УДК 517.946

І.Готинчан, канд. фіз.-мат. наук; М.Ленюк, докт.фіз.-мат.наук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДИФУЗІЇ ТЕПЛА ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру задачі дифузії тепла для кусково-однорідного трискладового середовища з м'якими межами.

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого в області

$$\mathrm{D}_2 = \{(t,r) : t \ge 0,\, r \in I_2 = (-\infty, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\, R_2 > 0,\, R_3 < \infty\}$$

розв'язку сепаратної системи класичних рівнянь теплопровідності параболічного і Λ - параболічного типу [1]

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\gamma_1^2}{a_1^2}v_1-\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2}=f_1(t,r), \quad r\in(-\infty,R_1), \quad t>0\\
&\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\gamma_2^2}{a_2^2}v_2-\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2}=f_2(t,r), \quad r\in(R_1,R_2), \quad t>0\\
&\frac{1}{a_3^2}\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{\gamma_3^2}{a_3^2}v_3-\Lambda_\mu[v_3]=f_3(t,r), \quad r\in(R_2,R_3), \quad t>0
\end{aligned} \tag{1}$$

за початковими умовами

$$v_j(t,r)\big|_{t=0}=g_j(r), \quad r\in(R_{j-1},R_j), \quad R_0=-\infty, \quad j=\overline{1,3} \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^m v_1}{\partial r^m}\Big|_{r=-\infty}=0, \quad m=0,1; \left[\left(\alpha_{22}^3+\delta_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^3+\gamma_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}\right]v_3\Big|_{r=R_3}=\omega_3(t) \tag{3}$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]v_k-\right.\\
&\left.-\left[\left(\alpha_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]v_{k+1}\right\}\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t); \quad j=1,2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут оператор Лежандра [2]

$$\Lambda_\mu=\frac{d^2}{dr^2}+cth\, r\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}-\frac{\mu^2}{sh^2 r}, \quad \mu\ge 0.$$

Ми вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\gamma_j^2\ge 0, \quad a_j>0, \quad \left|\alpha_{22}^3\right|+\left|\beta_{22}^3\right|\ne 0,$ $c_{11,k}\cdot c_{21,k}>0, \quad c_{j1,k}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k; \quad \alpha_{jm}^k\ge 0, \quad \beta_{jm}^k\ge 0, \quad \delta_{jm}^k\ge 0, \quad \gamma_{jm}^k\ge 0;$ $c_{j2,k}=\delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k-\delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k=0; \ c_{j1,j2}^{21,k}=\delta_{2j}^k\beta_{1j}^k-\delta_{1j}^k\beta_{2j}^k, \ c_{j1,j2}^{12,k}=\gamma_{2j}^k\alpha_{1j}^k-\gamma_{1j}^k\alpha_{2j}^k,$ $c_{j1,j2}^{21,k}\equiv c_{j1,j2}^{12,k}, \quad j,k,m=1,2.$

Припустимо, що шукані функції $v_j(t,r)$ є оригіналами Лапласа щодо змінної t [3]. У зображенні за Лапласом задачі (1) - (4) ставиться у відповідність задача побудови обмеженого на множині I_2 розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку [4]

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_1^2\right)v_1^*(p,r)=-\left[f_1^*(p,r)+\overline{g_1}(r)\right], \quad r\in(-\infty,R_1)\\
&\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)v_2^*(p,r)=-\left[f_2^*(p,r)+\overline{g_2}(r)\right], \quad r\in(R_1,R_2)\\
&\left(\Lambda_\mu-q_3^2\right)v_3^*(p,r)=-\left[f_3^*(p,r)+\overline{g_3}(r)\right], \quad r\in(R_2,R_3)
\end{aligned} \tag{5}$$

за крайовими умовами

$$\frac{d^m v_1^*}{dr^m}\Big|_{r=-\infty}=0, m=0,1; \left[\bar\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\bar\beta_{22}^3\right]v_3\Big|_{r=R_3}=\omega_3^*(p)+\delta_{22}^3 g'_3(R_3)+\gamma_{22}^3 g_3(R_3) \tag{6}$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\bar\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\bar\beta_{j1}^k\right]v_k^*(p,r)-\left[\bar\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\bar\beta_{j2}^k\right]v_{k+1}^*(p,r)\right\}\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}^*(p)+\psi_{jk}; \ j=1,2. \tag{7}$$

У рівностях (5) - (7) прийняті позначення:

$$\bar{\alpha}_{jk}^{m}=\alpha_{jk}^{m}+p\delta_{jk}^{m},\ \bar{\beta}_{jk}^{m}=\beta_{jk}^{m}+p\gamma_{jk}^{m},\ q_j^2=a_j^{-2}(p+\gamma_j^2);\ \bar{g}_j=a_j^{-2}g_j(r);$$

$$\psi_{jk}=\delta_{j1}^{k}g'_k(R_k)+\gamma_{j1}^{k}g_k(R_k)-\left[\delta_{j2}^{k}g'_{k+1}(R_k)+\gamma_{j2}^{k}g_{k+1}(R_k)\right].$$

<u>Зауваження:</u> можна завжди змінити початкові дані так, щоб

$$\delta_{22}^{3}g'_3(R_3)+\gamma_{22}^{3}g_3(R_3)=0 \text{ і } \psi_{jk}=0 \text{ для } j,k=1,2.$$

Позначимо $\Psi_j^*(p,r)=f_j^*(p,r)+\bar{g}_j(r)$ і зафіксуємо ту вітку, на якій $\operatorname{Re} q_j>0,\ j=\overline{1,3}$. Побудову розв'язків задачі (5) - (7) проведемо методом функції Коші [4,5].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння $\left(\frac{d^2}{dr^2}-q^2\right)v^*=0$ утворюють функції $\exp(qr)$ і $\exp(-qr)$ або їх лінійні комбінації $ch(qr)$ і $sh(qr)$ [4], а для рівняння $\left(\Lambda_\mu-q^2\right)v^*=0$ - приєднані функції Лежандра $P_{-\frac12+q}^{\mu}(chr)$ і $L_{-\frac12+q}^{\mu}(chr)$ [2].

Обмежений на множині I₂ розв'язок задачі (5) - (7) будемо шукати за правилами [4]:

$$v_1^*(p,r)=A_1e^{q_1(r-R_1)}+\int_{-\infty}^{R_1}E_1^*(p,r,\rho)\Psi_1^*(p,\rho)d\rho,\quad \nu_3=-\tfrac12+q_3$$

$$v_2^*(p,r)=A_2ch(q_2r)+B_2sh(q_2r)+\int_{R_1}^{R_2}E_2^*(p,r,\rho)\Psi_2^*(p,\rho)d\rho, \tag{8}$$

$$v_3^*(p,r)=A_3P_{\nu_3}^{\mu}(chr)+B_3L_{\nu_3}^{\mu}(shr)+\int_{R_2}^{R_3}E_3^*(p,r,\rho)\Psi_3^*(p,\rho)sh\rho d\rho.$$

Тут $E_j^*(p,r,\rho)$ $(j=\overline{1,3})$ - функції Коші [4,5]:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0$$

$$\tfrac{d}{dr}E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\tfrac{d}{dr}E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=-\varphi_j(\rho)$$

$$\varphi_1(\rho)=\varphi_2(\rho)=1,\quad \varphi_3(\rho)=(sh\rho)^{-1}.$$

Визначимо функції

$$Z_{-\frac12+q_3;jk}^{\mu,m1}(chR_m)\equiv\bar{\alpha}_{jk}^{m}sh(R_m)P_{-\frac12+q_3}^{\mu'}(chR_m)+\bar{\beta}_{jk}^{m}sh(R_m)P_{-\frac12+q_3}^{\mu}(chR_m),$$

$$Z_{-\frac12+q_3;jk}^{\mu,m2}(chR_m)\equiv\bar{\alpha}_{jk}^{m}sh(R_m)L_{-\frac12+q_3}^{\mu'}(chR_m)+\bar{\beta}_{jk}^{m}sh(R_m)L_{-\frac12+q_3}^{\mu}(chR_m),$$

$$V_{jk}^{m1}(q_sR_m)\equiv\bar{\alpha}_{jk}^{m}q_ssh(q_sR_m)+\bar{\beta}_{jk}^{m}ch(q_sR_m),$$

$$V_{jk}^{m2}(q_sR_m)\equiv\bar{\alpha}_{jk}^{m}q_sch(q_sR_m)+\bar{\beta}_{jk}^{m}sh(q_sR_m),$$

$$\Phi_{jk}^{m}(q_sR_m,q_sr)=V_{jk}^{m2}(q_sR_m)ch(q_sr)-V_{jk}^{m1}(q_sR_m)sh(q_sr),$$

$$F_{\nu_3;jk}^{\mu;m}(chR_m,chr)=Z_{\nu_3;jk}^{\mu;m1}(chR_m)L_{\nu_3}^{\mu}(chr)-Z_{\nu_3;jk}^{\mu;m2}(chR_m)P_{\nu_3}^{\mu}(chr).$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{1}{q_1\left(\bar{\alpha}_{11}^{1}q_1+\bar{\beta}_{11}^{1}\right)}\begin{cases}e^{q_1(r-R_1)}\Phi_{11}^{1}(q_1R_1,q_1\rho), & -\infty<r<\rho<R_1\\ e^{q_1(\rho-R_1)}\Phi_{11}^{1}(q_1R_1,q_1r), & -\infty<\rho<r<R_1\end{cases}; \tag{9}$$

$$E_2^*(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases} \tag{10}$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2),\quad j;k=1,2;$$

$$E_3^*(p,r,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+q_3-\mu\right)}{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+q_3+\mu\right)}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu_3,12}(chR_2,chR_3)}\times$$
$$\times\begin{cases}F^{\mu,2}_{\nu_3;12}(chR_2,chr)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho),\ R_2<r<\rho<R_3\\ F^{\mu,2}_{\nu_3;12}(chR_2,ch\rho)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),\ R_2<\rho<r<R_3\end{cases}\tag{11}$$

$$\Delta^{\mu}_{\nu_3,j2}(chR_2,chR_3)=Z^{\mu,21}_{\nu_3;j2}(chR_2)Z^{\mu,32}_{\nu_3;22}(chR_3)-Z^{\mu,22}_{\nu_3;j2}(chR_2)Z^{\mu,31}_{\nu_3;22}(chR_3),\ j;k=1,2.$$

Крайові умови (6) та умови спряження (7) для визначення величин A_j $\left(j=\overline{1,3}\right)$ і B_k $(k=2,3)$ дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\alpha}_{11}^1q_1+\overline{\beta}_{11}^1\right)A_1-V_{12}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{12}^{12}(q_2R_1)B_2=\omega_{11}^*(p)+\Psi_{11}\equiv\overline{\omega}_{11}^*\\
&\left(\overline{\alpha}_{21}^1q_1+\overline{\beta}_{21}^1\right)A_1-V_{22}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{22}^{12}(q_2R_1)B_2=\omega_{21}^*(p)+\Psi_{21}+G_{12}^*\equiv\overline{\omega}_{21}^*+G_{12}^*\\
&V_{11}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{11}^{22}(q_2R_2)B_2-Z^{\mu,21}_{\nu_3,12}(chR_2)A_3-Z^{\mu,22}_{\nu_3,12}(chR_2)B_3=\omega_{12}^*(p)+\Psi_{12}\equiv\overline{\omega}_{12}^*\quad(12)\\
&V_{21}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{21}^{22}(q_2R_2)B_2-Z^{\mu,21}_{\nu_3,22}(chR_2)A_3-Z^{\mu,22}_{\nu_3,22}(chR_2)B_3=\\
&\qquad=\omega_{22}^*(p)+\Psi_{22}+G_{23}^*\equiv\overline{\omega}_{22}^*+G_{23}^*\\
&Z^{\mu,31}_{\nu_3;22}(chR_3)A_3+Z^{\mu,32}_{\nu_3;22}(chR_3)B_3=\omega_3^*(p)+\delta_{22}^3g_3'(R_3)+\gamma_{22}^3g_3(R_3)\equiv\overline{\omega}_3^*(p).
\end{aligned}$$

У системі (12) беруть участь функції:

$$G_{12}^*=c_{11}\int\limits_{-\infty}^{R_1}e^{q_1(\rho-R_1)}\frac{\Psi_1^*(p,\rho)d\rho}{\overline{\alpha}_{11}^1q_1+\overline{\beta}_{11}^1}+c_{21}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\Psi_2^*(p,\rho)d\rho,$$

$$G_{23}^*=-c_{12}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\Psi_2^*(p,\rho)d\rho-\frac{c_{22}}{shR_2}\int\limits_{R_2}^{R_3}\frac{F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho)}{\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}\Psi_3^*(p,\rho)sh\rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: для $p=\sigma+is$ з $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\operatorname{Im}p=s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (12):

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu(p)&\equiv\left(\overline{\alpha}_{11}^1q_1+\overline{\beta}_{11}^1\right)A^{\mu}_{\nu_3;2}(p)-\left(\overline{\alpha}_{21}^1q_1+\overline{\beta}_{21}^1\right)A^{\mu}_{\nu_3;1}(p)=\\
&=\Delta^{\mu}_{\nu_3;22}(chR_2,chR_3)B_1(p)-\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)B_2(p)\neq0.
\end{aligned}\tag{13}$$

Тут прийняті позначення:

$$A^{\mu}_{\nu_3;j}(p)=\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)\Delta^{\mu}_{\nu_3;22}(chR_2,chR_3)-\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2)\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3),$$
$$B_j(p)=\left(\overline{\alpha}_{11}^1q_1+\overline{\beta}_{11}^1\right)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-\left(\overline{\alpha}_{21}^1q_1+\overline{\beta}_{21}^1\right)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),\ j=1,2.$$

Визначимо функції:

$$\begin{aligned}
&S_1(p,r)=A^{\mu}_{\nu_3,2}(p)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r)-A^{\mu}_{\nu_3,1}(p)\Phi_{21}^1(q_1R_1,q_1r),\\
&S_2(p,r)=\Delta^{\mu}_{\nu_3,12}(chR_2,chR_3)\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r)-\Delta^{\mu}_{\nu_3,22}(chR_2,chR_3)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r);\\
&S_3(p,r)=\left(\overline{\alpha}_{21}^1q_1+\overline{\beta}_{21}^1\right)\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)-\left(\overline{\alpha}_{11}^1q_1+\overline{\beta}_{21}^1\right)\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r);\qquad(14)\\
&S_4(p,r)=B_1(p)F^{\mu,2}_{\nu_3;22}(chR_2,chr)-B_2(p)F^{\mu,2}_{\nu_3;12}(chR_2,chr).
\end{aligned}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (12), підстановки одержаних виразів A_j $\left(j=\overline{1,3}\right)$ та B_k $(k=2,3)$ у формули (8), отримуємо єдиний розв'язок задачі (5) - (7):

$$v_j^*(p,r)=W_{\mu;3j}^*(p,r)\bar{\omega}_3^*(p)+\sum_{m,k=1}^{2}R_{mk;j}^*(p,r)\bar{\omega}_{mk}^*(p)+\int_{-\infty}^{R_1}H_{\mu;j1}^*(p,r,\rho)\Psi_1^*(p,\rho)d\rho+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}H_{\mu;j2}^*(p,r,\rho)\Psi_2^*(p,\rho)d\rho+\int_{R_2}^{R_3}H_{\mu;j3}^*(p,r,\rho)\Psi_3^*(p,\rho)sh\rho d\rho,\quad j=\overline{1,3}. \tag{15}$$

У рівностях (15) беруть участь : а) породжені крайовою умовою (6) функції Гріна:

$$W_{\mu,31}^*(p,r)=-\frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{shR_2}\frac{\Gamma\left(1/2+q_3+\mu\right)}{\Gamma\left(1/2+q_3-\mu\right)}\frac{c_{21}q_2}{\Delta_\mu(p)}e^{q_1(r-R_1)},$$
$$W_{\mu,32}^*(p,r)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{shR_2}\frac{\Gamma\left(1/2+q_3+\mu\right)}{\Gamma\left(1/2+q_3-\mu\right)}\frac{1}{\Delta_\mu(p)}S_3(p,r), \tag{16}$$
$$W_{\mu,33}^*(p,r)=\frac{1}{\Delta_\mu(p)}S_4(p,r).$$

б) породжені неоднорідністю системи (5) функції впливу:

$$H_{\mu;11}^*(p,r,\rho)=\frac{1}{q_1\Delta_\mu(p)}\begin{cases}e^{q_1(r-R_1)}S_1(p,\rho),-\infty<r<\rho<R_1\\ e^{q_1(\rho-R_1)}S_1(p,r),-\infty<\rho<r<R_1\end{cases};$$
$$H_{\mu;12}^*(p,r,\rho)=\frac{c_{21}}{\Delta_\mu(p)}e^{q_1(r-R_1)}S_2(p,\rho),$$
$$H_{\mu;13}^*(p,r,\rho)=-\frac{c_{21}c_{22}q_2}{shR_2\Delta_\mu(p)}e^{q_1(r-R_1)}F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,ch\rho);$$
$$H_{\mu;21}^*(p,r,\rho)=\frac{c_{11}}{\Delta_\mu(p)}e^{q_1(\rho-R_1)}S_2(p,r);$$
$$H_{\mu;22}^*(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_\mu(p)}\begin{cases}S_3(p,r)S_2(p,\rho),\ R_1<r<\rho<R_2\\ S_3(p,\rho)S_2(p,r),\ R_1<\rho<r<R_2\end{cases}; \tag{17}$$
$$H_{\mu;23}^*(p,r,\rho)=\frac{c_{22}}{shR_2\Delta_\mu(p)}S_3(p,r)F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,ch\rho);$$
$$H_{\mu;31}^*(p,r,\rho)=-\frac{c_{11}c_{12}q_2}{\Delta_\mu(p)}e^{q_1(\rho-R_1)}F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr);$$
$$H_{\mu;32}^*(p,r,\rho)=\frac{c_{12}}{\Delta^*(p)}S_3(p,\rho)F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr);$$
$$H_{\mu;33}^*(p,r,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_3-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_3+\mu\right)}\frac{1}{\Delta_\mu(p)}\begin{cases}F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,ch\rho)S_4(p,r),\ R_2<r<\rho<R_3\\ F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr)S_4(p,\rho),\ R_2<\rho<r<R_3\end{cases};$$

в) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна:

$$R_{11,1}^*=\frac{1}{\Delta_\mu(p)}A_{\nu_3,2}^{\mu}(p)e^{q_1(r-R_1)},\qquad R_{21,1}^*=-\frac{1}{\Delta_\mu(p)}A_{\nu_3,1}^{\mu}(p)e^{q_1(r-R_1)};$$
$$R_{12,1}^*=-\frac{c_{21}q_2}{\Delta_\mu(p)}\Delta_{\nu_3,22}^{\mu}(p)e^{q_1(r-R_1)},\qquad R_{22,1}^*=\frac{c_{21}q_2}{\Delta_\mu(p)}\Delta_{\nu_3,12}^{\mu}(p)e^{q_1(r-R_1)};$$
$$R_{11,2}^*=-\frac{\bar{\alpha}_{21}^1q_1+\bar{\beta}_{21}^1}{\Delta_\mu(p)}S_2(p,r),\qquad R_{21,2}^*=\frac{\bar{\alpha}_{11}^1q_1+\bar{\beta}_{11}^1}{\Delta_\mu(p)}S_2(p,r);$$

$$R_{12,2}^{*}=\frac{\Delta_{\nu_3;22}^{\mu}}{\Delta_{\mu}(p)}S_3(p,r),\qquad R_{22,2}^{*}=-\frac{\Delta_{\nu_3;12}^{\mu}}{\Delta_{\mu}(p)}S_3(p,r);\tag{18}$$

$$R_{11,3}^{*}=\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{\mu}(p)}\left(\bar{\alpha}_{21}^{1}q_1+\bar{\beta}_{21}^{1}\right)F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr);\qquad R_{12,3}^{*}=-\frac{B_2(p)}{\Delta_{\mu}(p)}F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr),$$

$$R_{21,3}^{*}=-\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{\mu}(p)}\left(\bar{\alpha}_{11}^{1}q_1+\bar{\beta}_{11}^{1}\right)F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr);\quad R_{22,3}^{*}=\frac{B_1(p)}{\Delta_{\mu}(p)}F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr).$$

Повертаючись в рівностях (15) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі теплопровідності (1) - (4):

$$v_j(t,r)=\int_0^t W_{\mu;3j}(t-\tau,r)\bar{\omega}_3(\tau)d\tau+\sum_{m,k=1}^{2}\int_0^t R_{mk;j}(t-\tau,r)\bar{\omega}_{mk}(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{R_1}H_{\mu;j1}(t-\tau,r,\rho)\Psi_1(\tau,\rho)d\rho d\tau+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}H_{\mu;j2}(t-\tau,r,\rho)\Psi_2(\tau,\rho)d\rho d\tau+\tag{19}$$
$$+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3}H_{\mu;j3}(t-\tau,r,\rho)\Psi_3(\tau,\rho)sh\rho d\rho d\tau,\quad j=\overline{1,3}.$$

Тут за означенням [3]

$$W_{\mu;3j}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}W_{\mu;3j}^{*}(p,r)e^{pt}dp,\quad j=\overline{1,3},\tag{20}$$

$$R_{mk;j}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}R_{mk;j}^{*}(p,r)e^{pt}dp,\quad m,k=1,2;\ j=\overline{1,3},\tag{21}$$

$$H_{\mu;jk}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}H_{\mu;;jk}^{*}(p,r)e^{pt}dp,\quad j,k=\overline{1,3}.\tag{22}$$

Особливими точками головних розв'язків (функцій Гріна $W_{\mu,3j}^{*}, R_{mk,j}^{*}$ та функцій впливу $H_{\mu,jk}^{*}$) є точки галуження $p=-\gamma_j^2$ $\left(j=\overline{1,3}\right)$ і $p=\infty$. Покладемо $q_j=ib_j=i\left[a_j^{-1}\sqrt{\beta^2+k_j^2}\right]$, $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2\ge 0$, де $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_3^2\right\}$ Тоді $p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\equiv\left(\beta^2+\gamma^2\right)\exp(\pi i)$, $dp=-2\beta d\beta$.

Безпосередньо одержуємо:

$$V_{jm}^{k1}(ib_sR_k)=-\tilde{\alpha}_{jm}^{k}b_s\sin b_sR_k+\tilde{\beta}_{jm}^{k}b_s\cos b_sR_k\equiv v_{jm}^{k1}(b_sR_k),$$
$$V_{jm}^{k2}(ib_sR_k)=i(\tilde{\alpha}_{jm}^{k}b_s\cos b_sR_k+\tilde{\beta}_{jm}^{k}b_s\sin b_sR_k)\equiv iv_{jm}^{k2}(b_sR_k),$$
$$\Delta_{jk}(ib_2R_1,ib_2R_2)=i\left[v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2)-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2)\right]\equiv i\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2),$$
$$\Phi_{jk}^{m}(q_sR_m,q_sr)\equiv\Phi_{jk}^{m}(ib_sR_m,ib_sr)=i\left[v_{jk}^{m2}(b_sR_m)\cos(b_sr)-v_{jk}^{m1}(b_sR_m)\sin(b_sr)\right]\equiv$$
$$\equiv i\varphi_{jk}^{m}(b_sR_m,b_sr);$$
$$\tilde{\alpha}_{kj}^{m}=\alpha_{kj}^{m}-(\beta^2+\gamma^2)\delta_{kj}^{m},\quad \tilde{\beta}_{kj}^{m}=\beta_{kj}^{m}-(\beta^2+\gamma^2)\gamma_{kj}^{m}.$$

Визначимо дві дійсні приєднані функції Лежандра $A_{-1/2+ib_3}^{\mu}(chr)$ та $B_{-1/2+ib_3}^{\mu}(chr)$, поклавши:

$$P^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr) = A^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr)\sin\mu\pi + B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr)\cos\mu\pi,$$

$$L^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr) = A^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr) - iB^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr)th\pi b_3.$$

Якщо прийняти позначення

$$Y^{\mu,m1}_{-1/2+ib_3;kj}(chR_m) = \tilde{\alpha}^m_{kj} shR_m A^{\mu'}_{-1/2+ib_3}(chR_m) + \tilde{\beta}^m_{kj} A^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chR_m),$$

$$Y^{\mu,m2}_{-1/2+ib_3;kj}(chR_m) = \tilde{\alpha}^m_{kj} shR_m B^{\mu'}_{-1/2+ib_3}(chR_m) + \tilde{\beta}^m_{kj} B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chR_m),$$

то послідовно будемо мати:

$$Z^{\mu,m1}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m) = Y^{\mu,m1}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m)\sin\mu\pi + Y^{\mu,m2}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m)\cos\mu\pi,$$

$$Z^{\mu,m2}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m) = Y^{\mu,m1}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m) - iY^{\mu,m2}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m)th\pi b_3;$$

$$\Delta^{\mu}_{-1/2+ib_3;j2}(chR_2, chR_3) = -(\cos\mu\pi + ith\pi b_3\sin\mu\pi)\Big[Y^{\mu,21}_{-1/2+ib_3;j2}(chR_2)Y^{\mu,32}_{-1/2+ib_3;22}(chR_3) -$$

$$- Y^{\mu,22}_{-1/2+ib_3;j2}(chR_2)Y^{\mu,31}_{-1/2+ib_3;22}(chR_3)\Big] \equiv -\gamma_3\delta^{\mu}_{-1/2+ib_3;j2}(chR_2, chR_3);$$

$$F^{\mu,m}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m, chr) = -\gamma_3\Big[Y^{\mu,m1}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m)B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr) - Y^{\mu,m2}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m)A^{\mu}_{-1/2+ib_3}(ch)\Big] \equiv$$

$$\equiv -\gamma_3 f^{\mu,m}_{-1/2+ib_3;jk}(chR_m, chr);$$

$$A^{\mu}_{-1/2+ib_3;j}((\beta^2+\gamma^2)\exp\pi i) = -\gamma_3 i\Big[\delta_{j1}(b_2R_1, b_2R_2)\delta^{\mu}_{-1/2+ib_3;22}(chR_2, chR_3) -$$

$$- \delta_{j2}(b_2R_1, b_2R_2)\delta^{\mu}_{-1/2+ib_3;12}(chR_2, chR_3)\Big] \equiv -i\gamma_3 a^{\mu}_{-1/2+ib_3;j}(\beta);$$

$$\Delta_{\mu}((\beta^2+\gamma^2)\exp\pi i) = -i\gamma_3\Big[\left(\tilde{\alpha}^1_{11}ib_1 + \tilde{\beta}^1_{11}\right)a^{\mu}_{-1/2+ib_3;2}(\beta) - \left(\tilde{\alpha}^1_{21}ib_1 + \tilde{\beta}^1_{21}\right)a^{\mu}_{-1/2+ib_3;1}(\beta)\Big] \equiv$$

$$\equiv -i\gamma_3\left\{\Big[\tilde{\beta}^1_{11}a^{\mu}_{-1/2+ib_3;2}(\beta) - \tilde{\beta}^1_{21}a^{\mu}_{-1/2+ib_3;1}(\beta)\Big] + ib\Big[\tilde{\alpha}^1_{11}a^{\mu}_{-1/2+ib_3;2}(\beta) - \tilde{\alpha}^1_{21}a^{\mu}_{-1/2+ib_3;1}(\beta)\Big]\right\} \equiv$$

$$\equiv -i\gamma_3[\omega_{\mu,2}(\beta) + ib_1\omega_{\mu,1}(\beta)].$$

Визначимо функції:

$$V_{\mu,1}(r,\beta) = b_1\omega_{\mu,1}(\beta)\cos b_1(r-R_1) - \omega_{\mu,2}(\beta)\sin b_1(r-R_1),$$

$$V_{\mu,2}(r,\beta) = c_{11,1}b_1 \times$$

$$\times\Big[\delta^{\mu}_{-1/2+ib_3;12}(chR_2, chR_3)\varphi^2_{21}(b_2R_2, b_2r) - \delta^{\mu}_{-1/2+ib_3;22}(chR_2, chR_3)\varphi^2_{11}(b_2R_2, b_2r)\Big];$$

$$V_{\mu,3}(r,\beta) = -c_{11,1}c_{11,2}b_1b_2 f^{\mu,3}_{-1/2+ib_3;22}(chR_3, chr) \equiv c_{11,1}c_{11,2}b_1b_2 \times \qquad (23)$$

$$\times\Big[Y^{\mu,32}_{-1/2+ib_3;22}(chR_3)A^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr) - Y^{\mu,31}_{-1/2+ib_3;22}(chR_3)B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(chr)\Big],$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1^2},\ \sigma_2 = \frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}\frac{1}{a_2^2},\ \sigma_3 = \frac{c_{21,1}c_{21,2}}{c_{11,1}c_{11,2}}\frac{1}{a_3^2 shR_2},$$

$$\Omega_{\mu}(\beta) = \beta b_1^{-1}\left([\omega_{\mu,2}(\beta)]^2 + b_1^2[\omega_{\mu,1}(\beta)]^2\right)^{-1}.$$

В силу леми Жордана й теореми Коші [3] одержуємо:

$$H_{\mu;jk}(t,r,\rho) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\left\{H^*_{\mu;jk}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right), r, \rho\right)\right\}e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\beta\, d\beta =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t} V_{\mu,j}(r,\beta)V_{\mu,k}(\rho,\beta)\Omega_\mu(\beta)\,d\beta\,\sigma_k a_k^2 \equiv G_{\mu;jk}(t,r,\rho)\sigma_k a_k^2,\ j,k=\overline{1,3}, \quad (24)$$

$$W_{\mu;3j}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\left[\frac{2}{\pi^2}\frac{c_{21,1}c_{21,2}}{shR_2}b_1(\beta)b_2(\beta)ch\pi b_3\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+ib_3+\mu\right)\right|^2\right]\times \quad (25)$$

$$\times V_{\mu,j}(r,\beta)\Omega_\mu(\beta)\,d\beta \quad j,k=\overline{1,3},$$

$$R_{1k,j}(t,r)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\left[\frac{a_k^2\sigma_k}{c_{11,k}}\left(\tilde\alpha_{22}^k\frac{d}{dr}+\tilde\beta_{22}^k\right)V_{\mu,k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}\right]\times \quad (26)$$

$$\times V_{\mu,j}(r,\beta)\Omega_\mu(\beta)\,d\beta,\quad k=1,2,\ j,=\overline{1,3},$$

$$R_{2k,j}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\left[\frac{a_k^2\sigma_k}{c_{11,k}}\left(\tilde\alpha_{12}^k\frac{d}{dr}+\tilde\beta_{12}^k\right)V_{\mu,k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}\right]\times \quad (27)$$

$$\times V_{\mu,j}(r,\beta)\Omega_\mu(\beta)\,d\beta,\quad k=1,2,\ j,=\overline{1,3},$$

Якщо врахувати, що

$$\Psi_j(\tau,\rho)=f_j(\tau,\rho)+a_j^{-2}g_j(\rho)\delta_+(\tau),\ \varpi_3(\tau)=\omega_3(\tau)+\left[\delta_{11}^3 g'_3(R_3)+\gamma_{11}^3 g_3(R_3)\right]\delta_+(\tau),$$

$$\bar\omega_{mk}(\tau)=\omega_{mk}(\tau)+\psi_{mk}\delta_+(\tau);\ \int_0^t H(t-\tau,x)\delta_+(\tau)d\tau=H(t,x),$$

то згідно формули (19) отримуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1) - (4)

$$v_j(t,r)=\int_0^t W_{\mu;3j}(t-\tau,r)\omega_3(\tau)d\tau+\left[\delta_{11}^3 g'_3(R_3)+\gamma_{11}^3 g_3(R_3)\right]W_{\mu;3j}(t,r)+$$

$$+\sum_{m,k=1}^{2}\int_0^t R_{mk;j}(t-\tau,r)\omega_{mk}(\tau)d\tau+\sum_{m,k=1}^{2}\Psi_{mk}R_{mk;j}(t,r)+\sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}G_{\mu;jk}(t,r,\rho)g_k(\rho)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}G_{\mu;jk}(t-\tau,r,\rho)a_k^2 f_k(\tau,\rho)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\tau;\ R_0=-\infty,\ \varphi_1=\varphi_2=1,\ \varphi_3=sh\rho,\ j=\overline{1,3}. \quad (28)$$

При відомих вектор-функціях $f=\{f_1,f_2,f_3\}$ і $g=\{g_1,g_2,g_3\}$та функціях $\omega_3(t)$ і $\omega_{jk}(t)$ $(j,k=1,2)$ вектор-функція $v(t,r)=\{v_1(t,r);v_2(t,r);v_3(t,r)\}$ описує однозначно процес дифузії тепла в даному трискладовому середовищі з м'якими межами. Якщо покласти $\delta_{jk}^m=0,\ \gamma_{jk}^m=0,$ то одержимо відповідний розв'язок параболічної задачі для даного середовища з жорсткими (по відношенню до відбиття хвиль) межами.

The method of fundamental functions constructs exact analytical solution of algorithmic character of the task дифузий of heat for the piece - homogeneous three-composite environment with soft boundaries.

Література

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.- 735 с.
2. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. - Львов, 1989. - 60 с. - (Препринт/ АН УССР Ин-т прикладных проблем механики и математики).
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987. - 688 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959. - 468 с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328 с.

Одержано 04.07.2002 р.