alpha_1} < k < \frac{1 + \theta^2/3}{tg\alpha_1}.$$

Аналіз жорсткості поперечного перетину профілю показує, що для $\theta < 1$ із достатньою для практичних цілей точністю можна набирати проміжного значення:

$$k = \frac{1 + \theta^2/6}{tg\alpha_1} = \frac{k_\theta}{tg\alpha_1}.$$

Вісь згинання збігатиметься із однією з головних вісей інерції Oz' перетину, а з віссю Oz утворюватиме кут $\theta_k = \arctg k$.

Для випадку, коли гвинтова лопать обмежується не центральним кутом 2θ , а виконана у вигляді частини кутового сектора, центр C якого зміщений відносно центру O самої гвинтової спіралі на величину Δ (рис.2), то рівняння відрізків (CA) , що обмежують край лопаті, описуватимуть залежності:

$$y = \pm(x + \Delta)tg\zeta.$$

Поданий центральний кут θ крайньої точки лінії згину координатою $x = R$ відповідно визначатиметься з умови:

$$tg\theta = \left(\frac{R + \Delta}{R} \right) tg\zeta; \quad \theta = \arctg \left[\left(1 + \frac{\Delta}{R} \right) tg\zeta \right].$$

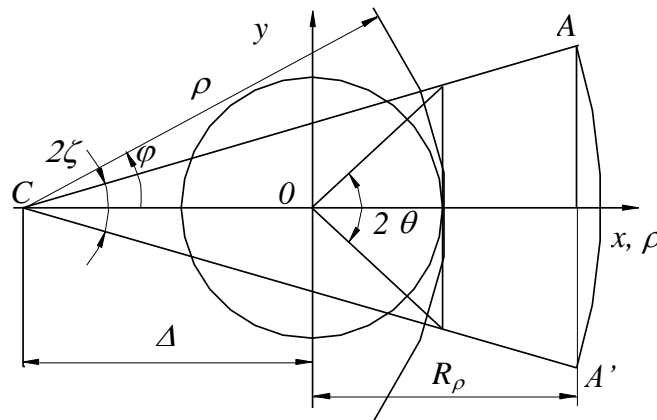


Рис.2. Схема для визначення лінії згину у випадку зміщення центру сектора відносно центру валу.

За поданим кутом θ параметри перетину визначаються аналогічно до попереднього випадку.

Для визначення максимального відхилення кривої (2) від прямої (4) прирівнюємо до нуля похідну їх різниці:

$$\frac{d\left(Rtg \frac{2\pi z}{T} - \frac{2\pi Rtg\theta}{T\theta}\right)}{dz} = \frac{2\pi R}{T \cos^2(2\pi z/T)} - \frac{2\pi Rtg\theta}{T\theta} = 0 \quad (5)$$

З рівняння (5) випливає, що $\cos^2 \frac{2\pi z}{T} = \frac{\theta}{tg\theta}$, а координати точки максимального відхилення від прямої (3) по вісі Oz такі:

$$z_{max} = \frac{\arccos \sqrt{\theta/tg\theta}}{2\pi};$$

$$y_{max} = Rtg \left(\arccos \sqrt{\frac{\theta}{tg\theta}} \right).$$

Для визначення величини максимального відхилення e (у напрямку вісі Oy') подамо рівняння (3) у нормальному вигляді:

$$\frac{T}{\sqrt{T^2 + \frac{4\pi^2 R^2 tg^2 \theta}{\theta^2}}} y - \frac{(2\pi Rtg\theta / \theta)z}{\sqrt{T^2 + \frac{4\pi^2 R^2 tg^2 \theta}{\theta^2}}} = 0.$$

Тоді, відхилення e дорівнює:

$$e = \frac{T y_{max} \theta - 2\pi R z_{max} tg\theta}{\sqrt{T^2 \theta^2 + 4\pi^2 R^2 tg^2 \theta}}. \quad (6)$$

Отже, прогин гвинтової поверхні буде прогинатися на лінії (2), з незначним викривленням з максимальним можливим відхиленням від прямої (4), що дорівнює (6).

Ширина поверхні згину b на гвинтовому секторі, що дорівнює 2θ , буде такою:

$$b = 2\sqrt{R^2 tg^2 \theta + \frac{T^2 \theta^2}{4\pi^2}} = 2R\theta \sqrt{1 + \frac{\theta^4}{9} + tg^2 \alpha_1}.$$

При згинанні жорсткого профілю, форма якого не змінюється, головні вісі інерції $Oy'z'$ профілю повернуті на кут $\theta_k = \arctg(k)$ відповідно до вісей Oy та Oz .

Для гвинтових лопатей з кутом $\theta > \theta_{max}$ максимальна ширина поверхні згину така:

$$b = 2\sqrt{2BR + B^2 + \frac{T^2}{4\pi^2} \arctg^2 \sqrt{\frac{2BR + B^2}{R^2}}}.$$

Враховуючи складність обчислення моменту інерції вказаного перетину і визначення розміщення головних вісей $Oy'z'$, а також депланцію профілю від її згину (вирівнювання профілю), у результаті аналізу встановлено, що момент інерції перетину вісі згину з достатньою для практичних цілей точністю можна визначити за залежністю [1]:

$$I_{z1} = \frac{bt^3}{12} \left(1 + k_e \frac{e^2}{t^2} \right) = \frac{k_i bt^3}{12}.$$

Момент опору перетину:

$$W_{z1} = k_w \frac{bt^2}{6}.$$

Максимальне напруження згину визначається так:

$$\sigma = \frac{M_{z1}}{W_{z1}}.$$

Момент згину відносно Oz_1 визначається за залежністю:

$$M_{zy} = P_{y1}(R_p - R).$$

Тут P_{y1} – зусилля згину,

$$P_{y1} = P_z \cos \theta_k + P_\tau \sin \theta_k = \frac{(P_z k + P_\tau)}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{k_\theta^2 P_z \cos \alpha_1 + P_\tau \sin \alpha_1}{\sqrt{k_\theta^2 \cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1}} \approx P_z \cos \alpha_1 + P_\tau \sin \alpha_1. \quad (7)$$

Вісьове P_z і тангенціальне P_τ зусилля визначаються через сумарні зусилля ΣP_z , ΣP_τ крутний момент M_z , розрахункове значення якого обумовлює потужність N транспортування, що розподіляється на n лопатей [2]:

$$\Sigma P_z = \frac{2M'_z}{D \operatorname{tg}(\alpha_2 + \varphi_T)} = \frac{2M_z(\pi D - \mu T)}{D(T + \mu \pi D)},$$

$$\Sigma P_\tau = \frac{2M_z}{D}.$$

Зусилля згину шукаємо за залежністю:

$$P_{y1} = \frac{2N}{\omega n D (\sqrt{k^2 + 1})} \left[\frac{k(\pi D - \mu T) \cos \alpha_1}{T + \mu \pi D} + \sin \alpha_1 \right] = \frac{2N}{n \omega D} \cdot \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha_1 + \varphi_T)}{\sin(\alpha_2 + \varphi_T)}. \quad (8)$$

Центр прикладання рівнодійної, розміщеної на дузі кутом 2θ і діаметром D , з урахуванням заповнення матеріалу для розглядуваного випадку вважатимемо:

$$R_p = \frac{D}{2} \cos \theta.$$

Отже, максимальне розрахункове напруження згину після відповідних перетворень таке:

$$\sigma = \frac{3P_{y1}(D \cos \theta - 2R)}{k_w b t^2} = \frac{6N \cos(\alpha_2 - \alpha_1 + \varphi_T) (\cos \theta - 2R/D)}{n \omega k_w \sin(\alpha_2 + \varphi_T) b t^2} =$$

$$= \frac{3N \cos(\alpha_2 - \alpha_1 + \varphi_T) (\cos \theta - 2R/D) \cos \alpha_1}{k_w n \omega t^2 R \theta \sin(\alpha_2 + \varphi_T)}. \quad (9)$$

Для коротких лопатей при розрахунку спіралей на міцність необхідно враховувати напруження зрізу τ , що виникають від дії поперечної сили P :

$$\tau = \frac{P}{\Omega} = \frac{P}{b_{3p} t}. \quad (10)$$

Розглянемо загальний випадок розміщення лопаті, виконаної як сектор гвинтової стрічки, центр якого C збігається з центром гвинтової стрічки. Вибираємо відповідну циліндричну систему координат $Sr\varphi z$, центр якої збігається з центром виділеного сектора (рис. 2).

Диференціал дуги лінії на поверхні гвинтової лопаті:

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi =$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{dz}{dv} \cdot \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}$$

Для гвинтової поверхні згідно з (1):

$$\frac{dz}{dv} = \frac{T}{2\pi}.$$

Зв'язок кутового параметра φ з кутовим параметром v гвинтової поверхні визначаємо з умови рівності координати у довільній точці:

$$y = \rho \sin \varphi = (\rho \cos \varphi - \Delta) \operatorname{tg} v.$$

Звідси:

$$\operatorname{tg} v = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi - \Delta}.$$

Диференціюванням на v отримуємо:

$$\frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \left(\frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi - \Delta} \right)'_{\varphi} = \frac{\rho^2 - \Delta(\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)}{(\rho \cos \varphi - \Delta)^2}.$$

Згідно з (1):

$$\cos^2 v = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 v + 1} = \frac{(\rho \cos \varphi - \Delta)^2}{\rho^2 + \Delta^2 - 2\Delta\rho \cos \varphi}.$$

Тоді:

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{\rho^2 - \Delta(\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)}{\rho^2 - \Delta(2\rho \cos \varphi - \Delta)}.$$

Відповідно довжина лінії перетину буде такою:

$$l = \int_{-\zeta}^{\zeta} \sqrt{\rho^2 + \frac{T^2(\rho^2 - \Delta\rho' \sin \varphi - \Delta\rho \cos \varphi)^2}{4\pi^2(\rho^2 - 2\Delta\rho \cos \varphi + \Delta^2)^2} + (\rho')^2} d\varphi.$$

Вид функції $\rho = \rho(\varphi)$, що мінімізує функцію довжини, шукаємо з використанням методів варіаційного числення.

В нашому випадку задача полягає у пошуку екстремуму функціоналу:

$$V(\rho(\varphi)) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi, \rho, \rho') d\varphi.$$

задовольняє

$$F_{\varphi} - F_{\varphi\varphi'} - \rho' F_{\rho\rho'} - \rho'' F_{\rho'\rho''} = 0, \quad (11)$$

$$\text{де } F_{\varphi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}; F_{\rho} = \frac{\partial F}{\partial \rho}; F_{\rho'} = \frac{\partial F}{\partial \rho'}; F_{\varphi\varphi'} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \rho'}; F_{\rho\rho'} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \rho'}; F_{\rho'\rho''} = \frac{\partial^2 F}{(\partial \rho')^2}.$$

Для випадку $\Delta = 0$, коли центр кутового сектора лопаті збігається з центром гвинтового витка, то $v = \varphi$, і тоді підінтегральна функція залежить тільки від ρ та ρ'

($F = F(\rho, \rho')$), а рівняння Ейлера суттєво спрощуються, умова екстремуму набирає вигляду [3]:

$$F - \rho' F_{\rho'} = C_1.$$

Після відповідних перетворень:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \sqrt{\frac{\left(\rho^2 + \frac{T^2}{4\pi^2}\right)^2}{C_1^2} - \rho^2 - \frac{T^2}{4\pi^2}} = 0.$$

Одним з часткових розв'язків рівняння, що задовольняє граничні умови за реальних конструктивних параметрів гвинтових лопатей, і розв'язком конкретно поставленої задачі при $\Delta = 0$ буде:

$$C_1 = \sqrt{R^2 + \frac{T^2}{4\pi^2}};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\rho = R.$$

Відповідно ширина поверхні зрізу буде такою:

$$b_{zp} = \frac{2\theta R}{\cos \alpha_1}.$$

Аналіз рівняння (11) показав, що для випадку $\Delta > 0$ ширина поверхні згину наближено визначатиметься за залежністю:

$$b_{zp} = \frac{2(\xi R + \Delta \sin \xi)}{\cos \alpha}.$$

Напруження зрізу, що визначаються за залежністю (10), можна записати так:

$$\tau = \frac{P_{y1}}{t\sqrt{4\theta^2 R^2 + H^2}} = \frac{P_{y1} \sin \alpha_1}{tH} = \frac{P_{y1} \cos \alpha_1}{2t\theta R}. \quad (12)$$

Умова міцності лопатей виглядає так:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{z2}^2 + 4\tau^2} = \frac{P_{y1} \cos \alpha_1}{tR\theta} \sqrt{\frac{81\beta^2(D \cos \theta - 2R)^2}{4k_w^2 t^2 (\varrho + \theta^4)} + 1} \leq [\sigma], \quad (13)$$

де $[\sigma]$ – допускові згинні напруження при циклічному навантаженні.

Тут P_{y1} для випадку проектування секційних шнеків багатоцільового використання визначається із залежності (8) чи з умови конкретного навантаження згідно методики, поданої у [2].

Для лопатєво-гвинтових кормозмішувачів однією з найважливіших вимог є максимально можлива продуктивність. Для таких кормозмішувачів довжина лопаті суттєво більша за її товщину, і напруження розраховуються за залежністю (9).

Крім цього, для гвинтових конвеєрів багатофункціонального призначення, коли розрахунок виконується з найбільш несприятливих умов навантаження, доцільно брати максимально можливий рівень зусиль P_y . З врахуванням (8):

$$P_y = P_z \cos \theta_k + P_\tau \sin \theta_k < P_\tau,$$

за розрахункове значення доцільно вважати таким:

$$P_y = P_\tau = \frac{2M_z}{D} = \frac{2N}{n\omega D}.$$

Отже, конструктивні параметри елементів лопатево-гвинтового робочого органу з умови складного згину розраховуються за залежністю:

$$\sigma = \frac{3k_\Sigma N \cos(\alpha_2 - \alpha_1 + \varphi_T)(\cos \theta - 2R/D)\cos \alpha_1}{k_W n \omega t^2 R \theta \sin(\alpha_2 + \varphi_T)} \leq [\sigma],$$

де k_Σ - комплексний коефіцієнт, $k_\Sigma = \beta \sqrt{1 + \frac{4k_W^2 t^2 (9 + \theta^4)}{D \cos \theta - 2R}} \approx 1,1 - 1,3$.

Для коротких лопатей розрахунок на міцність виконується за загальними залежностями (9), (12).

Висновки

У результаті досліджень встановлено, що при розрахунку гвинтової лопаті на міцність напруження згину домінуюче, причому згин виконується на дотичній до циліндричної поверхні маточини лінії, а відхилення профілю гвинтової поверхні від лінії згину не більше за 1 мм. Найнебезпечнішою є точка посередині лінії згину.

Screw-sector type blade power estimation is presented in the paper. Bending line, inertia and resistance of the complex cross-section, bending pressure which appear in it under loading with the given useful moment or capacity are found. Location of the cross-section surface in which shear stress take place, when variation task on minimization in its area is solved, are determined.

Література

1. Дмитрів Д.В., Вітровий А.О. Розрахунок гвинтової лопаті на міцність // Прогресивні матеріали, технології та обладнання в машино- і приладобудуванні: Тези доповідей четвертої науково-технічної конф. ТДТУ. – Тернопіль, 2000. – С. 68.
2. Гевко Б.М., Рогатинский Р.М. Винтовые подающие механизмы сельскохозяйственных машин. – Львов: Выща школа, 1989. – 176 с.
3. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. – М.: Наука, 1981. – 718 с.
4. Вітровий А.О. Обґрунтування параметрів технологічного процесу роботи модульного гвинтового агрегату: Дис... канд. Техн. наук: 05.20.01. – Луцьк, 1999. – 132 с.

Одержано 05.02.2001 р.