УДК 517.946

Б.Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

СТОХАСТИЧНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СИМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

У рамках кореляційної теорії побудовано основні ймовірнісні характеристики стохастичного динамічного термопружного поля в (n+1)- шарових симетричних просторах

Розглянемо вільний від зовнішнього навантаження $(n+1)$- шаровий симетричний простір

$$P_n^+ = \left\{ r : r \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (R_{k-1}, R_k); R_0 = 0, R_{n+1} = \infty \right\},$$

що має при $t \le 0$ всюди нульову температуру, а при $t > 0$ в просторі діють неперервно розподілені випадкові в часі теплові джерела. Для визначення нестаціонарного температурного поля, що виникає у просторі P_n^+, маємо задачу побудови обмеженого в області

$$D_n^+ = \left\{ (t,r) : t \in (0,\infty), r \in P_n^+ \right\} \equiv \sum_{j=1}^{n+1} D_{nj}^+ ;\ D_{nj}^+ = \left\{ (t,r) : t \in (0,\infty), r \in (R_{j-1}, R_j) \right\}$$

розв’язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності $B-$ параболічного типу [1,2]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - a_j^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T_j = f_j(t,r), (t,r) \in D_{nj}^+,$$

$$(2\alpha_j + 1) \ge 0, j = \overline{1, n+1} \qquad (1)$$

з нульовими початковими умовами та умовами неідеального термічного контакту [3]

$$\begin{cases} \left[(b_k \frac{\partial}{\partial r} + 1) T_k - T_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0, k = \overline{1,n} \\ (\lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial r} - \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial r}) \Big|_{r=R_k} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Тут b_k - термічний коефіцієнт термоопору; λ_k – коефіцієнт теплопровідності; a_k^2 – коефіцієнт температуропровідності. При $\alpha_j = 0$ маємо випадок циліндричної (осьової) симетрії, а при $\alpha_k = \frac{1}{2}$ – випадок сферичної (центральної) симетрії.

Детермінований розв’язок задачі (1),(2) побудовано у роботі [4] методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур’є – Бесселя на полярній осі $r \ge 0$ з n точками спряження [5]:

$$T_j(t,r) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H^*_{(\alpha);jk}(t-\tau, r, \rho) f_k(\tau,\rho) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho d\tau;\ j = \overline{1, n+1} \qquad (3)$$

У формулах (3) беруть участь функції впливу

$$H^*_{(\alpha);jk}(t,r) = \int_0^\infty e^{-\beta^2 t} V_{(\alpha);j}(r,\beta) V_{(\alpha);k}(\rho;\beta) \Omega_{(\alpha);n}(\beta) d\beta;\ j,k = \overline{1, n+1} \qquad (4)$$

породжені дією теплових джерел, неперервно розподілених на кожній ділянці $(R_{j-1}, R_j), j = \overline{1, n+1}$ $(R_0 = 0, R_{n+1} = \infty)$; $(\alpha)_k = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), (\alpha)_{n+1} \equiv (\alpha)$;

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=\Delta_{(\alpha);n}(\beta)J_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1 r), q_j=a_j^{-1}\beta; \Delta_{(\alpha);n}=\prod_{k=1}^{n}\Delta^k_{\alpha_{k+1}}; \quad (5)$$

$$V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)=(\prod_{j=k+1}^{n}\Delta^j_{\alpha_{j+1}})(\beta)[W^{(k)}_{(\alpha)_{k+1};2}(\beta)J_{\alpha_{k+1},\alpha_{k+1}}(q_{k+1}r)-W^{(k)}_{(\alpha)_{k+1};1}(\beta)N_{\alpha_{k+1},\alpha_{k+1}}(q_{k+1}r)];$$

$$\Delta^k_{\alpha_{k+1}}=\frac{2\lambda_{k+1}}{\pi R_k^{2\alpha_{k+1}+1}q_{k+1}^{2\alpha_{k+1}}}; \quad k=\overline{1,n-1};$$

$$V_{(\alpha);n+1}(r,\beta)=W^{(n)}_{(\alpha);2}(\beta)J_{\alpha_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{n+1}r)-W^{(n)}_{(\alpha);1}(\beta)N_{\alpha_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{n+1}r);$$

$$\sigma_k=\frac{1}{a_k^2}\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\frac{R_k^{2\alpha_{k+1}+1}...R_n^{2\alpha_{n+1}+1}}{R_k^{2\alpha_k+1}...R_n^{2\alpha_n+1}}, \quad k=\overline{1,n}; \quad (k)=123...k;$$

$$\Omega_{(\alpha);n}(\beta)=a_{n+1}^{-2\alpha_{n+1}}\beta^{2\alpha_{n+1}+1}([W^{(n)}_{(\alpha);1}(\beta)]^2+[W^{(n)}_{(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1};$$

$J_{\nu,\nu}(x)=x^{-\nu}J_\nu(x), N_{\nu,\nu}(x)=x^{-\nu}N_\nu(x); J_\nu(x), N_\nu(x)-$ функції Бесселя 1-го й 2-го роду порядку ν. При цьому функції $J_{\alpha_k,\alpha_k}(q_k r)$ та $N_{\alpha_k,\alpha_k}(q_k r)$ утворюють фундаментальну систему розв’язків для рівняння Бесселя

$$(B_{\alpha_k,\alpha_k}+q_k^2)V\equiv(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_k+1}{r}\frac{d}{dr}+q_k^2)V=0.$$

У рівностях (5) прийняті позначення:

$$u^{k1}_{\alpha_j,\alpha_j;11}(q_jR_k)=J_{\alpha_j,\alpha_j}(q_jR_k)-R_kq_j^2b_kJ_{\alpha_j+1,\alpha_j+1}(q_jR_k);$$
$$u^{k1}_{\alpha_j,\alpha_j;12}(q_jR_k)=N_{\alpha_j,\alpha_j}(q_jR_k)-R_kq_j^2b_kN_{\alpha_j+1,\alpha_j+1}(q_jR_k);$$
$$u^{k1}_{\alpha_j,\alpha_j;21}(q_jR_k)=-R_k\lambda_kq_j^2J_{\alpha_j+1,\alpha_j+1}(q_jR_k);$$
$$u^{k2}_{\alpha_j,\alpha_j;21}(q_jR_k)=-\lambda_kR_kq_j^2N_{\alpha_j+1,\alpha_j+1}(q_jR_k);$$
$$u^{k2}_{\alpha_j,\alpha_j;12}(q_jR_k)=J_{\alpha_j,\alpha_j}(q_jR_k); \quad u^{k2}_{\alpha_j,\alpha_j;12}(q_jR_k)=N_{\alpha_j,\alpha_j}(q_jR_k); k=\overline{1,n};$$
$$u^{k1}_{\alpha_j,\alpha_j;22}(q_jR_k)=-\lambda_{k+1}R_kq_j^2J_{\alpha_j+1,\alpha_j+1}(q_jR_k);$$
$$u^{k2}_{\alpha_j,\alpha_j;22}(q_jR_k)=-\lambda_{k+1}R_kq_j^2N_{\alpha_j+1,\alpha_j+1}(q_jR_k);$$
$$\psi^k_{(\alpha_k,\alpha_{k+1});ij}(q_kR_k,q_{k+1}R_k)=u^{ki}_{\alpha_k,\alpha_k;11}(q_kR_k)u^{kj}_{\alpha_{k+1},\alpha_{k+j};22}(q_{k+1}R_k)- \quad (6)$$
$$-u^{ki}_{\alpha_k,\alpha_k;21}(q_kR_k)u^{kj}_{\alpha_{k+1},\alpha_{k+1};12}(q_{k+1}R_k); k=\overline{1,n};$$
$$W^{(1)}_{(\alpha)_2;j}(\beta)=\psi^1_{(\alpha_1,\alpha_2);1j}(q_1R_1,q_2R_1); j=1,2;$$
$$W^{(k)}_{(\alpha)_{k+1};j}(\beta)=W^{(k-1)}_{(\alpha)_k;2}(q_1R_1,q_2R_1;q_2R_2q_3R_2;...;q_{k-1}R_{k-1},q_kR_{k-1})\times$$
$$\times\psi^k_{(\alpha_k,\alpha_{k+1});1j}(q_kR_k,q_{k+1}R_k)-\psi^k_{(\alpha_k,\alpha_{k+1});2j}(q_kR_k,q_{k+1}R_k)\times$$
$$\times W^{(k-1)}_{(\alpha)_k;1}(q_1R_1,q_2R_1;q_2R_2q_3R_2;...;q_{k-1}R_{k-1},q_kR_{k-1}); k=\overline{2,n}.$$

Припустимо, що функції $f_k(t,r)$ можна подати як добуток $f_k(t,r)=\psi_k(r)g_k(t)$ або суми таких добутків $(k=\overline{1,n+1})$, де $\psi_k(r)$ - детерміновані функції, а $g_k(t)$ - стаціонарні в широкому розумінні випадкові функції часу [6,7].

Якщо вважати

$$G_{(\alpha);jk}(t,r)=\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} H*_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)\psi_k(\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho, k=\overline{1,n+1}; R_0=0, R_{n+1}=\infty \quad (7)$$

то детермінований розв’язок задачі (1),(2) матиме структуру

$$T_i(t,r)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t G_{(\alpha);ik}(t-\tau,r)g_k(\tau)d\tau, i=\overline{1,n+1} \quad (8)$$

Оскільки $g_k(\tau)$ - стаціонарні у широкому розумінні випадкові функції часу, то внаслідок лінійності задачі (1),(2) можна вважати, що математичне сподівання $M[g_k(t)]=0,\quad k=\overline{1,n+1}$.

Згідно з формулою (8) знаходимо, що математичне сподівання

$$M[T_i]=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t G_{(\alpha);ik}(t-\tau,r)M[g_k(\tau)]d\tau=0, i=\overline{1,n+1} \quad (9)$$

Для компонентів $K_{T_iT_m}(t_1,t_2,r)$ кореляційної функції стохастичного нестаціонарного температурного поля отримуємо вираз [7]

$$K_{T_iT_m}(t_1,t_2,r)=\sum_{j,k=1}^{n+1}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} G_{(\alpha);ij}(t_1-\tau_1,r)G_{(\alpha);mk}(t_2-\tau_2,r)\times$$
$$\times K_{jk}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2;\; K_{jk}=K_{g_jg_k}(\tau_1,\tau_2);\quad i,m=\overline{1,n+1} \quad (10)$$

Звідси випливає наявність кореляційної матриці

$$K_T(t_1,t_2,r)=\left\{K_{TiT_m}(t_1,t_2,r)\right\}_{i,m=1}^{n+1} \quad (11)$$

При $t_1=t_2\equiv t$ одержуємо матрицю

$$D_T(t,r)\equiv K_T(t,t,r) \quad (12)$$

яка характеризує потужність стохастичного нестаціонарного температурного поля у симетричному просторі P_n^+.

Якщо температурні поля, породженні випадковими процесами $g_j(t)$, незалежні, то для $j\neq k=\overline{1,n+1}$ $K_{jk}(t_1,t_2)=0$ і в формулах (10) залишиться тільки одна сума. Якщо при цьому ще й температурні поля ділянок $(0,R_1),(R_1,R_2),\ldots,(R_{n-1},R_n),(R_n,\infty)$ незалежні, то $K_{T_iT_m}(t_1,t_2,r)=0$ для $i\neq m=\overline{1,n+1}$. Тоді кореляційна матриця $K_T(t_1,t_2,r)$ і матриця потужності $D_T(t,r)$ набирають діагональної форми.

Динамічне поле напружень в симетричному просторі P_n^+, породжене нестаціонарним температурним полем (8) , опишуть відмінні від тотожнього нуля центральні компоненти тензора напружень [1,6]

$$\sigma_{1j}(t,r)=G_j^*\left[\frac{\partial u_j}{\partial r}+(2\alpha_j+1)\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{u_j}{r}-m_jT_j(t,r)\right],$$
$$\sigma_{2j}(t,r)=G_j^*\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r}+(1+\frac{2\alpha_j\mu_j}{1-\mu_j})\frac{u_j}{r}-m_jT_j(t,r)\right], \quad (13)$$
$$\sigma_{3j}(t,r)=G_j^*\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r}+(2\alpha_j+\frac{\mu_j}{1-\mu_j})\frac{u_j}{r}-m_jT_j(t,r)\right].$$

Радіальні компоненти $u_j(t,r)$ вектора переміщення є обмеженим в області D_n^+ розв'язком сепаратної системи диференціальних рівнянь руху в переміщеннях [1,6]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c_j^2\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r}\frac{\partial u_j}{\partial r} - \frac{2\alpha_j + 1}{r^2}u_j\right) = -c_j^2 m_j \frac{\partial T_j}{\partial r}(t,r), \quad (t,r) \in D_{nj}^+,\ j = \overline{1, n+1} \qquad (14)$$

з нульовими початковими умовами і умовами ідеального механічного контакту

$$[u_j(t,r) - u_{j+1}(t,r)]\Big|_{r=R_j} = 0$$

$$[\sigma_{1;j}(t,r) - \sigma_{1;j+1}(t,r)]\Big|_{r=R_j} = 0,\ j = \overline{1,n} \qquad (15)$$

У рівностях (13)-(15) $\sigma_{1;j} = \sigma_{rr;j}, \sigma_{2;j} = \sigma_{\varphi\varphi;j}, \sigma_{3;j} = \sigma_{zz;j}$ у випадку осьової симетрії та $\sigma_{3;j} = \sigma_{\theta\theta;j}(t,r)$ у випадку центральної симетрії , G_j - модуль зсуву, μ_j - коефіцієнт Пуассона, α_{T_j} - лінійний коефіцієнт теплового розширення ізотропного пружного тіла, $G_j^* = 2G_j(1-\mu_j)(1-2\mu_j)^{-1}, m_j = \alpha_{T_j}(1+\mu_j)(1-\mu_j)^{-1}, c_j$ - швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі.

Детермінований розв'язок задачі (14),(15) побудуємо також методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є – Бесселя на полярній осі $r \ge 0$ з n точками спряження [5].

На основі першої рівності з (13) друга рівність у (15) набирає вигляду

$$\left[\left(G_j^*\frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{(2\alpha_j+1)\mu_j}{(1-\mu_j)R_j}G_j^* u_j\right) - \left(G_{j+1}^*\frac{\partial u_{j+1}}{\partial r} + \frac{(2\alpha_{j+1}+1)\mu_{j+1}}{(1-\mu_{j+1})R_j}G_{j+1}^* u_{j+1}\right)\right]\Big|_{r=R_j} = \varphi_j(t), \qquad (16)$$

$$\varphi_j(t) = G_j^* m_j T_j(t,R_j) - G_{j+1}^* m_{j+1} T_{j+1}(t,R_j);\ j = \overline{1,n}.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя

$$(B_{\alpha_j+1;\alpha_j} + b_j^2)u_j \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_j+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2\alpha_j+1}{r^2} + b_j^2\right)u_j = 0,$$

де $b_j = c_j^{-1}\lambda,\ \lambda \in (0;\infty)$, утворюють функції Бесселя

$$J_{\alpha_j+1;\alpha_j}(b_j r) = (b_j r)^{-\alpha_j} J_{\alpha_j+1}(b_j r), \quad N_{\alpha_j+1;\alpha_j}(b_j r) = (b_j r)^{-\alpha_j} N_{\alpha_j+1}(b_j r).$$

Визначимо величини і функції

$$\alpha_{11}^k = {}_{12}^k = 0, \quad \beta_{11}^k = \beta_{12}^k = 1, \quad \alpha_{21}^k = G_k^*, \quad \beta_{21}^k = \frac{(2\alpha_k+1)\mu_k}{(1-\mu_k)R_k}G_k^*;$$

$$\alpha_{22}^k = G_{k+1}^*, \quad \beta_{22}^k = \frac{(2\alpha_{k+1}+1)\mu_{k+1}}{(1-\mu_{k+1})R_k}G_{k+1}^*, \quad c_{1k} = G_k^*, \quad c_{2k} = G_{k+1}^*;$$

$$u_{\nu_j,\alpha_j;11}^{j1}(b_j R_j) = J_{\nu_j,\alpha_j}(b_j R_j); \quad u_{\nu_j;\alpha_j;11}^{j2}(b_j R_j) = N_{\nu_j,\alpha_j}(b_j R_j);\ \nu_j = \alpha_j + 1;$$

$$u_{\nu_j,\alpha_j;21}^{j1}(b_j R_j) = -R_j G_j^* b_j^2 J_{\nu_j+1,\alpha_j+1}(b_j R_j) + R_j^{-1} G_j^* h_j J_{\nu_j;\alpha_j}(b_j R_j),$$

$$u_{\nu_j,\alpha_j;21}^{j2}(b_j R_j) = -R_j G_j^* b_j^2 N_{\nu_j+1,\alpha_j+1}(b_j R_j) + R_j^{-1} G_j^* h_j N_{\nu_j;\alpha_j}(b_j R_j);\ h_j = \frac{1+2\alpha_j\mu_j}{1-\mu_j};$$

$$u_{\nu_j,\alpha_j;12}^{j1}(b_j R_j) = J_{\nu_j;\alpha_j}(b_j R_j),\ u_{\nu_j,\alpha_j;12}^{j2}(b_j R_j) = N_{\nu_j;\alpha_j}(b_j R_j),$$

$$u_{\nu_j;\alpha_j;22}^{j1}(b_j R_j) = h_{j+1} R_j^{-1} G_{j+1}^* J_{\nu_j,\alpha_j}(b_j R_j) - R_j b_j^2 G_{j+1}^* J_{\nu_j+1;\alpha_j+1}(b_j R_j);$$

$$u^{j2}_{\nu_j;\alpha_j;22}(b_jR_j)=h_{j+1}R_j^{-1}G^*_{j+1}N_{\nu_j,\alpha_j}(b_jR_j)-R_jb_j^2G^*_{j+1}N_{\nu_j+1;\alpha_j+1}(b_jR_j);$$

$$\psi^k_{(\nu_k,\alpha_k;\nu_{k+1};\alpha_{k+1});ij}(b_kR_k,b_{k+1}R_k)=u^{ki}_{\nu_k,\alpha_k;11}(b_kR_k)u^{kj}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};22}(b_{k+1}R_k)-$$
$$-u^{ki}_{\nu_k,\alpha_k;21}(b_kR_k)u^{kj}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};12}(b_{k+1}R_k);\quad k=\overline{1,n};\ i,j=1,2;$$

$$W^{(1)}_{(\nu,\alpha)_2;j}(b_1R_1,b_2R_1)\equiv\psi^1_{(\nu_1,\alpha_1;\nu_2,\alpha_2);1j}(b_1R_1,b_2R_1)\equiv W^{(1)}_{(\nu,\alpha)_2;j}(\lambda);$$

$$W^{(k)}_{(\nu,\alpha)_{k+1};j}(\lambda)=W^{(k-1)}_{(\nu,\alpha)_k;2}(b_1R_1,b_2R_1;b_2R_2,b_3R_2;\ldots;b_{k-1}R_{k-1},b_kR_{k-1})\times$$
$$\times\psi^k_{(\nu_k,\alpha_k;\nu_{k+1},\alpha_{k+1});1j}(b_kR_k,b_{k+1}R_k)-\psi^k_{(\nu_k,\alpha_k;\nu_{k+1},\alpha_{k+1});2j}(b_kR_k,b_{k+1}R_k)\times$$
$$\times W^{(k-1)}_{(\nu,\alpha)_k;1}(b_1R_1,b_2R_1;b_2R_2,b_3R_2;\ldots;b_{k-1}R_{k-1},b_kR_{k-1});$$
$$k=\overline{2,n},\quad j=1,2;\quad (k)=123\ldots k;\quad (\nu,\alpha)_k=(\nu_1,\alpha_1;\nu_2,\alpha_2;\ldots;\nu_k,\alpha_k);$$

$$(\nu,\alpha)\equiv(\nu,\alpha)_{n+1};\Delta_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}\frac{2G^*_{k+1}}{\pi b_{k+1}^{2\alpha_{k+1}}R_k^{2\alpha_{k+1}+1}}\neq0;$$

$$\sigma_j=\frac{1}{c_j^2}\frac{G^*_j}{G^*_{n+1}}\prod_{k=j}^{n}\frac{R_k^{2\alpha_{k+1}+1}}{R_k^{2\alpha_k+1}},\ j=\overline{1,n};\quad \sigma_{n+1}=\frac{1}{c^2_{n+1}};$$

$$V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)=\Delta_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1r);\nu_j=\alpha_j+1,b_j=c_j^{-1}\lambda;$$

$$V_{(\nu,\alpha);k+1}(r,\lambda)=\Big(\prod_{j=k+1}^{n}\frac{2G^*_{j+1}}{\pi\, b_{j+1}^{2\alpha_{j+1}}R_j^{2\alpha_{j+1}+1}}\Big)[W^{(k)}_{(\nu,\alpha)_{k+1};2}(\lambda)J_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}(b_{k+1}r)-$$
$$-W_{(\nu,\alpha)_{k+1};1}(\lambda)N_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}(b_{k+1}r)],k=\overline{1,n-1};$$

$$V_{(\nu,\alpha);_{n+1}}(r,\lambda)=W^{(n)}_{(\nu,\alpha);2}(\lambda)J_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(b_{n+1}r)-W^{(n)}_{(\nu,\alpha);1}(\lambda)N_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(b_{n+1}r);$$

$$\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)=\lambda b_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}\left(\left[W^{(n)}_{(\nu,\alpha);1}(\lambda)\right]^2+\left[W^{(n)}_{(\nu,\alpha);2}(\lambda)\right]^2\right)^{-1}.$$

Наявність спектральної густини $\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)$, вагової функції

$$\sigma(r)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)r^{2\alpha_k+1}+\sigma_{n+1}\theta(r-R_n)r^{2\alpha_{n+1}+1},R_0=0,$$

і спектральної функції

$$V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\nu,\alpha);k}(r,\lambda)+\theta(r-R_n)V_{(\nu,\alpha);n+1}(r,\lambda)$$

дозволяють визначити пряме $H_{(\nu,\alpha);n}$ і обернене, $H^{-1}_{(\nu,\alpha);n}$ гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є –Бесселя на множині P_n^+ [5]:

$$H_{(\nu,\alpha);n}[f(r)]=\int_0^\infty f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr\equiv\tilde f(\lambda)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}f_k(r)V_{(\nu,\alpha);k}(r,\lambda)\sigma_kr^{2\alpha_k+1}dr;\quad R_0=0,\quad R_{n+1}=\infty; \tag{17}$$

$$H^{-1}_{(\nu,\alpha);n}[\tilde f(\lambda)]=\int_0^\infty\tilde f(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)d\lambda\equiv f(r) \tag{18}$$

Розв'язок задачі (14)-(16), побудований методом інтегрального перетворення (17),(18) , має структуру [4]:

$$u_j(t,r)=\sum_{k=1}^{n+1}m_k c_k^2\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}Z_{(\nu,\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)T_k(\tau,\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{19}$$

де функції впливу [4]

$$Z_{(\nu,\alpha);jk}(t,r,\rho)=\int_0^\infty\frac{\sin\lambda t}{\lambda}V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{2\alpha_k+1}{\rho}\right)V_{(\nu,\alpha);k}(\rho,\lambda)\right]\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)d\lambda \tag{20}$$

$$j,k=\overline{1,n+1}.$$

У результаті підстановки $T_k(\tau,\rho)$, визначених формулою (8), у рівність (19) маємо:

$$u_i(t,r)=\sum_{j=1}^{n+1}\int_0^t Q_{(\nu,\alpha);ij}(t-\tau,r)g_j(\tau)d\tau, i=\overline{1,n+1} \tag{21}$$

У рівності (21) прийнято позначення

$$Q_{(\nu,\alpha);ij}(t,r)=\sum_{k=1}^{n+1}m_k c_k^2\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}Z_{(\nu,\alpha);ik}(t-s,r,\rho)G_{(\alpha);kj}(s,\rho)\times$$
$$\times\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho ds;\quad i,j=\overline{1,n+1} \tag{22}$$

Внаслідок умов на функції $g_j(\tau)$ із структури (21) випливає, що математичне сподівання

$$M[u_i(t,r)]=\sum_{j=1}^{n+1}\int_0^t Q_{(\nu,\alpha);ij}(t-\tau,r)M[g_j(\tau)]d\tau=0, i=\overline{1,n+1} \tag{23}$$

Для елементів $K_{u_iu_m}(t_1,t_2,r)$ кореляційної функції отримаємо вираз [7]:

$$K_{u_iu_m}(t_1,t_2,r)=\sum_{j,k=1}^{n+1}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}Q_{(\nu,\alpha);ij}(t_1-\tau_1,r)Q_{(\nu,\alpha);mk}(t_2-\tau_2,r)\times$$
$$\times K_{jk}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2;\, K_{jk}(\tau_1,\tau_2)=K_{g_jg_k}(\tau_1,\tau_2);\quad i,m=\overline{1,n+1} \tag{24}$$

Звідси випливає наявність кореляційної матриці стохастичного динамічного поля переміщень у просторі P_n^+

$$K_u(t_1,t_2,r)=\left\{K_{u_iu_m}(t_1,t_2,r)\right\}_{i,m=1}^{n+1} \tag{25}$$

При $t_1=t_2\equiv t$ отримуємо матрицю

$$D_u(t,r)\equiv K_u(t,t,r), \tag{26}$$

що характеризує потужність стохастичного динамічного поля переміщень у $(n+1)-$ шаровому симетричному просторі P_n^+.

Якщо поля переміщень, породжені випадковими процесами $g_j(\tau)$, незалежні, то для $j\neq k=\overline{1,n+1}K_{jk}(\tau_1,\tau_2)=0$ і в (24) залишається одна сума. Якщо поля переміщень на ділянках $(0,R_1),(R_1,R_2),\ldots,(R_{n-1},R_n),(R_n,\infty)$ незалежні, то для $i\neq m=\overline{1,n+1}$ функції $K_{u_iu_m}(t_1,t_2,r)=0$ і матриці K_u та D_u набирають діагональної форми.

Визначимо функції:

$$A_{1;ik}(t,r)=G_i^*\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{(2\alpha_i+1)\mu_i}{(1-\mu_i)r}\right)Q_{(\nu,\alpha);ik}(t,r)-m_iG_{(\alpha);ik}(t,r)\right];i,k=\overline{1,n+1}; \quad (27)$$

$$A_{3;ik}(t,r)=G_i^*\left[\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\frac{\partial}{\partial r}+(2\alpha_i+\frac{\mu_i}{1-\mu_i})\frac{1}{r}\right)Q_{(\nu,\alpha);ik}(t,r)-m_iG_{(\alpha);ik}(t,r)\right];$$

У результаті підстановки у рівності (13) функцій $T_i(t,r)$, визначених формулою (8), та функцій $u_i(t,r)$, визначених формулою (21), отримуємо структуру детермінованого поля напружень у просторі P_n^+:

$$\sigma_{mi}(t,r)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t A_{m;ik}(t-\tau,r)g_k(\tau)d\tau;i=\overline{1,n+1};m=1,2,3 \quad (28)$$

Звідси випливає, що математичне сподівання

$$M[\sigma_{mi}(t,r)]=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t A_{m;ik}(t-\tau,r)M[g_k(\tau)]d\tau=0;\ i=\overline{1,n+1};m=\overline{1,3} \quad (29)$$

Для елементів кореляційної функції маємо вирази [7]:

$$K_{\sigma_{m_1i};\sigma_{m_2j}}(t_1,t_2,r)=\sum_{k_1,k_2=1}^{n+1}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}A_{m_1;ik_1}(t_1-\tau_1,r)A_{m_2;jk_2}(t_2-\tau_2,r)\sigma_{m_1i}\times$$
$$\times K_{k_1k_2}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2;K_{k_1k_2}=K_{g_{k_1}g_{k_2}}(\tau_1,\tau_2);i,j=\overline{1,n+1};m_1,m_2=1,2,3 \quad (30)$$

Якщо визначити матриці

$$K_{m_1m_2}(t_1,t_2,r)=\left\{K_{\sigma_{m_1i}\sigma_{m_2j}}(t_1,t_2,r)\right\}_{i,j=1}^{n+1},m_1,m_2=\overline{1,3}, \quad (31)$$

то елементи кореляційної функції поля напружень складають кореляційну матрицю

$$K_\sigma(t_1,t_2,r)=\left\{K_{m_1m_2}(t_1,t_2,r)\right\}_{m_1,m_2=1}^{3}$$

Якщо покласти в (31) $t_1=t_2\equiv t$, то отримуємо матрицю

$$D_\sigma(t,r)\equiv K_\sigma(t,t,r), \quad (32)$$

що характеризує потужність стохастичного динамічного поля напружень у симетричному просторі P_n^+.

Зауваження 1. Якщо поля напружень, породжені випадковими процесами $g_k(t)$, незалежні, то для $k_1\neq k_2=\overline{1,n+1}$ функції $K_{k_1k_2}(t_1,t_2)=0$ і в рівностях (30) залишається одна сума. Якщо поля напружень ділянок $(0,R_1),(R_1,R_2),\ldots,(R_n,\infty)$ незалежні, то $k_{\sigma_{m_1i}\sigma_{m_2j}}(t_1,t_2,r)=0$ для $i\neq j=\overline{1,n+1}$. Матриці (31) мають діагональну форму.

Зауваження 2. Якщо поля переміщень і напружень залежні, то до функцій $\sigma_{mi}(t,r)(m=1,2,3)$ треба добавити ще функцію $\sigma_{4i}(t,r)\equiv u_i(t,r)$. Тоді у рівностях (29) $m=\overline{1,4}$, у рівностях (30), (31) $m_1=\overline{1,4}$, $m_2=\overline{1,4}$. У результаті отримуємо кореляційну матрицю стохастичного динамічного термопружного поля

$$K(t_1,t_2r)=\left\{K_{m_1,m_2}(t_1,t_2r)\right\}_{m_1,m_2=1}^{4}, \quad (33)$$

породжену в симетричному просторі P_n^+ стохастичним нестаціонарним полем. Матриця потужності

$$D(t,r)=K(t,t,r) \quad (34)$$

Побудовані ймовірнісні характеристики стохастичного динамічного термопружного поля в $(n+1)-$ шаровому симетричному просторі P_n^+, з точки зору кореляційної теорії, є достатніми для інженерних розрахунків [6].

The main probability characteristics of the stochastic dynamic thermoelastic field in the (n+1) layer symmetric spaces have been built within the correlation theory.

Література

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика . – Киев: Наук. думка, 1972.-307 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука , 1972. – 735 с.
3. Боли Б., Уэнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
4. Блажевский С.Г., Ленюк М.П. Термоупругое состояние симметрических пространств. – Черновцы: Черновиц. гос. ун-т , 1992. – 85 с.
5. Ленюк М.П. Узагальнення інтегралу Фур'є – Бесселя // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : Зб. наук пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1993. – Вип. 2, ч. 1. – С. 79-91.
6. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз , 1963. – 251 с.
7. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 463 с.

Одержано 12.01.2001 р.